Projet de recherche

Anne-Edgar Wilke

1 Introduction

Mon domaine de recherche est l'énumération de corps de nombres par discriminant. Soit n un entier supérieur à 2 et notons $\mathscr{C}_n$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de corps de nombres de degré n. Pour tout réel positif X, notons $\mathscr{C}_n(\mathrm{X})$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{C}_n$ de discriminant majoré par X en valeur absolue, et $\mathrm{N}_n(\mathrm{X})$ son cardinal. D'un point de vue théorique, on s'intéresse au comportement asymptotique de $\mathrm{N}_n(\mathrm{X})$ lorsque $\mathrm{X} \to \infty$; d'un point de vue pratique, on cherche des algorithmes efficaces pour décrire tous les éléments de $\mathscr{C}_n(\mathrm{X})$.

Ces deux problèmes sont faciles lorsque $n = 2$, c'est-à-dire dans le cas des corps quadratiques. En effet, on dispose d'une classification très simple des corps quadratiques : ce sont les $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ pour $d \neq 1$ entier sans facteur carré. De plus, le discriminant de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est égal à d si d est congru à 1 modulo 4 et à $4d$ sinon. Cela permet de démontrer que $\mathrm{N}_2(\mathrm{X}) \sim \frac{1}{\zeta(2)}\mathrm{X}$, et d'énumérer $\mathscr{C}_2(\mathrm{X})$ en temps optimal $\mathrm{O}(\mathrm{X}^{1+\varepsilon})$.

Une conjecture classique prédit que pour tout $n \geq 2$, il existe une constante $c_n > 0$ telle que $\mathrm{N}_n(\mathrm{X}) \sim c_n\mathrm{X}$. Cette conjecture reste ouverte pour $n \geq 6$. Ellenberg et Venkatesh [16] ont démontré que $\mathrm{N}_n(\mathrm{X}) \gg \mathrm{X}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2}}$, et la meilleure majoration connue en degré quelconque, due à Lemke Oliver et Thorne [23], est de la forme $\mathrm{N}_n(\mathrm{X}) \ll \mathrm{X}^{\mathrm{O}(\log^2 n)}$.

D'un point de vue algorithmique, il est naturel de conjecturer l'existence d'une méthode d'énumération de $\mathscr{C}_n(\mathrm{X})$ comportant $\mathrm{O}(\mathrm{X}^{1+\varepsilon})$ opérations élémentaires, ce qui correspondrait à la taille attendue de la sortie et serait donc optimal. Le meilleur algorithme dont on dispose en général est celui de Hunter-Pohst-Martinet [20, 26, 24], qui s'exécute en temps $\mathrm{O}\left(\mathrm{X}^{\frac{n+2}{4}+\varepsilon}\right)$.

Les questions décrites ci-dessus sont résolues de façon satisfaisante pour $n = 3$, et des progrès importants ont été accomplis pour $n = 4$ et $n = 5$. Je commencerai par décrire le cas des corps cubiques, qui est classique, puis je montrerai comment les différents éléments se généralisent aux corps quartiques et quintiques. Ce sera l'occasion de décrire les travaux que j'ai réalisés durant ma thèse. Enfin, j'indiquerai les directions dans lesquelles ceux-ci pourraient se poursuivre.

2 Corps cubiques

L'énumération des corps cubiques par discriminant est aujourd'hui un sujet bien compris. Tout repose sur une bijection remarquable, découverte par Delone et Faddeev [14], entre l'ensemble $\mathscr{C}_3$ des classes d'isomorphisme de corps cubiques et certaines classes de formes cubiques binaires.

Plus précisément, soit $V_{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des formes cubiques binaires à coefficients entiers. Le groupe $G_{\mathbb{Z}} = GL_2(\mathbb{Z})$ agit sur $V_{\mathbb{Z}}$ par changement de variables. L'irréductibilité et le discriminant d'une forme cubique ne dépendent que de sa classe pour cette action, et il existe une bijection canonique, préservant le discriminant, entre $\mathscr{C}_3$ et l'ensemble des classes de formes irréductibles satisfaisant certaines conditions de congruence.

Pour exploiter ce résultat, il est commode de disposer d'un domaine fondamental $\mathscr{D}$ pour l'action de $G_{\mathbb{Z}}$ sur l'espace $V_{\mathbb{R}}$ des formes cubiques binaires à coefficients réels, ou du moins sur l'ouvert $V_{\mathbb{R}}^* \subset V_{\mathbb{R}}$ constitué des formes de discriminant non nul. On peut construire un tel domaine fondamental en combinant les théories de la réduction développées par Hermite [17, 19] en discriminant positif et par Mathews-Berwick [25] en discriminant négatif.

