EDSRs ergodiques et EDPs avec condition de Neumann au bord

Adrien Richou

IRMAR, Université Rennes 1

Chambéry - 16 octobre 2009

Cadre

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien de dimension d et $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sa filtration naturelle augmentée. On introduit un processus X à valeur dans $\mathbb{R}^d$ et solution d'une équation différentielle stochastique (EDS) :

$$X_t^{0,x} = x + \int_0^t b(s, X_s^{0,x})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{0,x})dW_s, \quad 0 \leqslant t, \quad (1)$$

avec b et σ deux fonctions lipschitziennes en x.

EDSRs en horizon fini

Soient $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$ et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$. On considère l'EDSR suivante

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T f(r, X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

EDSRs en horizon fini

Soient $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$ et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$. On considère l'EDSR suivante

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T f(r, X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (2)$$

Definition

Une solution de (2) est un couple de processus $(Y_t, Z_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ vérifiant :

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeur dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$,
2. $\mathbb{P} - p.s.$ $\int_0^T |f(r, X_r, Y_r, Z_r)| + \|Z_r\|^2 \, dr < \infty$
3. (Y, Z) vérifie (2).

EDSRs en horizon fini

Soient $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$ et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$. On considère l'EDSR suivante

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T f(r, X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (2)$$

Definition

Une solution de (2) est un couple de processus $(Y_t, Z_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ vérifiant :

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeur dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$,
2. $\mathbb{P} - p.s.$ $\int_0^T |f(r, X_r, Y_r, Z_r)| + \|Z_r\|^2 dr < \infty$
3. (Y, Z) vérifie (2).

Dans toute la suite on prend $k = 1$.

Exemple explicatif

On prend $f = 0$.

Exemple explicatif

On prend $f = 0$.
Un candidat naturel pour Y est $Y_t := \mathbb{E}[g(X_T)|\mathcal{F}_t]$. Le théorème de représentation martingale nous donne
$Y_t = \mathbb{E}[g(X_T)] + \int_0^t Z_s dW_s$.

Exemple explicatif

On prend $f = 0$.
Un candidat naturel pour Y est $Y_t := \mathbb{E}[g(X_T)|\mathcal{F}_t]$. Le théorème de représentation martingale nous donne $Y_t = \mathbb{E}[g(X_T)] + \int_0^t Z_s dW_s$.
Ainsi

$$\int_0^T Z_s dW_s + \mathbb{E}[g(X_T)] = g(X_T),$$

et

$$Y_t = g(X_T) - \int_t^T Z_s dW_s.$$

Théorème d'existence et d'unicité

Theorem (Pardoux-Peng 1990)

On suppose f uniformément lipschitzienne en y et en z et

$$\mathbb{E}\left[|g(X_T)|^2 + \int_0^T |f(r, X_r, 0, 0)|^2 dr\right] < \infty.$$

Alors (2) *possède une unique solution* (Y, Z) *telle que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2\right] < \infty, \quad \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_t|^2 dt\right] < \infty.$$

Liens avec les EDPs

Le cadre markovien permet de donner une interprétation probabiliste à certaines EDPs semi-linéaires. On pose

$$\mathcal{L}v(t,x) = \frac{1}{2} trace(\sigma {}^t\sigma(t,x)\nabla_x^2 v(t,x)) + b(t,x).{}^t\nabla_x v(t,x).$$

On considère l'EDP semi-linéaire parabolique suivante :

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \mathcal{L}v(t,x) + f(t,x,v(t,x),{}^t\nabla v(t,x)\sigma(t,x)) = 0$$
$$v(T,x) = g(x).$$

Liens avec les EDPs

Le cadre markovien permet de donner une interprétation probabiliste à certaines EDPs semi-linéaires. On pose

$$\mathcal{L}v(t,x) = \frac{1}{2}trace(\sigma^t\sigma(t,x)\nabla_x^2 v(t,x)) + b(t,x).^t\nabla_x v(t,x).$$

On considère l'EDP semi-linéaire parabolique suivante :

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \mathcal{L}v(t,x) + f(t,x,v(t,x),^t\nabla v(t,x)\sigma(t,x)) = 0$$
$$v(T,x) = g(x).$$

1. Si v est solution $C^{1,2}$ de l'EDP et $\nabla_x v$ à croissance polynômiale alors $(v(t,X_t^x),^t\nabla v(t,X_t^x)\sigma(t,X_t^x))$ est solution de l'EDSR.

