

Unicité des solutions d'EDSRs quadratiques dont le générateur est convexe et la condition terminale est non bornée

Freddy Delbaen, Ying Hu, Adrien Richou

IRMAR, Université Rennes 1

Journées de probabilités 2009

- 1 Rappels sur les EDSRs
 - Qu'est ce qu'une EDSR ?
 - Ce que l'on sait sur les EDSRs à croissance quadratique
- 2 Résultat d'unicité
 - Cadre et outils
 - Idée de la preuve
 - Construction du problème de contrôle
- 3 Lien avec les EDPs

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien de dimension d , $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ sa filtration naturelle augmentée, T un réel positif, ξ une variable \mathcal{F}_T -mesurable, $g : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1 \times d} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$Y_t = \xi - \int_t^T g(r, Y_r, Z_r) dr + \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.1)$$

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien de dimension d , $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ sa filtration naturelle augmentée, T un réel positif, ξ une variable \mathcal{F}_T -mesurable, $g : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1 \times d} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$Y_t = \xi - \int_t^T g(r, Y_r, Z_r) dr + \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.1)$$

Définition

Une solution de (1.1) est un couple de processus $(Y_t, Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ vérifiant :

- 1 (Y, Z) est progressivement mesurable à valeur dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1 \times d}$,
- 2 \mathbb{P} - p.s. $t \mapsto Y_t$ continue et $\int_0^T |g(r, Y_r, Z_r)| + \|Z_r\|^2 dr < \infty$
- 3 (Y, Z) vérifie (1.1).

Exemple explicatif

On prend $g = 0$.

- 1 Un candidat naturel pour Y est $Y_t := \mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_t]$.
- 2 Le théorème de représentation martingale nous donne
 $Y_t = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_s dW_s$.
- 3 Un calcul simple donne

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s.$$

Résultats d'existence et d'unicité connus

- Existence et Unicité pour des EDSRs Lipschitz en y et z :
E. Pardoux et S. Peng (1990).

Résultats d'existence et d'unicité connus

- Existence et Unicité pour des EDSRs Lipschitz en y et z :
E. Pardoux et S. Peng (1990).
- Nombreux travaux pour réduire les hypothèses sur g mais
avec une croissance au plus linéaire en z .

Résultats d'existence et d'unicité connus

- Existence et Unicité pour des EDSRs Lipschitz en y et z : E. Pardoux et S. Peng (1990).
- Nombreux travaux pour réduire les hypothèses sur g mais avec une croissance au plus linéaire en z .
- Existence et Unicité pour des EDSRs quadratiques en z avec ξ borné : M. Kobylanski (2000), J.-P. Lepeltier et J. San Martín (1998).

Résultats d'existence et d'unicité connus

- Existence et Unicité pour des EDSRs Lipschitz en y et z : E. Pardoux et S. Peng (1990).
- Nombreux travaux pour réduire les hypothèses sur g mais avec une croissance au plus linéaire en z .
- Existence et Unicité pour des EDSRs quadratiques en z avec ξ borné : M. Kobylanski (2000), J.-P. Lepeltier et J. San Martín (1998).
- Existence pour des EDSRs quadratiques en z avec ξ non borné : P. Briand et Y. Hu (2006).

Résultats d'existence et d'unicité connus

- Existence et Unicité pour des EDSRs Lipschitz en y et z : E. Pardoux et S. Peng (1990).
- Nombreux travaux pour réduire les hypothèses sur g mais avec une croissance au plus linéaire en z .
- Existence et Unicité pour des EDSRs quadratiques en z avec ξ borné : M. Kobylanski (2000), J.-P. Lepeltier et J. San Martín (1998).
- Existence pour des EDSRs quadratiques en z avec ξ non borné : P. Briand et Y. Hu (2006).
- Unicité pour des EDSRs quadratiques et convexes en z avec ξ non borné : P. Briand et Y. Hu (2008).