Grâce à ce domaine fondamental, on obtient une bijection entre $\mathscr{C}_3$ et certains points entiers irréductibles de $\mathscr{D}$, et, pour tout $X \geq 0$, une bijection entre $\mathscr{C}_3(X)$ et certains points entiers irréductibles de $\mathscr{D}(X)$, où $\mathscr{D}(X)$ désigne l'ensemble des points de $\mathscr{D}$ de discriminant majoré par X en valeur absolue. Il est alors raisonnable de chercher à estimer $N_3(X)$ à partir du volume de $\mathscr{D}(X)$. C'est de cette façon que Davenport et Heilbronn [12] on pu montrer, en s'appuyant sur des travaux antérieurs de Davenport [10, 11], que $N_3(X) \sim \frac{1}{3\zeta(3)}X$.

D'un point de vue algorithmique, énumérer $\mathscr{C}_3(X)$ se ramène à énumérer les points entiers irréductibles de $\mathscr{D}(X)$. En utilisant cette approche, Belabas [1] a implémenté un algorithme d'énumération des corps cubiques s'exécutant en temps optimal $O(X^{1+\varepsilon})$, ce qui lui a permis de construire une table des corps cubiques de discriminant inférieur à 10^{11} en valeur absolue.

Le domaine $\mathscr{D}(X)$, qui intervient de façon essentielle dans l'étude des corps cubiques, est décrit par des inégalités polynomiales complexes. Il est utile de l'approcher par un domaine légèrement plus grand défini par des inégalités plus simples. Ainsi, Davenport [10, 11] a montré que tout élément $f = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ de $\mathscr{D}(X)$ vérifie un système *monomial* de la forme :

$$\begin{aligned} |a| &\ll X^{\frac{1}{4}}, & |b| &\ll X^{\frac{1}{4}}, \\ |ad| &\ll X^{\frac{1}{2}}, & |bc| &\ll X^{\frac{1}{2}}, \\ |ac^3| &\ll X, & |b^3d| &\ll X. \end{aligned} \tag{1}$$

Tout point entier irréductible de $\mathscr{D}(X)$ correspond à une solution entière du système (1) telle que $a \neq 0$, et il n'est pas difficile de voir que le nombre de telles solutions est $O(X\log(X))$. Or le système (1) étant monomial, ses solutions entières peuvent être énumérées en temps optimal. Cela fournit un algorithme d'énumération de $\mathscr{C}_3(X)$ en temps $O(X^{1+\varepsilon})$.

En plus des inégalités (1), Davenport a également démontré, sous les mêmes hypothèses, une inégalité supplémentaire non monomiale dépendant du signe de $\operatorname{disc}(f)$:

$$\begin{aligned} c^2|bc-9ad| &\ll X & &\text{si } \operatorname{disc}(f) > 0, \\ c^2|bc-ad| &\ll X & &\text{si } \operatorname{disc}(f) < 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Le nombre de solutions entières des inégalités (1) et (2) vérifiant $a \neq 0$ est cette fois $O(X)$. Cela permet d'améliorer l'algorithme d'énumération décrit plus haut.

Précisons que d'autres optimisations sont possibles, et que l'algorithme mis au point par Belabas ne se réduit pas aux idées exposées ici.

3 Bijections de Bhargava

Dans sa thèse [2], Bhargava a donné une liste de paramétrisations d'objets arithmétiques par des orbites entières de représentations algébriques. Deux éléments de cette liste, étudiés en détail dans des articles postérieurs [4, 6], concernent les corps quartiques et quintiques et sont entièrement analogues à la bijection de Delone et Faddeev pour les corps cubiques.

Ainsi, dans le cas des corps quartiques, $V_{\mathbb{Z}}$ est l'ensemble des couples de formes quadratiques ternaires à coefficients entiers. Un tel couple peut être vu comme une application de $\mathbb{Z}^3$ dans $\mathbb{Z}^2$, de sorte que $V_{\mathbb{Z}}$ est muni d'une action naturelle de $G_{\mathbb{Z}} = GL_2(\mathbb{Z}) \times SL_3(\mathbb{Z})$. Il existe sur $V_{\mathbb{Z}}$ une notion d'irréductibilité et un polynôme, appelé discriminant, qui sont invariants par $G_{\mathbb{Z}}$; Bhargava construit alors une bijection canonique préservant le discriminant entre $\mathscr{C}_4$ et l'ensemble des classes irréductibles de $V_{\mathbb{Z}}$ satisfaisant certaines relations de congruence.

