EDSRs ergodiques et EDPs avec condition de Neumann au bord

Adrien Richou

IRMAR, Université Rennes 1

Journées de probabilités 2008

1. rappels sur les EDSRs
   - EDSRs en horizon fini
   - EDSRs en horizon infini
2. EDSRs ergodiques
   - EDSREs et EDPs sans condition de Neumann
   - EDSREs et EDPs avec condition de Neumann

EDSRs en horizon fini

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien de dimension d, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sa filtration naturelle augmentée, T un réel positif, ξ une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable, $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$.

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (1)$$

Definition

Une solution de (1) est un couple de processus $(Y_t, Z_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ vérifiant :

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeur dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$,
2. $\mathbb{P} - p.s.\ \int_0^T |f(r, Y_r, Z_r)| + \|Z_r\|^2 dr < \infty$
3. (Y, Z) vérifie (1).

Exemple explicatif

On prend $f = 0$.
Un candidat naturel pour Y est $Y_t := \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t]$. Le théorème de représentation martingale nous donne $Y_t = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_s dB_s$.
Alors

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s.$$

EDSRs en horizon fini

Theorem (Pardoux-Peng 1990)

On suppose f uniformément lipschitzienne en y et en z et

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(.,0,0)|^2 dr\right] < \infty.$$

Alors (1) *possède une unique solution* (Y, Z) *telle que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty, \quad \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_t|^2 dt\right] < \infty.$$

Dans toute la suite on suppose $k = 1$.

EDSRs en horizon infini

Heuristique : $Y_\infty = 0$.

$$Y_t = Y_T + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leqslant t \leqslant T < +\infty. \tag{2}$$

Theorem (Briand-Hu 1998, Royer 2004)

On suppose :

1. *f est uniformément lipschitzienne en y et en z,*
2. *f monotone en y :* $(y_1 - y_2).(f(t, y_1, z) - f(t, y_2, z)) \leqslant -\mu \left|y_1 - y_2\right|^2$,
3. $|f(t, 0, 0)| \leqslant K$,

alors il existe une solution (Y, Z) telle que Y soit un processus borné par K/μ et $\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}[|Y_s|^2 + \|Z_s\|^2]ds\right] < +\infty$. Cette solution est unique parmi les processus tels que Y soit continu et borné et $Z \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

Cadre Markovien

On introduit un processus X solution d'une équation différentielle stochastique :

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)ds + \int_0^t \sigma(X_s^x)dW_s, \quad 0 \leqslant t, \tag{3}$$

avec b et σ deux fonctions lipschitziennes.
Dans la suite, la partie aléatoire du générateur se fait au travers de X :

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T f(X_r^x, Y_r^x, Z_r^x)dr - \int_t^T Z_r^x dW_r, \quad 0 \leqslant t \leqslant T < +\infty, \tag{4}$$

avec $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1\times d} \to \mathbb{R}$.
La structure markovienne de X se transfère à la solution de l'EDSR.

Lien avec les EDPs

Le cadre markovien permet de donner une interprétation probabiliste à certaines EDPs semi-linéaires. On pose

$$\mathcal{L}v(x) = \frac{1}{2} trace(\sigma^t\sigma(x)\nabla_x^2 v(x)) + b(x).^t\nabla v(x).$$

On considère l'EDP semi-linéaire elliptique suivante :

$$\mathcal{L}v(x) + f(x, v(x),^t \nabla v(x)\sigma(x)) = 0. \tag{5}$$

1. Si v est solution de l'EDP et $\nabla_x v$ à croissance polynômiale alors $(v(X_t^x),^t \nabla v(X_t^x)\sigma(X_t^x))$ est solution de l'EDSR.
2. Si (Y, Z) est solution de l'EDSR alors $v(x) := Y_0^x$ est solution de viscosité de l'EDP (Feynman-Kac).

EDSREs et EDPs sans condition de Neumann

EDSRs Introduites par M. Fuhrman, Y. Hu et G. Tessitore (2007).

$$\begin{cases} X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)ds + \int_0^t \sigma(X_s^x)dW_s \\ Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \left[f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda\right]ds - \int_t^T Z_s^x dW_s \\ 0 \leq t \leq T < \infty \end{cases} \tag{6}$$

Avec f Lipschitz et $f(.,0)$ borné. Une solution de l'EDSRE (6) est un triplé (Y, Z, λ). λ est appelée constante d'ergodicité. L'EDP associée est

$$\mathcal{L}v(x) + f(x, {}^t\nabla v(x)\sigma(x)) = \lambda.$$

Ces EDSREs peuvent permettre de traiter des problèmes de contrôle ergodique.