Cadre

hypothèses : il existe trois constantes $\bar{\beta} \geq 0$, $\bar{\gamma} > 0$ et $r \geq 0$ ainsi que deux processus progressivement mesurables positifs $(\bar{\alpha}_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(\underline{\alpha}_t)_{0 \leq t \leq T}$ tels que, \mathbb{P} -p.s.,

- 1 $z \mapsto g(t, y, z)$ est une fonction convexe $\forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$;
- 2 $\forall (t, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{1 \times d}$,

$$|g(t, y, z) - g(t, y', z)| \leq \bar{\beta} |y - y'|, \quad \forall (y, y') \in \mathbb{R}^2;$$

- 3 condition de croissance : $\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1 \times d}$,

$$-\underline{\alpha}_t - r(|y| + |z|) \leq g(t, y, z) \leq \bar{\alpha}_t + \bar{\beta} |y| + \frac{\bar{\gamma}}{2} |z|^2.$$

Résultat d'unicité

Theorem

S'il existe $p > 1$ tel que

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\gamma e^{\beta T} \xi^- + \gamma \int_0^T \bar{\alpha}_t e^{\beta t} dt \right) + (\xi^+)^p + \left(\int_0^T \underline{\alpha}_t dt \right)^p \right] < +\infty$$

alors l'EDSR (1.1) possède une solution (Y, Z) .

Transformation de Legendre-Fenchel

Comme $g(t, y, \cdot)$ est une fonction convexe, nous pouvons définir sa transformation de Legendre-Fenchel :

$$f(t, y, q) = \sup_z (zq - g(t, y, z)), \quad \forall t \in [0, T], q \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}.$$

f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Proposition

- $\forall (t, y, y', q) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ tels que $f(t, y, q) < +\infty$,
 $f(t, y', q) < +\infty$ et $|f(t, y, z) - f(t, y', z)| \leq \bar{\beta} |y - y'|$.
- f est une fonction convexe en q ,
- $f(t, y, q) \geq -\bar{\alpha}_t - \bar{\beta} |y| + \frac{1}{2\bar{\gamma}} |q|^2$.

Idée de la preuve de l'unicité

On suppose g indépendant de y :

$$Y_t = \xi - \int_t^T g(s, Z_s) ds + \int_t^T Z_s dW_s.$$

On a $g(s, Z_s) = \sup_{q_s} (Z_s q_s - f(s, q_s)) = Z_s q_s^* - f(s, q_s^*)$.

Idée de la preuve de l'unicité

On suppose g indépendant de y :

$$Y_t = \xi - \int_t^T g(s, Z_s) ds + \int_t^T Z_s dW_s.$$

On a $g(s, Z_s) = \sup_{q_s} (Z_s q_s - f(s, q_s)) = Z_s q_s^* - f(s, q_s^*)$.

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, q_s^*) ds + \int_t^T Z_s (dW_s - q_s^* ds) \quad (2.1)$$

$$\leq \xi + \int_t^T f(s, q_s) ds + \int_t^T Z_s (dW_s - q_s ds). \quad (2.2)$$

Idée de la preuve de l'unicité

On suppose g indépendant de y :

$$Y_t = \xi - \int_t^T g(s, Z_s) ds + \int_t^T Z_s dW_s.$$

On a $g(s, Z_s) = \sup_{q_s} (Z_s q_s - f(s, q_s)) = Z_s q_s^* - f(s, q_s^*)$.

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, q_s^*) ds + \int_t^T Z_s (dW_s - q_s^* ds) \quad (2.1)$$

$$\leq \xi + \int_t^T f(s, q_s) ds + \int_t^T Z_s (dW_s - q_s ds). \quad (2.2)$$

Finalement,

$$Y_t = \operatorname{ess\,inf}_{q \in \mathcal{A}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\xi + \int_t^T f(s, q_s) ds \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Questions

- Peut-on appliquer Girsanov ?
- Quel ensemble de contrôle \mathcal{A} choisir ?
- Que devient ce problème de contrôle lorsque f dépend de y ?

Construction du problème de contrôle (1/4)

Prenons

$$\mathcal{A} := \left\{ (q_s)_{s \in [0, T]}, \quad \int_0^T |q_s|^2 ds < +\infty \text{ } \mathbb{P} - p.s., \right.$$

$(M_t)_{t \in [0, T]}$ est une martingale,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[|\xi| + \int_0^T |f(s, 0, q_s)| ds \right] < +\infty,$$

avec $M_t := \exp \left(\int_0^t q_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |q_s|^2 ds \right)$ et $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} := M_T \}$.

