UNIVERSITÉ DE BORDEAUX **Le 15/12/2017**
MASTER 1 MSS, 2017/2018

EXAMEN
OUTILS DE SIMULATION

Durée 1h30

EXERCICE I

Soit X une variable aléatoire de loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, de densité de probabilité donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda|x|).$$

1) Montrer que la fonction de répartition F de X est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} \exp(\lambda x) & \text{si } x \leqslant 0, \\ 2 - \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

2) Calculer F^{-1} et proposer un code Scilab (ou pseudo-code) pour simuler la loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$ à partir d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.

3) Soient Y et Z des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, de densité de probabilité donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$g(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geqslant 0}.$$

On admet que $Y - Z$ suit la loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$.

   a) Sans faire les calculs, expliquer comment démontrer ce résultat.
   b) Calculer la fonction de répartition G de Y et en déduire une façon de simuler la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
   c) Proposer un second code Scilab (ou pseudo-code) pour simuler la loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$.

4) Soit ε une variable aléatoire indépendante de Y et de loi de Rademacher $\mathcal{R}(1/2)$, i.e. $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$. Montrer que la variable aléatoire εY suit la loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$ et en déduire un troisième code Scilab pour simuler la loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$.

EXERCICE II

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ des variables i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$. On pose $Y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{2^i}$ et $Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{2^{n-i+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On simule sur Scilab trois réalisations de $n \mapsto Y_n$ (respectivement $n \mapsto Z_n$) pour n variant de 1 à 30 puis on trace ces réalisations sur la figure 1 (respectivement la figure 2). Dans un second temps on simule 100000 tirages de Y_{30} (respectivement Z_{30}) puis on trace un histogramme de ces réalisations dans la figure 3 (respectivement la figure 4).

Que peut-on déduire de ces résultats numériques quant à la convergence de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

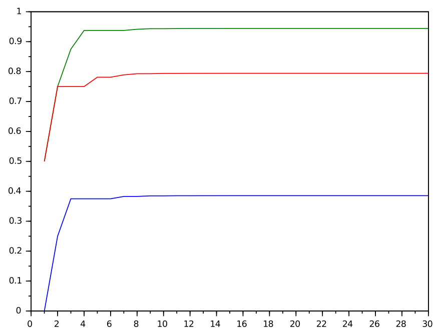

Figure 1

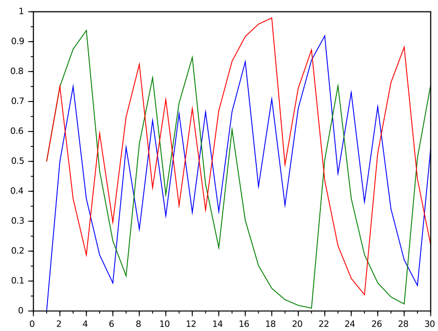

Figure 2

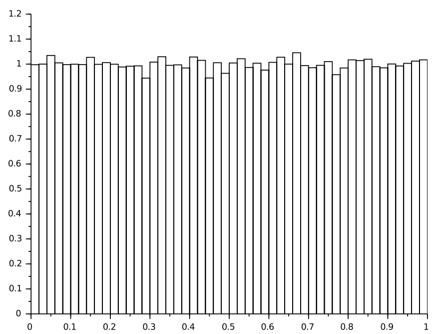

Figure 3

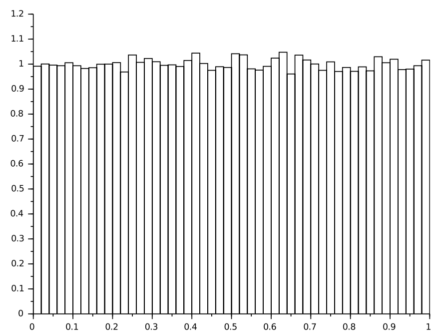

Figure 4

EXERCICE III

Expliquer ce que fait le code suivant :

```
--> n = 10;  N = 10000;
--> X = rand(n,N); Z = (sum(X,'r')-n/2)/sqrt(n/12);
--> Classe = 50; histplot(Classe,Z, style=2);
--> x = [-5:0.001:5]; plot(x,1/sqrt(2*%pi)*exp(-x.*x/2),'red')
```

EXERCICE IV

Soit X une variable aléatoire de loi Beta(a, b) avec $a > 0$ et $b > 0$, de densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)}\, x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\mathrm{I}_{\{x\in]0,1[\}}$$

où $B(a, b)$ est la fonction Beta d'Euler définie par

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\,dx.$$

On suppose dans toute la suite que $a > 1$ et $b > 1$.

1) Étudier la fonction h définie, pour tout $x \in]0, 1[$, par $h(x) = x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}$ (étudier les variations, tracer la courbe).

2) Montrer que le maximum M, de la fonction h, est donné par

$$M = \frac{(a-1)^{a-1}(b-1)^{b-1}}{(a+b-2)^{a+b-2}}.$$

3) En déduire un code Scilab (ou pseudo-code), basé sur la méthode du rejet, permettant de simuler la loi Beta(a, b) avec $a > 1$ et $b > 1$.

4) Pour $a = 2$ et $b = 4$, créer un code Scilab (ou pseudo-code) qui générera un tracé de la densité f, superposé à un histogramme de la loi Beta$(2, 4)$ obtenu sur 2 000 réalisations. On supposera qu'il existe déjà une fonction $B(a, b)$ calculant la valeur de la fonction Beta d'Euler et à laquelle vous avez accès.

Question subsidiaire : proposez une méthode probabiliste pour calculer une approximation numérique de $B(a, b)$.