EDSREs et EDPs sans condition de Neumann

Heuristique déterministe :

- $-y' = f(t) - \alpha y$ a une unique solution bornée.
- $-y' = f(t)$ n'a pas nécessairement de solution bornée.
- Si $\lim_{+\infty} f = \lambda$, il existe au plus une constante c telle qu'une solution de $-y' = f(t) - c$ soit bornée. ($c = \lambda$)

M. Fuhrman, Y. Hu et G. Tessitore ont établi un résultat d'existence d'une solution pour l'EDSRE qui nécessite une hypothèse de dissipativité pour l'EDS sous-jacente :
$\eta + K_{f,z} K_\sigma < 0$ avec

$$\eta = \sup_{x,y \in \mathbb{R}^d, x \neq y} \left\{ \frac{{}^t(x-y)(b(x)-b(y))}{|x-y|^2} + \frac{\mathrm{Tr}[(\sigma(x)-\sigma(y))^t(\sigma(x)-\sigma(y))]}{|x-y|^2} \right\}.$$

L'unicité est établie pour λ.

EDSREs et EDPs avec condition de Neumann au bord

G. Barles et F. Da Lio (2005) ont étudié des EDPs dans des domaines bornés avec des conditions de Neumann de la forme :

$$\begin{cases} F(x, \nabla v(x), \nabla^2 v(x)) = \lambda, & \forall x \in G \\ L(x, \nabla v(x)) = \mu, & \forall x \in \partial G \end{cases}$$

où λ est une constante et μ fait partie des inconnues.
Notre but est d'étudier les EDSREs liées aux EDPs de la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{L}v(x) + f(x, {}^t\nabla v(x)\sigma(x)) = \lambda, & \forall x \in G \\ \frac{\partial v(x)}{\partial n} + g(x) = \mu, & \forall x \in \partial G \end{cases}$$

EDSREs avec condition de Neumann au bord

Soit G un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ tel qu'il existe $\phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $G = \{\phi > 0\}$, $\partial G = \{\phi = 0\}$ et $|\nabla\phi(x)| = 1$ $\forall x \in \partial G$.
On considère une EDS sous-jacente réfléchie :

$$\begin{cases} X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)ds + \int_0^t \sigma(X_s^x)dW_s + \int_0^t \nabla\phi(X_s^x)dK_s^x, & t \geqslant 0; \\ K_t^x = \int_0^t 1_{X_s^x \in \partial G} dK_s^x, & K^x \text{ est croissant.} \end{cases}$$

l'EDSRE que l'on souhaite étudier est :

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \left[f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda\right] ds + \int_t^T \left[g(X_s^x) - \mu\right] dK_s^x - \int_t^T Z_s^x dW_s$$
$$0 \leq t \leq T < \infty$$

Démonstration de l'existence

Comme G. Barles et F. Da Lio, on considère une version modifiée strictement monotone de l'équation :

$$\begin{aligned} Y_t^{x,\alpha} &= Y_T^{x,\alpha} + \int_t^T \left[f(X_s^x, Z_s^{x,\alpha}) - \lambda - \alpha^2 Y_t^{x,\alpha}\right] ds \\ &+ \int_t^T \left[g(X_s^x) - \alpha Y_t^{x,\alpha}\right] dK_s^x - \int_t^T Z_s^{x,\alpha} dW_s \\ &0 \le t \le T < \infty \end{aligned}$$

avec $\alpha > 0$. On applique alors la stratégie de M. Fuhrman, Y. Hu et G. Tessitore.
Ne semble pas aboutir...