Le cas des corps quintiques est similaire ; $V_{\mathbb{Z}}$ est cette fois l'ensemble des quadruplets de 2-formes alternées quinaires à coefficients entiers, muni de l'action naturelle de $G_{\mathbb{Z}} = GL_4(\mathbb{Z}) \times SL_5(\mathbb{Z})$.

À partir de ces bijections, Bhargava est parvenu à démontrer la conjecture $N_n(X) \sim c_n X$ pour $n = 4$ [5] et $n = 5$ [7], en donnant des formules pour les constantes. La preuve s'appuie sur le même principe de géométrie des nombres que celle de Davenport et Heilbronn, mais est techniquement plus difficile et fait notamment intervenir une famille continue de domaines fondamentaux.

Mentionnons que des paramétrisations et des méthodes de comptage similaires ont ultérieurement permis à Bhargava d'obtenir d'autres résultats spectaculaires en statistiques arithmétiques, dont des bornes sur le rang moyen des courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$ [8, 9]. Ces avancées lui ont valu la médaille Fields en 2014.

Dans un court article [3], Bhargava a insisté sur les applications algorithmiques potentielles de ses bijections. Celles-ci devraient notamment permettre d'énumérer les corps quartiques et quintiques en temps $O(X^{1+\varepsilon})$. Comme on le verra dans les parties suivantes, je suis parvenu à réaliser une partie de ce programme pour $n = 4$, en suivant une démarche parallèle à celle exposée plus haut pour les corps cubiques.

4 Théories de la réduction

Pour exploiter algorithmiquement les bijections de Bhargava, il est utile de disposer d'une bonne théorie de la réduction pour l'action de $G_{\mathbb{Z}}$ sur l'ouvert $V_{\mathbb{R}}^* \subset V_{\mathbb{R}}$ constitué des éléments de discriminant non nul. Il faut en particulier être capable de vérifier efficacement si un élément donné est réduit. Les domaines fondamentaux utilisés par Bhargava ne satisfont pas cette condition et sont donc peu commodes en pratique.

L'idée des théories de la réduction d'Hermite et de Mathews-Berwick utilisées dans le cas cubique est de se ramener à la réduction de Gauss des formes quadratiques binaires définies positives. Soit f une forme cubique binaire à coefficients réels telle que $\operatorname{disc}(f) > 0$ (respectivement $\operatorname{disc}(f) < 0$). On lui associe une forme quadratique définie positive $c(f) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$, son *covariant*, de manière équivariante vis-à-vis de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ au départ et à l'arrivée. On déclare alors que f est réduite si et seulement si $c(f)$ appartient au domaine fondamental de Gauss, défini par les inégalités $0 \leq \beta \leq \alpha \leq \gamma$.

Le covariant d'Hermite, plus naturel que celui de Mathews-Berwick, se prête à de nombreuses généralisations et réinterprétations. Tout d'abord, on peut l'étendre à toutes les formes binaires f de degré d à coefficients complexes qui sont *stables*, c'est-à-dire dont tous les zéros dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont de multiplicité strictement inférieure à $\frac{d}{2}$. Le covariant $c(f)$ est alors une forme hermitienne définie positive, qui dépend de f de façon équivariante vis-à-vis de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et de la conjugaison complexe. Cette construction est le fruit des travaux successifs d'Hermite [17, 18], de Julia [21], et plus récemment de Stoll et Cremona [29], qui en ont donné une interprétation géométrique remarquable.

Si f est à coefficients réels, par équivariance vis-à-vis de la conjugaison complexe, son covariant $c(f)$ l'est aussi. En déclarant que f est réduite si et seulement si $c(f)$ l'est au sens de Gauss, on obtient donc une théorie de la réduction pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ sur les formes binaires stables à coefficients réels. Lorsqu'on la restreint aux formes cubiques de discriminant strictement négatif, cette théorie de la réduction diffère de celle de Mathews-Berwick, sur laquelle elle possède certains avantages.

Une forme binaire de degré d à coefficients complexes, considérée à constante multiplicative près, correspond à une somme formelle de d points dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, autrement dit à un zéro-cycle positif de degré d. On peut donc considérer le covariant étudié par Stoll et Cremona [29] comme une application $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-équivariante de l'ensemble des zéro-cycles positifs stables de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ vers l'ensemble des formes hermitiennes définies positives de déterminant 1.