Liens avec les EDPs

Le cadre markovien permet de donner une interprétation probabiliste à certaines EDPs semi-linéaires. On pose

$$\mathcal{L}v(t,x) = \frac{1}{2} trace(\sigma^t\sigma(t,x)\nabla_x^2 v(t,x)) + b(t,x).^t\nabla_x v(t,x).$$

On considère l'EDP semi-linéaire parabolique suivante :

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \mathcal{L}v(t,x) + f(t,x,v(t,x),^t\nabla v(t,x)\sigma(t,x)) = 0$$
$$v(T,x) = g(x).$$

1. Si v est solution $C^{1,2}$ de l'EDP et $\nabla_x v$ à croissance polynômiale alors $(v(t,X_t^x),^t\nabla v(t,X_t^x)\sigma(t,X_t^x))$ est solution de l'EDSR.
2. Si (Y,Z) est solution de l'EDSR alors $v(t,x) := Y_t^{t,x}$ est solution de viscosité de l'EDP (formule de Feynman-Kac).

EDSRs en horizon infini

On considère l'EDS et l'EDSR

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)ds + \int_0^t \sigma(X_s^x)dW_s, \quad 0 \leqslant t, \tag{3}$$

$$Y_t = Y_T + \int_t^T f(X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leqslant t \leqslant T < +\infty. \tag{4}$$

EDSRs en horizon infini

On considère l'EDS et l'EDSR

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)ds + \int_0^t \sigma(X_s^x)dW_s, \quad 0 \leqslant t, \tag{3}$$

$$Y_t = Y_T + \int_t^T f(X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leqslant t \leqslant T < +\infty. \tag{4}$$

Heuristique : $Y_\infty = 0$.

Existence et unicité pour les EDSRs en horizon infini

Theorem (Briand-Hu 1998, Royer 2004)

On suppose :

1. f *uniformément lipschitzienne en* y *et en* z,
2. f *strictement monotone en* y : $\mu > 0$
   $(y_1 - y_2).(f(x, y_1, z) - f(x, y_2, z)) \leqslant -\mu |y_1 - y_2|^2$,
3. $|f(x, 0, 0)| \leqslant K$,

alors il existe une solution (Y, Z) *telle que* Y *soit un processus borné par* K/μ *et* $\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}[|Y_s|^2 + \|Z_s\|^2]ds\right] < +\infty$. *Cette solution est unique parmi les processus tels que* Y *soit continu et borné et* $Z \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

Lien avec les EDPs

On a toujours

$$\mathcal{L}v(x) = \frac{1}{2}trace(\sigma^t\sigma(x)\nabla_x^2 v(x)) + b(x).^t\nabla_x v(x).$$

On considère l'EDP semi-linéaire elliptique suivante :

$$\mathcal{L}v(x) + f(t, x, v(x), {}^t\nabla v(x)\sigma(x)) = 0. \tag{5}$$

Lien avec les EDPs

On a toujours

$$\mathcal{L}v(x) = \frac{1}{2} trace(\sigma^t\sigma(x)\nabla_x^2 v(x)) + b(x).^t\nabla_x v(x).$$

On considère l'EDP semi-linéaire elliptique suivante :

$$\mathcal{L}v(x) + f(t, x, v(x),^t \nabla v(x)\sigma(x)) = 0. \tag{5}$$

1. Si v est solution $C^{1,2}$ de l'EDP et $\nabla_x v$ à croissance polynômiale alors $(v(X_t^x),^t \nabla v(X_t^x)\sigma(X_t^x))$ est solution de l'EDSR.

Lien avec les EDPs

On a toujours

$$\mathcal{L}v(x) = \frac{1}{2}trace(\sigma^t\sigma(x)\nabla_x^2 v(x)) + b(x).^t\nabla_x v(x).$$

On considère l'EDP semi-linéaire elliptique suivante :

$$\mathcal{L}v(x) + f(t, x, v(x), ^t\nabla v(x)\sigma(x)) = 0. \tag{5}$$

1. Si v est solution $C^{1,2}$ de l'EDP et $\nabla_x v$ à croissance polynômiale alors $(v(X_t^x), ^t\nabla v(X_t^x)\sigma(X_t^x))$ est solution de l'EDSR.
2. Si (Y, Z) est solution de l'EDSR alors $v(x) := Y_0^x$ est solution de viscosité de l'EDP (formule de Feynman-Kac).

EDSREs et EDPs dans $\mathbb{R}^d$

EDSRs Introduites par M. Fuhrman, Y. Hu et G. Tessitore (2007).

$$\begin{cases} X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)ds + \int_0^t \sigma(X_s^x)dW_s \\ Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \left[f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda\right] ds - \int_t^T Z_s^x dW_s \\ 0 \leq t \leq T < \infty \end{cases} \tag{6}$$

Avec b, σ et f Lipschitz, $f(.,0)$ borné. Une solution de l'EDSRE (6) est un triplé (Y, Z, λ). λ est appelée constante d'ergodicité.

