Unicité des solutions d'EDSRs quadratiques dont le générateur est convexe et la condition terminale est non bornée

Freddy Delbaen, Ying Hu, Adrien Richou

IRMAR, Université Rennes 1

Journées de probabilités 2009

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien de dimension d, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sa filtration naturelle augmentée, T un réel positif, ξ une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable, $g : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1\times d} \to \mathbb{R}$.

$$Y_t = \xi - \int_t^T g(r, Y_r, Z_r)dr + \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (1.1)$$

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien de dimension d, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sa filtration naturelle augmentée, T un réel positif, ξ une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable, $g : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1\times d} \to \mathbb{R}$.

$$Y_t = \xi - \int_t^T g(r, Y_r, Z_r)dr + \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (1.1)$$

Définition

Une solution de (1.1) est un couple de processus $(Y_t, Z_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ vérifiant :

1. *(Y, Z) est progressivement mesurable à valeur dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1\times d}$,*
2. *$\mathbb{P} - p.s.\ t \mapsto Y_t$ continue et $\int_0^T |g(r, Y_r, Z_r)| + \|Z_r\|^2 dr < \infty$*
3. *(Y, Z) vérifie (1.1).*

Exemple explicatif

On prend $g = 0$.

1. Un candidat naturel pour Y est $Y_t := \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t]$.
2. Le théorème de représentation martingale nous donne $Y_t = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_s dW_s$.
3. Un calcul simple donne

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s.$$

Résultats d'existence et d'unicité connus

- Existence et Unicité pour des EDSRs Lipschitz en y et z : E. Pardoux et S. Peng (1990).

Résultats d'existence et d'unicité connus

- Existence et Unicité pour des EDSRs Lipschitz en y et z : E. Pardoux et S. Peng (1990).
- Nombreux travaux pour réduire les hypothèses sur g mais avec une croissance au plus linéaire en z.

Résultats d'existence et d'unicité connus

- Existence et Unicité pour des EDSRs Lipschitz en y et z : E. Pardoux et S. Peng (1990).
- Nombreux travaux pour réduire les hypothèses sur g mais avec une croissance au plus linéaire en z.
- Existence et Unicité pour des EDSRs quadratiques en z avec ξ borné : M. Kobylanski (2000), J.-P. Lepeltier et J. San Martín (1998).

Résultats d'existence et d'unicité connus

- Existence et Unicité pour des EDSRs Lipschitz en y et z : E. Pardoux et S. Peng (1990).
- Nombreux travaux pour réduire les hypothèses sur g mais avec une croissance au plus linéaire en z.
- Existence et Unicité pour des EDSRs quadratiques en z avec ξ borné : M. Kobylanski (2000), J.-P. Lepeltier et J. San Martín (1998).
- Existence pour des EDSRs quadratiques en z avec ξ non borné : P. Briand et Y. Hu (2006).

Résultats d'existence et d'unicité connus

- Existence et Unicité pour des EDSRs Lipschitz en y et z : E. Pardoux et S. Peng (1990).
- Nombreux travaux pour réduire les hypothèses sur g mais avec une croissance au plus linéaire en z.
- Existence et Unicité pour des EDSRs quadratiques en z avec ξ borné : M. Kobylanski (2000), J.-P. Lepeltier et J. San Martín (1998).
- Existence pour des EDSRs quadratiques en z avec ξ non borné : P. Briand et Y. Hu (2006).
- Unicité pour des EDSRs quadratiques et convexes en z avec ξ non borné : P. Briand et Y. Hu (2008).

Cadre

hypothèses : il existe trois constantes $\bar{\beta} \geqslant 0$, $\bar{\gamma} > 0$ et $r \geqslant 0$ ainsi que deux processus progressivement mesurables positifs $(\bar{\alpha}_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ et $(\underline{\alpha}_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ tels que, $\mathbb{P}$-p.s.,

1. $z \mapsto g(t, y, z)$ est une fonction convexe $\forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$;
2. $\forall (t, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{1 \times d}$,
$$\left| g(t, y, z) - g(t, y', z) \right| \leqslant \bar{\beta} \left| y - y' \right|, \quad \forall (y, y') \in \mathbb{R}^2;$$
3. condition de croissance : $\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1 \times d}$,
$$-\underline{\alpha}_t - r(|y| + |z|) \leqslant g(t, y, z) \leqslant \bar{\alpha}_t + \bar{\beta} |y| + \frac{\bar{\gamma}}{2} |z|^2 .$$

Résultat d'unicité

Theorem

S'il existe $p > 1$ tel que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma e^{\beta T}\xi^{-} + \gamma\int_0^T \bar{\alpha}_t e^{\beta t}dt\right) + (\xi^{+})^p + \left(\int_0^T \underline{\alpha}_t dt\right)^p\right] < +\infty$$

alors l'EDSR (1.1) possède une solution (Y, Z).