Il s'avère alors que ce covariant s'étend en une application $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$-équivariante de l'ensemble des zéro-cycles positifs de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ vérifiant une certaine propriété de stabilité vers l'ensemble des formes hermitiennes définies positives de déterminant 1 en n variables, pour tout $n \geq 2$. Cette généralisation est due à Stoll [28]. L'inconvénient de sa démarche, purement formelle, est que l'on n'y retrouve pas l'intuition géométrique de Stoll et Cremona [29].

Le travail de Stoll fournit une théorie de la réduction pour l'action de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ sur les zéro-cycles positifs stables de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ invariants par conjugaison. En effet, le covariant d'un tel zéro-cycle est à coefficients réels ; or il existe, pour l'action de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ sur les formes quadratiques définies positives en n variables, des théories de la réduction qui généralisent celle de Gauss, par exemple la réduction d'Hermite-Korkine-Zolotarev ou celle de Minkowski.

Ce qui précède permet d'obtenir une théorie de la réduction pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ sur l'ensemble des couples de formes quadratiques ternaires à coefficients réels de discriminant non nul, qui intervient dans la bijection de Bhargava relative aux corps quartiques. En effet, à un tel couple (F_1, F_2), on peut associer d'une part la forme cubique binaire $f(x,y) = \det(xF_1 + yF_2)$, qui est de discriminant non nul, et d'autre part le zéro-cycle positif Z de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ égal à l'intersection des zéros de F_1 et de F_2, qui est stable et invariant par conjugaison. Il suffit alors de déclarer que (F_1, F_2) est réduit si et seulement si f et Z le sont pour les théories décrites ci-dessus.

En ce qui concerne les corps quintiques, il est très probable que les idées de Stoll permettent également de définir une théorie de la réduction satisfaisante, mais je ne suis pas encore en mesure de la décrire en détail.

5 Réduction des zéro-cycles positifs dans la grassmannienne

Durant ma thèse, j'ai étendu le covariant de Stoll aux zéro-cycles positifs de la grassmannienne $\mathrm{Gr}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire aux sommes formelles de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$, vérifiant une certaine condition de stabilité. Mon approche, que je vais brièvement décrire, est inspirée des idées géométriques de Stoll et Cremona [29].

Tout d'abord, l'ensemble $\mathscr{H}_n$ des formes hermitiennes définies positives de déterminant 1 en n variables s'identifie au quotient $\mathrm{SU}(n)\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Il s'agit d'une variété de Hadamard, c'est-à-dire une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative. Son bord à l'infini au sens d'Eberlein et O'Neill [15] s'identifie au complexe des drapeaux de $\mathbb{C}^n$ et contient notamment tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$ *propres*, c'est-à-dire distincts de 0 et $\mathbb{C}^n$.

À tout sous-espace vectoriel propre V de $\mathbb{C}^n$, vu comme un point dans le bord à l'infini de $\mathscr{H}_n$, on associe le champ de vecteurs F_V sur $\mathscr{H}_n$ de module constant à 1 et constamment dirigé vers V. Il est éclairant de voir F_V comme un champ de force auquel serait soumise une particule astreinte à se déplacer sur $\mathscr{H}_n$ et attirée par le point V. Il s'avère alors que cette force est *conservative*, c'est-à-dire égale à l'opposé du gradient d'une énergie potentielle E_V, qui est en fait la fonction de Busemann de V, définie à constante additive près.

Ceci étant, à un zéro-cycle positif Z de $\mathrm{Gr}_n(\mathbb{C})$, on associe un champ de vecteurs F_Z sur $\mathscr{H}_n$, égal à une certaine somme pondérée des champs F_V correspondant aux composantes propres de Z. On montre alors que si Z est stable, le champ F_Z possède un unique point d'équilibre, correspondant à un minimum global de l'énergie potentielle associée E_Z. C'est ce point d'équilibre qui est, par définition, le covariant de Z.

Je me suis aperçu que ce qui précède est en fait un cas particulier d'une construction très générale due à Kempf et Ness [22]. Soient G un groupe algébrique réductif connexe sur $\mathbb{C}$, K un sous-groupe compact maximal, et V une représentation algébrique de dimension finie de G munie d'une norme hermitienne invariante par K. À tout vecteur non nul $v \in \mathrm{V}$, on associe la fonction de Kempf-Ness $\kappa_v : \mathrm{K}\backslash\mathrm{G} \to \mathbb{R}$ donnée par $\kappa_v(\overline{g}) = \log\|g\cdot v\|$.

