Universités Bordeaux
Master 1 MIMSE

16/11/2011

PARTIEL PROBABILITÉS

Durée 2h00

PROBLÈME I

8 points

La loi géométrique est utilisée pour modéliser le nombre aléatoire d'essais nécessaires jusqu'à l'obtention d'un premier succès dans une suite d'épreuves indépendantes avec chacune une probabilité de succès égale à p où $0 < p < 1$. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ donnée, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.

1. Déterminer la fonction génératrice associée à X.
2. En déduire l'espérance et la variance de X.
3. Montrer que X satisfait la propriété d'absence de mémoire, i.e. pour tout $k, l \in \mathbb{N}^*$
$$\mathbb{P}(X > k + l | X > l) = \mathbb{P}(X > k).$$
4. Inversement, soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant la propriété d'absence de mémoire. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X > k)$ puis $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de k et $p = \mathbb{P}(X = 1)$ avec $0 < p < 1$, puis conclure.

PROBLÈME II

5 points

Il est facile de générer des variables aléatoires à partir de la loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Si $Z = 1 + \lfloor \ln(U)/ln(1-p) \rfloor$ avec $0 < p < 1$, montrer que Z suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ donnée, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.
2. Si $S = c\tan(\pi(U - 1/2))$ avec $c > 0$, montrer que S suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(c)$.

PROBLÈME III

3 points

Soit X le nombre aléatoire d'essais nécessaires jusqu'à l'obtention d'exactement m succès dans une suite d'épreuves indépendantes avec chacune une probabilité de succès égale à p où $0 < p < 1$.

1. Donner $X(\Omega)$.
2. calculer la loi de probabilité de X.

PROBLÈME IV

8 points

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[-a, a]$ avec $a > 0$. On pose

$$U = \frac{X+Y}{2} \quad \text{et} \quad V = \frac{X-Y}{2}.$$

1. Soient $\mathcal{D}$ le carré $[-a, a]^2$ et Δ le losange de base $[-a, a]$ et de hauteur $[-a, a]$. Soit h l'application de $\mathcal{D}$ dans Δ définie, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, par

$$h(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right).$$

   Montrer que h est un difféomorphisme dont le jacobien ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$.
2. Calculer la densité de probabilité du couple (U, V).
3. Montrer que U et V suivent la loi triangulaire symétrique dont la densité est donnée par

$$f(w) = \frac{1}{a^2}(a - |w|)\mathbb{1}_{\{|w| \leqslant a\}}.$$

4. Les variables aléatoires U et V sont elles indépendantes ?