Transformation de Legendre-Fenchel

Comme $g(t, y, .)$ est une fonction convexe, nous pouvons définir sa transformation de Legendre-Fenchel :

$$f(t, y, q) = \sup_z (zq - g(t, y, z)), \quad \forall t \in [0, T], q \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}.$$

f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Proposition

- $\forall (t, y, y', q) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *tels que* $f(t, y, q) < +\infty$,

$$f(t, y', q) < +\infty \ \textit{et} \ \left|f(t, y, z) - f(t, y', z)\right| \leqslant \bar{\beta}\left|y - y'\right|.$$

- *f est une fonction convexe en q,*
- $f(t, y, q) \geqslant -\bar{\alpha}_t - \bar{\beta}|y| + \frac{1}{2\bar{\gamma}}|q|^2.$

Idée de la preuve de l'unicité

On suppose g indépendant de y :

$$Y_t = \xi - \int_t^T g(s, Z_s)ds + \int_t^T Z_s dW_s.$$

On a $g(s, Z_s) = \sup_{q_s}(Z_s q_s - f(s, q_s)) = Z_s q_s^* - f(s, q_s^*)$.

Idée de la preuve de l'unicité

On suppose g indépendant de y :

$$Y_t = \xi - \int_t^T g(s, Z_s) ds + \int_t^T Z_s dW_s.$$

On a $g(s, Z_s) = \sup_{q_s}(Z_s q_s - f(s, q_s)) = Z_s q_s^* - f(s, q_s^*)$.

$$\begin{aligned} Y_t &= \xi + \int_t^T f(s, q_s^*) ds + \int_t^T Z_s(dW_s - q_s^* ds) &(2.1)\\ &\leqslant \xi + \int_t^T f(s, q_s) ds + \int_t^T Z_s(dW_s - q_s ds). &(2.2)\end{aligned}$$

Idée de la preuve de l'unicité

On suppose g indépendant de y :

$$Y_t = \xi - \int_t^T g(s, Z_s)ds + \int_t^T Z_s dW_s.$$

On a $g(s, Z_s) = \sup_{q_s}(Z_s q_s - f(s, q_s)) = Z_s q_s^* - f(s, q_s^*)$.

$$\begin{aligned} Y_t &= \xi + \int_t^T f(s, q_s^*)ds + \int_t^T Z_s(dW_s - q_s^* ds) && (2.1) \\ &\leqslant \xi + \int_t^T f(s, q_s)ds + \int_t^T Z_s(dW_s - q_s ds). && (2.2) \end{aligned}$$

Finalement,

$$Y_t = \operatorname*{ess\,inf}_{q \in \mathcal{A}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\xi + \int_t^T f(s, q_s)ds \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Questions

- Peut-on appliquer Girsanov ?
- Quel ensemble de contrôle $\mathcal{A}$ choisir ?
- Que devient ce problème de contrôle lorsque f dépend de y ?

Construction du problème de contrôle (1/4)

Prenons

$$\mathcal{A} := \Bigg\{ (q_s)_{s\in[0,T]}, \quad \int_0^T |q_s|^2\, ds < +\infty \quad \mathbb{P}-p.s., \\
(M_t)_{t\in[0,T]} \text{ est une martingale}, \\
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[|\xi| + \int_0^T |f(s,0,q_s)|\, ds \right] < +\infty, \\
\text{avec } M_t := \exp\left(\int_0^t q_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |q_s|^2\, ds \right) \text{ et } \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} := M_T \Bigg\}.$$

Construction du problème de contrôle (1/4)

Prenons

$$\mathcal{A} := \left\{ (q_s)_{s\in[0,T]}, \quad \int_0^T |q_s|^2\, ds < +\infty \ \ \mathbb{P}-p.s., \right.$$
$$(M_t)_{t\in[0,T]} \text{ est une martingale},$$
$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[|\xi| + \int_0^T |f(s,0,q_s)|\, ds \right] < +\infty,$$
$$\left. \text{avec } M_t := \exp\left(\int_0^t q_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |q_s|^2\, ds \right) \text{ et } \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} := M_T \right\}.$$

Il existe une solution à l'EDSR

$$Y_t^q = \xi + \int_t^T f(s, Y_s^q, q_s) ds + \int_t^T Z_s^q dW_s^q, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

avec $dW_t^q := dW_t - q_t dt$.