Hypothèse de dissipativité

On ajoute une hypothèse de dissipativité pour l'EDS sous-jacente : $\eta + K_{f,z}K_\sigma < 0$ avec

$$\eta = \sup_{x,y\in\mathbb{R}^d, x\neq y}\left\{\frac{{}^t(x-y)(b(x)-b(y))}{|x-y|^2} + \frac{\mathrm{Tr}[(\sigma(x)-\sigma(y))^t(\sigma(x)-\sigma(y))]}{|x-y|^2}\right\}.$$

Cela nous permet d'avoir

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left|X_t^x - X_t^{x'}\right|^2\right] \leqslant e^{-ct}\left|x-x'\right|.$$

point de vue EDP

L'EDP associée est

$$\mathcal{L}v(x) + f(x, {}^t\nabla v(x)\sigma(x)) = \lambda.$$

- Permet de traiter des problèmes de contrôle ergodique (cf partie 3).
- Etudié par Bensoussan (88), Bagagiolo, Bardi et Capuzzo Dolcetta (97), Arisawa (97,98), Arisawa et Lions (98).

Résultat d'existence

Theorem (existence d'une solution pour l'EDSRE (6))

Il existe

- $\lambda \in \mathbb{R}$
- $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *lipschitz et* $v(0) = 0$
- $\zeta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{1\times d}$ *mesurable*

tels que, si on pose $Y_t^x := v(X_t^x)$ *et* $Z_t^x := \zeta(X_t^x)$, *alors* (Y^x, Z^x, λ) *est solution de l'EDSRE.*

Résultat d'existence

Theorem (existence d'une solution pour l'EDSRE (6))

Il existe

- $\lambda \in \mathbb{R}$
- $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *lipschitz et* $v(0) = 0$
- $\zeta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{1\times d}$ *mesurable*

tels que, si on pose $Y_t^x := v(X_t^x)$ *et* $Z_t^x := \zeta(X_t^x)$*, alors* (Y^x, Z^x, λ) *est solution de l'EDSRE.*

Remarque : on a pas besoin d'uniforme ellipticité.

Preuve

Idée de la preuve : On approche l'EDSRE par une EDSR strictement monotone

$$Y_t^{x,\alpha} = Y_T^{x,\alpha} + \int_t^T [f(X_s^x, Z_s^{x,\alpha}) - \alpha Y_s^{x,\alpha}]ds - \int_t^T Z_s^{x,\alpha} dW_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Et l'unicité ?

- unicité de λ :

Theorem

On suppose que pour $x \in \mathbb{R}^d$, (Y', Z', λ) est une solution de l'EDSRE (6) vérifiant

$$\left|Y'_t\right| \leqslant c_x(1 + |X^x_t|), \quad \forall t \geqslant 0,$$

alors $\lambda' = \lambda$.

Et l'unicité ?

- unicité de λ :

Theorem

On suppose que pour $x \in \mathbb{R}^d$, (Y', Z', λ) est une solution de l'EDSRE (6) vérifiant

$$\left|Y'_t\right| \leqslant c_x(1 + |X_t^x|), \quad \forall t \geqslant 0,$$

alors $\lambda' = \lambda$.

- non unicité de la solution :
  - Si (Y, Z, λ) est solution, alors $(Y + c, Z, \lambda)$ est solution.
  - Même en supposant $Y_0^0 = 0$, la solution de l'EDSRE n'est pas nécessairement unique.

Le point de vue EDP

G. Barles et F. Da Lio (2005) ont étudié des EDPs dans des domaines réguliers et bornés avec des conditions de Neumann de la forme :

$$\begin{cases} F(x, \nabla v(x), \nabla^2 v(x)) = 0, & \forall x \in G \\ L(x, \nabla v(x)) = \mu, & \forall x \in \partial G \end{cases}$$

où μ fait partie des inconnues.

Le point de vue EDP

G. Barles et F. Da Lio (2005) ont étudié des EDPs dans des domaines réguliers et bornés avec des conditions de Neumann de la forme :

$$\begin{cases} F(x, \nabla v(x), \nabla^2 v(x)) = 0, & \forall x \in G \\ L(x, \nabla v(x)) = \mu, & \forall x \in \partial G \end{cases}$$

où μ fait partie des inconnues.
Le but est de définir des EDSRs permettant de donner une représentation probabiliste aux EDPs semi-linéaires suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{L}v(x) + f(x, {}^t\nabla v(x)\sigma(x)) = 0, & \forall x \in G \\ \frac{\partial v(x)}{\partial n} + g(x) = \mu, & \forall x \in \partial G \end{cases}$$

EDSREs avec condition de Neumann au bord

Soit G un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ tel qu'il existe $\phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $G = \{\phi > 0\}$, $\partial G = \{\phi = 0\}$ et $|\nabla \phi(x)| = 1$ $\forall x \in \partial G$.
On considère une EDS sous-jacente réfléchie :

$$\begin{cases} X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)ds + \int_0^t \sigma(X_s^x)dW_s + \int_0^t \nabla\phi(X_s^x)dK_s^x, \quad t \geqslant 0; \\ K_t^x = \int_0^t 1_{X_s^x \in \partial G} dK_s^x, \quad K^x \text{ est croissant.} \end{cases}$$