Démonstration de l'existence (2)

- Dans un premier temps on résout un problème différent : μ devient un paramètre et λ une inconnue.
- On prouve l'existence d'une solution (Y, Z, λ) lorsque $g = 0$ et $\mu = 0$, en rajoutant deux hypothèses : G convexe et $\eta + K_{f,z}K_\sigma < 0$. On a $Y_t^x = v(X_t^x)$ avec $v \in \mathcal{C}^0_{lip}(\overline{G})$. On montre également l'unicité de λ.
- On se ramène au cas précédent : Soit w vérifiant $\frac{\partial w(x)}{\partial n} + g(x) = \mu$, pour tous $x \in \partial G$; on retranche $(w(X_t^x), {}^t\nabla w(X_t^x)\sigma(X_t^x))$ à (Y_t^x, Z_t^x). On a besoin de $g \in \mathcal{C}^2_{lip}(\overline{G})$.
- On peut définir la fonction $\mu \mapsto \lambda(\mu)$ et montrer qu'elle est continue et décroissante. Il ne reste plus qu'à montrer que $\lambda(-\infty) = +\infty$ et $\lambda(+\infty) = -\infty$ pour pouvoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Cas ou f est borné

On prend deux solutions $(Y, Z, \lambda(0))$, $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \lambda(\mu))$:

$$Y_0^x = Y_T^x + \int_0^T \left[f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda(0)\right] ds + \int_0^T \left[g(X_s^x)\right] dK_s^x - \int_0^T Z_s^x dW_s$$

$$\tilde{Y}_0^x = \tilde{Y}_T^x + \int_0^T \left[f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - \lambda(\mu)\right] ds + \int_0^T \left[g(X_s^x) - \mu\right] dK_s^x - \int_0^T \tilde{Z}_s^x dW_s$$

On fait la différence et on obtient

$$\left|\mathbb{E}\left[Y_0^x + \tilde{Y}_T^x - Y_T^x - \tilde{Y}_0^x\right] + (\lambda(0) - \lambda(\mu))T - \mu\mathbb{E}\left[K_T^x\right]\right| \leqslant 2M_f T.$$

Question : quel est le comportement de $\mathbb{E}\left[K_T^x\right]$?

Comportement de K

Lemme

Soient ν la mesure invariante du processus X, $X_0 \sim \nu$. On a

$$\mathbb{E}\left[K_T^{X_0}\right] = -\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] T.$$

Preuve :

$$K_t^x = \phi(X_t^x) - \phi(x) - \int_0^t \mathcal{L}\phi(X_s^x)ds - \int_0^t ({}^t\nabla\phi(X_s^x)\sigma(X_s^x))dW_s \quad \square$$

Alors on obtient

$$|(\lambda(0) - \lambda(\mu)) + \mu\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right]| \leqslant 2M_f.$$

Ainsi, le résultat d'existence est établi si et seulement si $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] < 0$.

Comportement de K : Exemples

- Si σ est inversible, $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] < 0$.
- $G = B(0,1)$, $\phi(x) = \frac{1-|x|^2}{2}$, $b(x) = -x$ et $\sigma(x) = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_d \end{pmatrix}$. On a $\nu = \delta_0$, donc $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] = 0$.
- $G = B(0,1)$, $\phi(x) = \frac{1-|x|^2}{2}$, $b(x) = -x$ et $\sigma(x) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0_{d-k} \end{pmatrix}$. On a $\nu = \nu_k \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^{d-k}}}$ et $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] < 0$.

Résultat

Theorem

On suppose

- *G borné convexe et régulier,*
- $\eta + K_{f,z}K_\sigma < 0$,
- $g \in \mathcal{C}^2_{lip}(\overline{G})$,
- *f borné et* $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] < 0$,

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe $\mu \in \mathbb{R}$, $v \in \mathcal{C}^0_{lip}(\overline{G})$ et ζ une fonction mesurable tels que $(v(X), \zeta(X), \mu)$ soit une solution de l'EDSRE définit précédemment. De plus on a

$$|(\lambda(0) - \lambda(\mu)) + \mu\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right]| \leqslant 2M_f.$$

Problème : l'unicité de μ.

f non borné

Problème : dans les problèmes de contrôle considérés, *f* n'est pas borné...
On arrive à régler le problème dans des cas particuliers (processus de Kolmogorov) et on obtient en plus l'unicité de μ.
Par contre la condition $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] < 0$ devient plus compliquée.

Bibliographie

- M. Fuhrman, Y. Hu and G. Tessitore. Ergodic BSDEs and optimal ergodic control in Banach spaces. arXiv :0707.4214v1.
- G. Barles and F. Da Lio. On the boundary ergodic problem for fully nonlinear equations in bounded domains with general nonlinear Neumann boundary conditions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*. 22(5) :521-541, 2005.
- A. Richou. Ergodic BSDEs and related PDEs with Neumann boundary conditions. arXiv :0807.1521v1.