Universités Bordeaux
Master 1 MIMSE

14/11/2014

PARTIEL PROBABILITÉS

Durée 1h30

PROBLÈME I

Il est facile de générer des variables aléatoires à partir de la loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Si $Z = 1 + \lfloor \ln(U)/\ln(1-p) \rfloor$ avec $0 < p < 1$, montrer que Z suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ donnée, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.
2. Si $S = c\tan(\pi(U - 1/2))$ avec $c > 0$, montrer que S suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(c)$.
3. Si ε est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendante de U, telle que
$$\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\varepsilon = 1) = 1/2,$$
montrer que $R = -\varepsilon \ln(U)/\lambda$ est une variable à densité et donner sa densité ($\lambda > 0$).

PROBLÈME II

On considère deux entreprises. Chaque entreprise peut faire faillite directement ou peut être contaminée par une autre entreprise qui a déjà fait faillite directement. Pour chaque entreprise i ($i \in \{1,2\}$) on note :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'entreprise } i \text{ a fait faillite directement,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$Y_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si l'entreprise } j \text{ contamine l'entreprise } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On suppose que les variables X_1, X_2, Y_{12} etY_{21} sont indépendantes. On suppose également que $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$, $X_2 \sim \mathcal{B}(p)$, $Y_{12} \sim \mathcal{B}(r)$ et $Y_{21} \sim \mathcal{B}(r)$ avec $p \in]0,1[$, $r \in [0,1]$. Pour $i \in \{1,2\}$, on introduit la variable aléatoire Z_i qui modélise la faillite (directe ou indirecte) de l'entreprise i : $Z_i = 1$ si l'entreprise i a fait faillite (directement ou par contamination) et $Z_i = 0$ sinon. On a donc

$$Z_1 = X_1 + (1 - X_1)X_2Y_{21} \tag{1}$$
$$Z_2 = X_2 + (1 - X_2)X_1Y_{12}. \tag{2}$$

1. Donner la loi de (Z_1, Z_2).
2. Z_1 et Z_2 sont elles indépendantes ?
3. On note N le nombre total de faillites. Donner la loi de N.

PROBLÈME III

Un joueur dispose d'un dé et d'une pièce. Le dé est équilibré et la pièce a une probabilité $p \in]0,1[$ de tomber sur pile. Le joueur lance d'abord le dé, puis lance la pièce autant de fois que le résultat du dé. Il compte enfin le nombre de piles obtenus au cours des lancers. On suppose que les résultats de chaque lancer sont indépendants. On note $q = 1 - p$. On note également D la variable aléatoire correspondant à la valeur du dé et X celle correspondant au nombre de piles obtenus à la fin du jeu.

1. Donner la loi de (X, D).
2. Sachant que l'on a obtenu aucun pile au cours du jeu, quelle était la probabilité que le résultat du dé soit 1 ?