EDSREs avec condition de Neumann au bord

Soit G un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ tel qu'il existe $\phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $G = \{\phi > 0\}$, $\partial G = \{\phi = 0\}$ et $|\nabla\phi(x)| = 1\ \forall x \in \partial G$.
On considère une EDS sous-jacente réfléchie :

$$\begin{cases} X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)ds + \int_0^t \sigma(X_s^x)dW_s + \int_0^t \nabla\phi(X_s^x)dK_s^x, & t \geqslant 0; \\ K_t^x = \int_0^t 1_{X_s^x \in \partial G} dK_s^x, \quad K^x \text{ est croissant.} \end{cases}$$

L'EDSRE que l'on souhaite étudier est : pour tous $0 \leq t \leq T$

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T [f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda] ds + \int_t^T [g(X_s^x) - \mu] dK_s^x - \int_t^T Z_s^x dW_s \quad (7)$$

où λ est une constante. On suppose toujours b, σ et f lipschitz, $f(.,0)$ borné et $\eta + K_{f,z}K_\sigma < 0$.

Démonstration de l'existence

Comme G. Barles et F. Da Lio, on considère une version modifiée strictement monotone de l'équation :

$$\begin{aligned} Y_t^{x,\alpha} &= Y_T^{x,\alpha} + \int_t^T \left[f(X_s^x, Z_s^{x,\alpha}) - \lambda - \alpha^2 Y_t^{x,\alpha}\right] ds \\ &\quad + \int_t^T \left[g(X_s^x) - \alpha Y_t^{x,\alpha}\right] dK_s^x - \int_t^T Z_s^{x,\alpha} dW_s \\ &\quad 0 \leq t \leq T < \infty \end{aligned}$$

avec $\alpha > 0$. On applique alors la stratégie de M. Fuhrman, Y. Hu et G. Tessitore.

Démonstration de l'existence

Comme G. Barles et F. Da Lio, on considère une version modifiée strictement monotone de l'équation :

$$\begin{aligned} Y_t^{x,\alpha} &= Y_T^{x,\alpha} + \int_t^T \left[f(X_s^x, Z_s^{x,\alpha}) - \lambda - \alpha^2 Y_t^{x,\alpha} \right] ds \\ &\quad + \int_t^T \left[g(X_s^x) - \alpha Y_t^{x,\alpha} \right] dK_s^x - \int_t^T Z_s^{x,\alpha} dW_s \\ &\quad 0 \leq t \leq T < \infty \end{aligned}$$

avec $\alpha > 0$. On applique alors la stratégie de M. Fuhrman, Y. Hu et G. Tessitore. Ne semble pas aboutir...

Démonstration de l'existence (2)

1. Dans un premier temps on résout un problème différent : μ devient un paramètre et λ une inconnue.

Démonstration de l'existence (2)

1. Dans un premier temps on résout un problème différent : μ devient un paramètre et λ une inconnue.
2. On prouve l'existence d'une solution (Y, Z, λ) lorsque $g = 0$ et $\mu = 0$, en rajoutant une hypothèse : G convexe. On a $Y_t^x = v(X_t^x)$ avec $v \in \mathcal{C}^0_{lip}(\overline{G})$. On montre également l'unicité de λ.

Démonstration de l'existence (2)

1. Dans un premier temps on résout un problème différent : μ devient un paramètre et λ une inconnue.
2. On prouve l'existence d'une solution (Y, Z, λ) lorsque $g = 0$ et $\mu = 0$, en rajoutant une hypothèse : G convexe. On a $Y_t^x = v(X_t^x)$ avec $v \in \mathcal{C}^0_{lip}(\overline{G})$. On montre également l'unicité de λ.
3. On se ramène au cas précédent pour g et μ quelconques.

Démonstration de l'existence (2)

1. Dans un premier temps on résout un problème différent : μ devient un paramètre et λ une inconnue.
2. On prouve l'existence d'une solution (Y, Z, λ) lorsque $g = 0$ et $\mu = 0$, en rajoutant une hypothèse : G convexe. On a $Y_t^x = v(X_t^x)$ avec $v \in \mathcal{C}^0_{lip}(\overline{G})$. On montre également l'unicité de λ.
3. On se ramène au cas précédent pour g et μ quelconques.
4. On peut définir la fonction $\mu \mapsto \lambda(\mu)$ et montrer qu'elle est continue et décroissante. Il ne reste plus qu'à montrer que $\lambda(-\infty) = +\infty$ et $\lambda(+\infty) = -\infty$ pour pouvoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Étape 1

On va montrer le résultat suivant :

Theorem

On suppose $g = 0$ et $\mu = 0$. Il existe

- $\lambda \in \mathbb{R}$
- $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *lipschitz et* $v(0) = 0$
- $\zeta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{1\times d}$ *mesurable*

tels que, si on pose $Y_t^x := v(X_t^x)$ et $Z_t^x := \zeta(X_t^x)$, alors (Y^x, Z^x, λ) est solution de l'EDSRE avec μ fixé. De plus, λ est unique parmi les solutions (Y, Z, λ) telles que Y soit un processus adapté continu borné et $Z \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