Construction du problème de contrôle (1/4)

Prenons

$$\mathcal{A} := \left\{ (q_s)_{s \in [0, T]}, \quad \int_0^T |q_s|^2 ds < +\infty \quad \mathbb{P} - p.s., \right.$$

$(M_t)_{t \in [0, T]}$ est une martingale,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[|\xi| + \int_0^T |f(s, 0, q_s)| ds \right] < +\infty,$$

$$\text{avec } M_t := \exp \left(\int_0^t q_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |q_s|^2 ds \right) \text{ et } \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} := M_T \left. \right\}.$$

Il existe une solution à l'EDSR

$$Y_t^q = \xi + \int_t^T f(s, Y_s^q, q_s) ds + \int_t^T Z_s^q dW_s^q, \quad 0 \leq t \leq T.$$

avec $dW_t^q := dW_t - q_t dt$.

Construction du problème de contrôle (2/4)

Il convient de montrer que $q^* \in \mathcal{A}$. Pour T suffisamment petit et en supposant l'existence de certains moments exponentiels pour $\sup_{0 \leq t \leq T} A_t$ et $\sup_{0 \leq t \leq T} Y_t^+$ nous montrons que M_T^* est une martingale.

Pour T quelconque on découpe $[0, T]$ en sous intervalles. Ainsi, pour N suffisamment grand on pose $t_i := \frac{iT}{N}$ avec $i \in \{0, \dots, N\}$.

Construction du problème de contrôle (3/4)

$$\mathcal{A}_{t_i, t_{i+1}}(\eta) := \left\{ (q_s)_{s \in [t_i, t_{i+1}]}, \int_{t_i}^{t_{i+1}} |q_s|^2 ds < +\infty \text{ } \mathbb{P} - a.s., \right.$$

$$(M_t^i)_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \text{ est une martingale, } \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^i} \left[|\eta| + \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(s, 0, q_s)| ds \right] < +\infty,$$

$$\left. \text{avec } M_t^i := \exp \left(\int_{t_i}^t q_s dW_s - \frac{1}{2} \int_{t_i}^t |q_s|^2 ds \right) \text{ et } \frac{d\mathbb{Q}^i}{d\mathbb{P}} := M_{t_{i+1}}^i \right\}.$$

Il existe une solution à l'EDSR

$$Y_t^{\eta, q} = \eta + \int_t^{t_{i+1}} f(s, Y_s^{\eta, q}, q_s) ds + \int_t^{t_{i+1}} Z_s^{\eta, q} dW_s^q, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}.$$

Construction du problème de contrôle (4/4)

$$\mathcal{A} := \left\{ (q_s)_{s \in [0, T]}, \quad q_{|[t_{N-1}, T]} \in \mathcal{A}_{t_{N-1}, T}(\xi), \right. \\
 \forall i \in \{N-2, \dots, 0\}, \quad q_{|[t_i, t_{i+1}]} \in \mathcal{A}_{t_i, t_{i+1}} \left(Y_{t_{i+1}}^q \right) \\
 \left. \text{avec } Y_{t_{i+1}}^q := Y_{t_{i+1}}^{Y_{t_{i+2}}^q, q_{|[t_{i+1}, t_{i+2}]}} \text{ et } Y_T^q := \xi \right\}.$$

On définit notre fonctionnelle de coût par

$$\forall i \in \{N-1, \dots, 0\}, \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \quad Y_t^q := Y_t^{Y_{t_{i+1}}^q, q_{|[t_i, t_{i+1}]}}.$$

Résultat

Theorem

Supposons qu'il existe une solution (Y, Z) de l'EDSR (1.1) telle que $\exists p > \bar{\gamma}, \exists \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(p \sup_{0 \leq t \leq T} A_t \right) + \exp \left(\varepsilon \sup_{0 \leq t \leq T} Y_t^+ \right) \right] < +\infty,$$

avec $A_t := Y_t^- + \int_0^t \bar{\alpha}_s ds$. Alors on a $Y = \text{ess inf}_{q \in \mathcal{A}} Y^q$, et il existe $q^* \in \mathcal{A}$ tel que $Y = Y^{q^*}$. De plus, cela implique que la solution (Y, Z) est unique parmi les solutions vérifiant une telle condition.