Construction du problème de contrôle (2/4)

Il convient de montrer que $q^* \in \mathcal{A}$. Pour T suffisamment petit et en supposant l'existence de certains moments exponentiels pour $\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} A_t$ et $\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} Y_t^+$ nous montrons que M_T^* est une martingale.
Pour T quelconque on découpe $[0, T]$ en sous intervalles. Ainsi, pour N suffisamment grand on pose $t_i := \frac{iT}{N}$ avec $i \in \{0, ..., N\}$.

Construction du problème de contrôle (3/4)

$$\mathcal{A}_{t_i,t_{i+1}}(\eta) := \Bigg\{ (q_s)_{s\in[t_i,t_{i+1}]}, \quad \int_{t_i}^{t_{i+1}} |q_s|^2\, ds < +\infty \ \ \mathbb{P}-a.s.,$$

$$(M_t^i)_{t\in[t_i,t_{i+1}]} \text{ est une martingale}, \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^i}\left[|\eta| + \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(s,0,q_s)|\, ds\right] < +\infty,$$

$$\text{avec } M_t^i := \exp\left(\int_{t_i}^{t} q_s dW_s - \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t} |q_s|^2\, ds\right) \text{ et } \frac{d\mathbb{Q}^i}{d\mathbb{P}} := M_{t_{i+1}}^i \Bigg\}.$$

Il existe une solution à l'EDSR

$$Y_t^{\eta,q} = \eta + \int_t^{t_{i+1}} f(s, Y_s^{\eta,q}, q_s)ds + \int_t^{t_{i+1}} Z_s^{\eta,q} dW_s^q, \quad t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}.$$

Construction du problème de contrôle (4/4)

$$\mathcal{A} := \Big\{ (q_s)_{s\in[0,T]}, \quad q_{|[t_{N-1},T]} \in \mathcal{A}_{t_{N-1},T}(\xi),$$
$$\forall i \in \{N-2,\ldots,0\}, q_{|[t_i,t_{i+1}]} \in \mathcal{A}_{t_i,t_{i+1}}\left(Y^q_{t_{i+1}}\right)$$
$$\text{avec } Y^q_{t_{i+1}} := Y^{Y^q_{t_{i+2}}, q_{|[t_{i+1},t_{i+2}]}}_{t_{i+1}} \text{ et } Y^q_T := \xi \Big\}.$$

On définit notre fonctionnelle de coût par

$$\forall i \in \{N-1,\ldots,0\}, \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \quad Y^q_t := Y_t^{Y^q_{t_{i+1}}, q_{|[t_i,t_{i+1}]}}.$$

Résultat

Theorem

Supposons qu'il existe une solution (Y, Z) *de l'EDSR (1.1) telle que* $\exists p > \bar{\gamma}, \exists \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(p \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} A_t\right) + \exp\left(\varepsilon \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} Y_t^+\right)\right] < +\infty,$$

avec $A_t := Y_t^- + \int_0^t \bar{\alpha}_s ds$. *Alors on a* $Y = \text{ess inf}_{q \in \mathcal{A}} Y^q$, *et il existe* $q^* \in \mathcal{A}$ *tel que* $Y = Y^{q^*}$. *De plus, cela implique que la solution* (Y, Z) *est unique parmi les solutions vérifiant une telle condition.*

Remarques :

1. Pour obtenir l'existence d'une solution (Y, Z) vérifiant de telles hypothèses il suffit que $\xi^- + \int_0^T \bar{\alpha}_t dt$ ait un moment exponentiel d'ordre $qe^{\bar{\beta}}$ avec $q > \bar{\gamma}$ et $\xi^+ + \int_0^T \underline{\alpha}_t dt$ ait un moment exponentiel d'ordre ε.
2. lorsque g est indépendant de z, il n'y a pas besoin de subdiviser $[0, T]$. Nous avons

$$Y_t = \operatorname*{ess\,inf}_{q \in \mathcal{A}_{0,T}(\xi)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\xi + \int_t^T f(s, q_s) ds \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad \forall t \in [0, T].$$