Idée de la preuve

On approche l'EDSRE par une EDSR strictement monotone

$$Y_t^{x,\alpha} = Y_T^{x,\alpha} + \int_t^T [f(X_s^x, Z_s^{x,\alpha}) - \alpha Y_s^{x,\alpha}]ds - \int_t^T Z_s^{x,\alpha} dW_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Idée de la preuve

On approche l'EDSRE par une EDSR strictement monotone

$$Y_t^{x,\alpha} = Y_T^{x,\alpha} + \int_t^T [f(X_s^x, Z_s^{x,\alpha}) - \alpha Y_s^{x,\alpha}] ds - \int_t^T Z_s^{x,\alpha} dW_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Lemme (Y. Hu, P. Briand, M. Royer)

Il existe une unique solution $(Y^{x,\alpha}, Z^{x,\alpha})$ avec $Y^{x,\alpha}$ borné continu et $Z^{x,\alpha} \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. De plus $|Y^{x,\alpha}| \leqslant M/\alpha\ \mathbb{P} - p.s.$ pour tout $t \geqslant 0$.

Idée de la preuve

- On définie $v^\alpha(x) := Y_0^{x,\alpha}$.
- On montre que v^α est lipschitz indépendamment de α.
- On pose $\bar{v}^\alpha(x) = v^\alpha(x) - v^\alpha(0)$. On sait que $|\bar{v}^\alpha(x)| \leqslant C|x|$, $\alpha|v^\alpha(x)| \leqslant M$ et $\{\bar{v}^\alpha\}$ uniformément lipschitz.
- $\exists \alpha_n \searrow 0$ telle que $\bar{v}^{\alpha_n}(x) \to v(x)$, $\forall x$ et $\alpha_n v^{\alpha_n}(0) \to \lambda$.

Étape 2

On suppose $g \in \mathcal{C}^1_{lip}(\overline{G})$. Soit $w \in \mathcal{C}^2_{lip}(\overline{G})$ vérifiant $\frac{\partial w(x)}{\partial n} + g(x) = \mu$. On pose $\tilde{Y}^x_t = w(X^x_t)$ et $\tilde{Z}^x_t = \nabla w(X^x_t)\sigma(X^x_t)$. Ces processus vérifient

$$\tilde{Y}^x_t = \tilde{Y}^x_T - \int_t^T \mathcal{L}\tilde{v}(X^x_s)ds + \int_t^T [g(X^x_s - \mu]dK^x_s - \int_t^T \tilde{Z}^x_s dW_s.$$

Alors on retranche $(\tilde{Y}^x_t, \tilde{Z}^x_t)$ à (Y^x_t, Z^x_t).

Étude de la fonction $\mu \mapsto \lambda(\mu)$

Le résultat d'unicité concernant λ permet de définir la fonction $\mu \mapsto \lambda(\mu)$.

Proposition

$\mu \mapsto \lambda(\mu)$ *est une fonction réelle décroissante et continue.*

Il suffit donc de montrer

$$\lambda(\mu) \xrightarrow{\mu \to +\infty} -\infty \quad \text{and} \quad \lambda(\mu) \xrightarrow{\mu \to -\infty} +\infty$$

pour pouvoir appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Cas où f est borné

On prend deux solutions $(Y, Z, \lambda(0))$, $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \lambda(\mu))$:

$$Y_0^x = Y_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda(0)]\, ds + \int_0^T [g(X_s^x)]\, dK_s^x - \int_0^T Z_s^x\, dW_s,$$

$$\tilde{Y}_0^x = \tilde{Y}_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - \lambda(\mu)]\, ds + \int_0^T [g(X_s^x) - \mu]\, dK_s^x - \int_0^T \tilde{Z}_s^x\, dW_s.$$

On fait la différence et on obtient

$$\left| \mathbb{E}\left[Y_0^x + \tilde{Y}_T^x - Y_T^x - \tilde{Y}_0^x \right] + (\lambda(0) - \lambda(\mu))T - \mu \mathbb{E}\left[K_T^x\right] \right| \leqslant 2M_f T.$$

Cas où f est borné

On prend deux solutions $(Y, Z, \lambda(0))$, $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \lambda(\mu))$:

$$Y_0^x = Y_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda(0)]\, ds + \int_0^T [g(X_s^x)]\, dK_s^x - \int_0^T Z_s^x\, dW_s,$$

$$\tilde{Y}_0^x = \tilde{Y}_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - \lambda(\mu)]\, ds + \int_0^T [g(X_s^x) - \mu]\, dK_s^x - \int_0^T \tilde{Z}_s^x\, dW_s.$$

On fait la différence et on obtient

$$\left| \mathbb{E}\left[Y_0^x + \tilde{Y}_T^x - Y_T^x - \tilde{Y}_0^x \right] + (\lambda(0) - \lambda(\mu))T - \mu \mathbb{E}\left[K_T^x\right] \right| \leqslant 2M_f T.$$

Question : quel est le comportement de $\mathbb{E}\left[K_T^x\right]$?