Remarques :

- 1 Pour obtenir l'existence d'une solution (Y, Z) vérifiant de telles hypothèses il suffit que $\xi^- + \int_0^T \bar{\alpha}_t dt$ ait un moment exponentiel d'ordre $qe^{\bar{\beta}}$ avec $q > \bar{\gamma}$ et $\xi^+ + \int_0^T \underline{\alpha}_t dt$ ait un moment exponentiel d'ordre ε .
- 2 lorsque g est indépendant de z , il n'y a pas besoin de subdiviser $[0, T]$. Nous avons

$$Y_t = \operatorname{ess\,inf}_{q \in \mathcal{A}_{0,T}(\xi)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\xi + \int_t^T f(s, q_s) ds \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad \forall t \in [0, T].$$

Lien avec les EDPs

On considère l'EDP semi-linéaire suivante

$$\partial_t u(t, x) + \mathcal{L}u(t, x) - g(t, x, u(t, x), -\sigma^* \nabla_x u(t, x)) = 0, \quad u(T, \cdot) = h, \quad (3.1)$$

avec \mathcal{L} le generateur infinitésimal de la diffusion

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x}) dr + \int_t^s \sigma(r) dW_r, \quad t \leq s \leq T, \text{ et } X_s^{t,x} = x, \quad s \leq t, \quad (3.2)$$

et l'EDSR

$$Y_t^{t,x} = h(X_T^{t,x}) - \int_t^T g(s, X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}) ds - \int_t^T Z_s^{t,x} dW_s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.3)$$

Lien avec les EDPs

On considère l'EDP semi-linéaire suivante

$$\partial_t u(t, x) + \mathcal{L}u(t, x) - g(t, x, u(t, x), -\sigma^* \nabla_x u(t, x)) = 0, \quad u(T, \cdot) = h, \quad (3.1)$$

avec \mathcal{L} le generateur infinitésimal de la diffusion

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x}) dr + \int_t^s \sigma(r) dW_r, \quad t \leq s \leq T, \text{ et } X_s^{t,x} = x, \quad s \leq t, \quad (3.2)$$

et l'EDSR

$$Y_t^{t,x} = h(X_T^{t,x}) - \int_t^T g(s, X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}) ds - \int_t^T Z_s^{t,x} dW_s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.3)$$

La formule de Feynman-Kac non linéaire consiste à prouver que la fonction définie par la formule

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d, \quad u(t, x) := Y_t^{t,x} \quad (3.4)$$

est solution de viscosité de l'EDP (3.1).

Moments exponentiels

On suppose σ continue et b K -Lipschitz en x . On a

Lemma

$$\forall \lambda \in \left[0, \frac{1}{2e^{2KT} \|\sigma\|_\infty^2 T} \right], \exists C \geq 0, \quad \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\lambda |X_t^{t_0, x_0}|^2} \right] \leq C e^{C|x_0|^2}.$$

Hypothèses

On suppose que $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues et qu'il existe cinq constantes $r \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\alpha \geq 0$ et $\alpha' \geq 0$ telles que :

- 1 $|g(t, x, y, z) - g(t, x, y', z)| \leq \beta |y - y'|$;
- 2 $z \mapsto g(t, x, y, z)$ est convexe sur $\mathbb{R}^{1 \times d}$;
- 3 $-r(1 + |x|^2 + |y| + |z|) \leq g(t, x, y, z) \leq r + \alpha |x|^2 + \beta |y| + \frac{\gamma}{2} |z|^2$,
 $-r - \alpha' |x|^2 \leq h(x) \leq r(1 + |x|^2)$;
- 4 $|g(t, x, y, z) - g(t, x', y, z)| \leq r(1 + |x| + |x'|) |x - x'|$,
 $|h(x) - h(x')| \leq r(1 + |x| + |x'|) |x - x'|$;

5

$$\alpha' + T\alpha < \frac{1}{2\gamma e^{3\beta T} \|\sigma\|_\infty^2 T}.$$

Résultat





Proposition

La fonction u définie par (3.4) est continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ et satisfait

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d, \quad |u(t, x)| \leq C(1 + |x|^2).$$

De plus, u est une solution de viscosité de l'EDP (3.1).

Bibliographie

-  Magdalena Kobylanski.
Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth.
Ann. Probab., 28(2) :558–602, 2000.
-  Philippe Briand and Ying Hu.
BSDE with quadratic growth and unbounded terminal value.
Probab. Theory Related Fields, 136(4) :604–618, 2006.
-  Philippe Briand and Ying Hu.
Quadratic BSDEs with convex generators and unbounded terminal conditions.
Probab. Theory Related Fields, 141(3-4) :543–567, 2008.
-  Ph. Briand, B. Delyon, Y. Hu, E. Pardoux, and L. Stoica.
 L^p solutions of backward stochastic differential equations.
Stochastic Process. Appl., 108(1) :109–129, 2003.