On montre que v est stable, c'est-à-dire que l'application orbitale $g \mapsto g\cdot v$ est propre, si et seulement si κ_v possède un unique minimum. L'application qui à un élément stable v associe le minimum de κ_v est évidemment G-équivariante. De plus, la stabilité de v et l'éventuel minimum de κ_v ne dépendent que de la droite $\mathbb{C}v$. On obtient ainsi un covariant $\mathbb{P}(\mathrm{V}) \to \mathrm{K}\backslash\mathrm{G}$ défini sur l'ensemble des droites stables. Cela permet de définir des théories de la réduction dans de nombreux contextes.

Le lien avec ma construction est qu'un zéro-cycle positif Z de $\mathrm{Gr}_n(\mathbb{C})$ peut être vu, via les plongements de Plücker et de Segré, comme un point dans un certain espace projectif, et que la fonction de Kempf-Ness associée, définie à constante additive près, n'est autre que E_Z. Mon covariant coïncide donc avec celui de Kempf-Ness.

6 Systèmes monomiaux

Revenons à la bijection de Bhargava concernant les corps quartiques. On a vu comment obtenir une théorie de la réduction pour l'action de $G_{\mathbb{Z}}$ sur l'ouvert $V_{\mathbb{R}}^* \subset V_{\mathbb{R}}$ constitué des éléments de discriminant non nul. Soit $\mathscr{D}$ le domaine fondamental correspondant. Comme dans le cas cubique, énumérer $\mathscr{C}_4(X)$ se ramène à énumérer les points entiers irréductibles de $\mathscr{D}(X)$.

Il existe une surapproximation du domaine $\mathscr{D}(X)$ définie par des inégalités monomiales, qui est également valable, aux constantes près, pour les domaines fondamentaux utilisés par Bhargava, et qui apparaît dans son article [5]. J'ai montré que cette surapproximation est décrite par 178 inégalités analogues à celles du système (1).

Il n'est plus question d'estimer à la main le nombre de solutions entières de ces inégalités. Heureusement, on peut le faire de manière systématique à l'aide du résultat suivant, qui découle de travaux de de la Bretèche [13].

Théorème 1. *Soit* $(\alpha_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ *une famille d'entiers positifs, et pour* $X \geq 0$*, soit* $N(X)$ *le nombre de solutions en entiers strictement positifs du système :*

$$\begin{aligned} x_1^{\alpha_{1,1}} \dots x_n^{\alpha_{1,n}} &\leq X^{\alpha_{1,1}+\dots+\alpha_{1,n}}, \\ &\vdots \\ x_1^{\alpha_{m,1}} \dots x_n^{\alpha_{m,n}} &\leq X^{\alpha_{m,1}+\dots+\alpha_{m,n}}. \end{aligned}$$

Soit C *le cône convexe de* $\mathbb{R}^n$ *engendré par les* m *vecteurs* $(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n})$*, et posons :*

$$\mu = \min_{\substack{(t_1,\dots,t_n)\in C\\ t_1\geq 1,\dots,t_n\geq 1}} t_1 + \dots + t_n.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$*, on a* $N(X) = O(X^{\mu+\varepsilon})$.

Grâce à ce résultat, j'ai pu montrer que le nombre de points entiers de la surapproximation monomiale de $\mathscr{D}(X)$ vérifiant certaines conditions de non-annulation nécessaires pour l'irréductibilité est $O\left(X^{\frac{5}{4}+\varepsilon}\right)$. Cela donne un algorithme d'énumération de $\mathscr{C}_4(X)$ plus rapide que la méthode de Hunter-Pohst-Martinet, dont la complexité est $O\left(X^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)$ en degré 4. J'ai implémenté cet algorithme, et je l'ai utilisé pour produire une table de tous les corps quartiques de discriminant inférieur à 10^9 en valeur absolue [30].

Dans le cas des corps quintiques, une grave difficulté apparaît : le théorème 1, appliqué au système monomial qui intervient implicitement dans le travail de Bhargava [7], suggère que l'algorithme obtenu par la stratégie exposée ci-dessus est désormais moins efficace que celui de Hunter-Pohst-Martinet, dont la complexité est cette fois $O\left(X^{\frac{7}{4}+\varepsilon}\right)$.