Comportement de K

Lemme

Soient ν la mesure invariante du processus X, $X_0 \sim \nu$. On a

$$\mathbb{E}\left[K_T^{X_0}\right] = -\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] T.$$

Preuve :

$$K_t^x = \phi(X_t^x) - \phi(x) - \int_0^t \mathcal{L}\phi(X_s^x)ds - \int_0^t ({}^t\nabla\phi(X_s^x)\sigma(X_s^x))dW_s. \qquad \square$$

Comportement de K

Lemme

Soient ν la mesure invariante du processus X, $X_0 \sim \nu$. On a

$$\mathbb{E}\left[K_T^{X_0}\right] = -\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right]T.$$

Preuve :

$$K_t^x = \phi(X_t^x) - \phi(x) - \int_0^t \mathcal{L}\phi(X_s^x)ds - \int_0^t ({}^t\nabla\phi(X_s^x)\sigma(X_s^x))dW_s. \quad \square$$

Alors on obtient dans l'inéquation précédente

$$|(\lambda(0) - \lambda(\mu)) + \mu\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right]| \leqslant 2M_f.$$

Ainsi, le résultat d'existence est établi si $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] < 0$. De plus, lorsque $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] = 0$, il existe des λ pour lesquels il n'y a pas de solution (Y, Z, μ) à l'EDSRE.

Comportement de K : exemples

- Si σ est inversible, $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] < 0$.

Comportement de K : exemples

- Si σ est inversible, $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] < 0$.
- $G = B(0,1)$, $\phi(x) = \frac{1-|x|^2}{2}$, $b(x) = -x$ et
$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_d \end{pmatrix}.$$ On a $\nu = \delta_0$, donc $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] = 0$.

Comportement de K : exemples

- Si σ est inversible, $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] < 0$.
- $G = B(0,1)$, $\phi(x) = \frac{1-|x|^2}{2}$, $b(x) = -x$ et
$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_d \end{pmatrix}.$$
On a $\nu = \delta_0$, donc $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] = 0$.
- $G = B(0,1)$, $\phi(x) = \frac{1-|x|^2}{2}$, $b(x) = -x$ et
$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0_{d-k} \end{pmatrix}.$$
On a $\nu = \nu_k \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^{d-k}}}$ et $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] < 0$.

Résultat

Theorem (f borné)

On suppose

- *G borné convexe et régulier,*
- $\eta + K_{f,z}K_\sigma < 0$,
- $g \in \mathcal{C}^1_{lip}(\overline{G})$,
- *f borné et* $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] < 0$,

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe $\mu \in \mathbb{R}$, $v \in \mathcal{C}^0_{lip}(\overline{G})$ et ζ une fonction mesurable telles que $((v(X_t^x))_t, (\zeta(X_t^x))_t, \mu)$ soit une solution de l'EDSRE (7). De plus on a

$$|(\lambda(0) - \lambda(\mu)) + \mu\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right]| \leqslant 2M_f.$$

Problème : On a pas l'unicité de μ et dans les problèmes de contrôle ergodique optimal f n'est pas borné.

f non borné

On prend deux solutions $(Y, Z, \lambda(\mu))$, $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \lambda(\tilde{\mu}))$:

$$Y_0^x = Y_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda(\mu)]\, ds + \int_0^T [g(X_s^x) - \mu]\, dK_s^x - \int_0^T Z_s^x dW_s$$

$$\tilde{Y}_0^x = \tilde{Y}_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - \lambda(\tilde{\mu})]\, ds + \int_0^T [g(X_s^x) - \tilde{\mu}]\, dK_s^x - \int_0^T \tilde{Z}_s^x dW_s$$

On pose $\bar{Y}^x := \tilde{Y}^x - Y^x$ et $\bar{Z}^x := \tilde{Z}^x - Z^x$.

f non borné

On prend deux solutions $(Y, Z, \lambda(\mu))$, $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \lambda(\tilde{\mu}))$:

$$Y_0^x = Y_T^x + \int_0^T \left[f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda(\mu)\right] ds + \int_0^T \left[g(X_s^x) - \mu\right] dK_s^x - \int_0^T Z_s^x dW_s$$

$$\tilde{Y}_0^x = \tilde{Y}_T^x + \int_0^T \left[f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - \lambda(\tilde{\mu})\right] ds + \int_0^T \left[g(X_s^x) - \tilde{\mu}\right] dK_s^x - \int_0^T \tilde{Z}_s^x dW_s$$