Lien avec les EDPs

On considère l'EDP semi-linéaire suivante

$$\partial_t u(t,x) + \mathcal{L}u(t,x) - g(t,x,u(t,x),-\sigma^*\nabla_x u(t,x)) = 0, \quad u(T,.) = h, \tag{3.1}$$

avec $\mathcal{L}$ le generateur infinitésimal de la diffusion

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})dr + \int_t^s \sigma(r)dW_r, \quad t \leqslant s \leqslant T, \text{ et } X_s^{t,x} = x, \quad s \leqslant t, \tag{3.2}$$

et l'EDSR

$$Y_t^{t,x} = h(X_T^{t,x}) - \int_t^T g(s, X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})ds - \int_t^T Z_s^{t,x} dW_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.3}$$

Lien avec les EDPs

On considère l'EDP semi-linéaire suivante

$$\partial_t u(t,x) + \mathcal{L}u(t,x) - g(t,x,u(t,x), -\sigma^* \nabla_x u(t,x)) = 0, \quad u(T,.) = h, \tag{3.1}$$

avec $\mathcal{L}$ le generateur infinitésimal de la diffusion

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x}) dr + \int_t^s \sigma(r) dW_r, \quad t \leqslant s \leqslant T, \text{ et } X_s^{t,x} = x, \quad s \leqslant t, \tag{3.2}$$

et l'EDSR

$$Y_t^{t,x} = h(X_T^{t,x}) - \int_t^T g(s, X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}) ds - \int_t^T Z_s^{t,x} dW_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.3}$$

La formule de Feynman-Kac non linéaire consiste à prouver que la fonction définie par la formule

$$\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d, \quad u(t,x) := Y_t^{t,x} \tag{3.4}$$

est solution de viscosité de l'EDP (3.1).

Moments exponentiels

On suppose σ continue et b K-Lipschitz en x. On a

Lemma

$$\forall \lambda \in \left[0, \frac{1}{2e^{2KT}\left\|\sigma\right\|_\infty^2 T}\right[, \exists C \geqslant 0, \quad \mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T} e^{\lambda\left|X_t^{t_0,x_0}\right|^2}\right] \leqslant Ce^{C|x_0|^2}.$$

Hypothèses

On suppose que $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sont continues et qu'il existe cinq constantes $r \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 0$ et $\alpha' \geqslant 0$ telles que :

1. $|g(t,x,y,z) - g(t,x,y',z)| \leqslant \beta\,|y - y'|$;
2. $z \mapsto g(t,x,y,z)$ est convexe sur $\mathbb{R}^{1\times d}$;
3. $-r(1 + |x|^2 + |y| + |z|) \leqslant g(t,x,y,z) \leqslant r + \alpha\,|x|^2 + \beta\,|y| + \frac{\gamma}{2}\,|z|^2$,
$$-r - \alpha'\,|x|^2 \leqslant h(x) \leqslant r(1 + |x|^2);$$
4. $|g(t,x,y,z) - g(t,x',y,z)| \leqslant r(1 + |x| + |x'|)\,|x - x'|$,
$$|h(x) - h(x')| \leqslant r(1 + |x| + |x'|)\,|x - x'|\,;$$
5. $$\alpha' + T\alpha < \frac{1}{2\gamma e^{3\beta T}\,\|\sigma\|_\infty^2\,T}.$$

Résultat

Proposition

La fonction u définie par (3.4) est continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ *et satisfait*

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d, \quad |u(t, x)| \leqslant C(1 + |x|^2).$$

De plus, u est une solution de viscosité de l'EDP (3.1).

Bibliographie

- Magdalena Kobylanski.
  Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth.
  Ann. Probab., 28(2) :558–602, 2000.

- Philippe Briand and Ying Hu.
  BSDE with quadratic growth and unbounded terminal value.
  Probab. Theory Related Fields, 136(4) :604–618, 2006.

- Philippe Briand and Ying Hu.
  Quadratic BSDEs with convex generators and unbounded terminal conditions.
  Probab. Theory Related Fields, 141(3-4) :543–567, 2008.

- Ph. Briand, B. Delyon, Y. Hu, E. Pardoux, and L. Stoica.
  L^p solutions of backward stochastic differential equations.
  Stochastic Process. Appl., 108(1) :109–129, 2003.