On pose $\bar{Y}^x := \tilde{Y}^x - Y^x$ et $\bar{Z}^x := \tilde{Z}^x - Z^x$. On a, pour tout $T \in \mathbb{R}_+$,

$$\bar{Y}_0^x = \bar{Y}_T^x + \int_0^T \left[f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - f(X_s^x, Z_s^x)\right] ds + [\lambda - \tilde{\lambda}]T + [\mu - \tilde{\mu}]K_T^x - \int_0^T \bar{Z}_s^x dW_s.$$

f non borné

On prend deux solutions $(Y, Z, \lambda(\mu))$, $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \lambda(\tilde{\mu}))$:

$$Y_0^x = Y_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda(\mu)]\, ds + \int_0^T [g(X_s^x) - \mu]\, dK_s^x - \int_0^T Z_s^x dW_s$$

$$\tilde{Y}_0^x = \tilde{Y}_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - \lambda(\tilde{\mu})]\, ds + \int_0^T [g(X_s^x) - \tilde{\mu}]\, dK_s^x - \int_0^T \tilde{Z}_s^x dW_s$$

On pose $\bar{Y}^x := \tilde{Y}^x - Y^x$ et $\bar{Z}^x := \tilde{Z}^x - Z^x$. On a, pour tout $T \in \mathbb{R}_+$,

$$\bar{Y}_0^x = \bar{Y}_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - f(X_s^x, Z_s^x)]\, ds + [\lambda - \tilde{\lambda}]T + [\mu - \tilde{\mu}]K_T^x - \int_0^T \bar{Z}_s^x dW_s.$$

$$\bar{Y}_0^x = \bar{Y}_T^x + \int_0^T \bar{Z}_s^x \beta_s ds + [\lambda - \tilde{\lambda}]T + [\mu - \tilde{\mu}]K_T^x - \int_0^T \bar{Z}_s^x dW_s.$$

f non borné

On prend deux solutions $(Y, Z, \lambda(\mu))$, $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \lambda(\tilde{\mu}))$:

$$Y_0^x = Y_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda(\mu)]\, ds + \int_0^T [g(X_s^x) - \mu]\, dK_s^x - \int_0^T Z_s^x dW_s$$

$$\tilde{Y}_0^x = \tilde{Y}_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - \lambda(\tilde{\mu})]\, ds + \int_0^T [g(X_s^x) - \tilde{\mu}]\, dK_s^x - \int_0^T \tilde{Z}_s^x dW_s$$

On pose $\bar{Y}^x := \tilde{Y}^x - Y^x$ et $\bar{Z}^x := \tilde{Z}^x - Z^x$. On a, pour tout $T \in \mathbb{R}_+$,

$$\bar{Y}_0^x = \bar{Y}_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - f(X_s^x, Z_s^x)]\, ds + [\lambda - \tilde{\lambda}]T + [\mu - \tilde{\mu}]K_T^x - \int_0^T \bar{Z}_s^x dW_s.$$

$$\bar{Y}_0^x = \bar{Y}_T^x + \int_0^T \bar{Z}_s^x \beta_s ds + [\lambda - \tilde{\lambda}]T + [\mu - \tilde{\mu}]K_T^x - \int_0^T \bar{Z}_s^x dW_s.$$

$$\bar{Y}_0^x - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[\bar{Y}_T^x\right] = [\lambda - \tilde{\lambda}]T + [\mu - \tilde{\mu}]\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[K_T^x\right].$$

f non borné

Theorem (f non borné)

On suppose

- *G borné convexe et régulier,*
- $\eta + K_{f,z}K_\sigma < 0$,
- $g \in \mathcal{C}^1_{lip}(\overline{G})$,
- $-\sup_{x\in\overline{G}} \mathcal{L}\phi - |\nabla\phi\sigma|_{\infty,\overline{G}} K_{f,z} > 0$,

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe $\mu \in \mathbb{R}$, $v \in \mathcal{C}^0_{lip}(\overline{G})$ et ζ une fonction mesurable telles que $((v(X_t^x))_t, (\zeta(X_t^x))_t, \mu)$ soit une solution de l'EDSRE (7). De plus on a

$$(\lambda(\mu) - \lambda(\tilde{\mu})) + (\mu - \tilde{\mu})I_{\mu,\tilde{\mu}} = 0 \text{ avec } 0 < c \leqslant I_{\mu,\tilde{\mu}} \leqslant C.$$

f non borné : exemple

Exemple : $G = B(0,1)$, $\phi(x) = \frac{1-|x|^2}{2}$, $b(x) = -x$ et $\sigma(x) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0_{d-k} \end{pmatrix}$. Les hypothèses sont vérifiées dès que $k/2 - 1 > K_{f,z}$.

Cas particulier des processus de Kolmogorov

Dans cette partie on pose $\sigma = \sqrt{2}I$ et $b = -\nabla U$ avec $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $\nabla^2 U \geqslant cI$ avec $c > 0$.

Theorem (f non borné (2))

On suppose

- *G borné convexe et régulier,*
- $\eta + K_{f,z}K_\sigma < 0$,
- $g \in \mathcal{C}^1_{lip}(\overline{G})$,
- $\left(\dfrac{\delta}{\sqrt{2c}} + \sqrt{2}|\nabla\phi|_{\infty,\overline{G}}\right) K_{f,z} < -\mathbb{E}[\mathcal{L}\phi(X_0)]$ *avec* $\delta = \sup_{x\in\overline{G}}({}^t\nabla U(x)x) - \inf_{x\in\overline{G}}({}^t\nabla U(x)x)$

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe $\mu \in \mathbb{R}$, $v \in \mathcal{C}^0_{lip}(\overline{G})$ et ζ une fonction mesurable telles que $((v(X_t^x))_t, (\zeta(X_t^x))_t, \mu)$ soit une solution de l'EDSRE (7).

Le problème de contrôle ergodique optimal

Soit U un espace métrique séparable. un contrôle ρ est un processus progressivement mesurable à valeur dans U. Soient $R : U \to \mathbb{R}^d$ et $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{1\times d} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues bornées. On suppose L uniformément lipschitz par rapport à sa première variable.

Le problème de contrôle ergodique optimal

Soit U un espace métrique séparable. un contrôle ρ est un processus progressivement mesurable à valeur dans U. Soient $R : U \to \mathbb{R}^d$ et $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{1\times d} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues bornées. On suppose L uniformément lipschitz par rapport à sa première variable. Les coûts ergodiques sont

$$I(x,\rho) = \limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\mathbb{E}^{\rho,T}\left[\int_0^T L(X_s^x,\rho_s)ds + \int_0^T [g(X_s^x)-\mu]dK_s^x\right],$$

$$J(x,\rho) = \limsup_{T\to+\infty} \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x]>0}}{\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x]}\mathbb{E}^{\rho,T}\left[\int_0^T [L(X_s^x,\rho_s)-\lambda]ds + \int_0^T g(X_s^x)dK_s^x\right],$$

avec $\Gamma_T^\rho = \exp\left(\int_0^T R(\rho_s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T |R(\rho_s)|^2 ds\right)$ et $\mathbb{P}_T^\rho = \Gamma_T^\rho \mathbb{P}$.

Le problème de contrôle ergodique optimal

On définit l'hamiltonien de façon habituelle :

$$f(x,z) = \inf_{u \in U} \{L(x,u) + zR(u)\}, \quad x \in \mathbb{R}^d, z \in \mathbb{R}^{1\times d}.$$

Si, pour tous x, z l'infimum est atteint alors il existe une fonction mesurable $\gamma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{1\times d} \to U$ telle que

$$f(x,z) = L(x,\gamma(x,z)) + zR(\gamma(x,z)).$$

On note que f est une fonction lipschitz et $f(.,0)$ est bornée.

Un premier résultat

Theorem

On se place sous les hypothèses d'existence d'une solution (Y, Z, λ) à μ fixé. Alors on a :

1. *Pour tout contrôle ρ, $I(x, \rho) \geqslant \lambda$ et l'égalité à lieu si $L(X_t^x, \rho_t) + Z_t^x R(\rho_t) = f(X_t^x, Z_t^x)$, $\mathbb{P} - p.s.$ pour tout $t \geqslant 0$.*
2. *Si le minimum est atteint dans la définition de l'hamiltonien, alors le contrôle $\overline{\rho}_t = \gamma(X_t^x, Z_t)$ verifie $I(x, \overline{\rho}) = \lambda$.*

Un second résultat

Theorem

On se place sous les hypothèses d'existence d'une solution (Y, Z, μ) à λ fixé lorsque f est non borné. Alors on a :

1. *Pour tout contrôle ρ, $J(x, \rho) \geqslant \mu$ et l'égalité à lieu si $L(X_t^x, \rho_t) + Z_t^x R(\rho_t) = f(X_t^x, Z_t^x)$, $\mathbb{P} - p.s.$ pour tout $t \geqslant 0$.*
2. *Si le minimum est atteint dans la définition de l'hamiltonien, alors le contrôle $\overline{\rho}_t = \gamma(X_t^x, Z_t)$ verifie $J(x, \overline{\rho}) = \mu$.*

Bibliographie

- M. Fuhrman, Y. Hu and G. Tessitore. Ergodic BSDEs and optimal ergodic control in Banach spaces. *SIAM J. Control Optim.* 48(3) :1542-1566, 2009.
- G. Barles and F. Da Lio. On the boundary ergodic problem for fully nonlinear equations in bounded domains with general nonlinear Neumann boundary conditions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*. 22(5) :521-541, 2005.
- A. R. Ergodic BSDEs and related PDEs with Neumann boundary conditions. *Stochastic processes and their applications*. 119 :2945-2969, 2009.