7 Perspectives

Mon travail de thèse pourrait se poursuivre dans plusieurs directions. Tout d'abord, en ce qui concerne les corps quartiques, il existe une façon de raffiner la surapproximation de $\mathscr{D}(X)$ à l'aide de quatre inégalités supplémentaires non monomiales, qui dépendent de la signature, et sont analogues aux inégalités (2). Cela pourrait permettre de diminuer le temps d'exécution de l'algorithme d'énumération, et peut-être d'obtenir la complexité optimale attendue $O(X^{1+\varepsilon})$. Cette stratégie a déjà été en partie menée à bien dans le cas totalement réel [2, 27].

Une difficulté de ce projet est qu'il sera sans doute nécessaire d'étendre le théorème 1 au cas où certains exposants $\alpha_{i,j}$ sont négatifs. Il faudra alors vérifier que la démarche de de la Bretèche fonctionne toujours dans ce nouveau cadre.

Une fois le cas des corps quartiques bien compris, le cas quintique paraîtra peut-être plus accessible. Je conjecture qu'il y aura cette fois 16 inégalités non monomiales qui permettront de raffiner la surapproximation de $\mathscr{D}(X)$.

D'autre part, une généralisation très naturelle des questions d'énumération de corps de nombres est l'énumération des extensions d'un corps de nombres fixé, ou même d'un corps global quelconque. Un projet pertinent consisterait à étendre à ce cadre les méthodes décrites dans ce document.

Je pourrais également poursuivre mes recherches en théorie de la réduction. En effet, il semble que l'utilisation du travail de Kempf et Ness [22] dans ce contexte soit nouvelle, et il serait intéressant d'expliciter et de comparer les théories de la réduction que l'on peut en déduire, par exemple pour l'action de $GL_n(\mathbb{Z})$ sur les formes de degré d en n variables à coefficients réels.

Enfin, je suis prêt à travailler sur de nouveaux problèmes d'énumération d'objets arithmétiques, ou plus généralement sur de nouvelles questions de théorie algorithmique des nombres.

Références

[1] Karim Belabas : A fast algorithm to compute cubic fields. *Math. Comp.*, 66(219):1213–1237, 1997.

[2] Manjul Bhargava : *Higher composition laws*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2001. Thesis (Ph.D.)–Princeton University.

[3] Manjul Bhargava : Gauss composition and generalizations. *In Algorithmic number theory (Sydney, 2002)*, volume 2369 de *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 1–8. Springer, Berlin, 2002.

[4] Manjul Bhargava : Higher composition laws. III. The parametrization of quartic rings. *Ann. of Math. (2)*, 159(3):1329–1360, 2004.

[5] Manjul Bhargava : The density of discriminants of quartic rings and fields. *Ann. of Math. (2)*, 162(2):1031–1063, 2005.

[6] Manjul Bhargava : Higher composition laws. IV. The parametrization of quintic rings. *Ann. of Math. (2)*, 167(1):53–94, 2008.

[7] Manjul Bhargava : The density of discriminants of quintic rings and fields. *Ann. of Math. (2)*, 172(3):1559–1591, 2010.

[8] Manjul Bhargava et Arul Shankar : Binary quartic forms having bounded invariants, and the boundedness of the average rank of elliptic curves. *Ann. of Math. (2)*, 181(1):191–242, 2015.

[9] Manjul BHARGAVA et Arul SHANKAR : Ternary cubic forms having bounded invariants, and the existence of a positive proportion of elliptic curves having rank 0. *Ann. of Math. (2)*, 181(2):587–621, 2015.

[10] Harold DAVENPORT : On the class-number of binary cubic forms. I. *J. London Math. Soc.*, 26:183–192, 1951.

[11] Harold DAVENPORT : On the class-number of binary cubic forms. II. *J. London Math. Soc.*, 26:192–198, 1951.

[12] Harold DAVENPORT et Hans Arnold HEILBRONN : On the density of discriminants of cubic fields. II. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 322(1551):405–420, 1971.

[13] Régis de la BRETÈCHE : Estimation de sommes multiples de fonctions arithmétiques. *Compositio Math.*, 128(3):261–298, 2001.

[14] Boris Nikolaevich DELONE et Dmitriĭ Konstantinovich FADDEEV : *The theory of irrationalities of the third degree*, volume 10 de *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1964.

[15] Patrick B. EBERLEIN et Barrett O'NEILL : Visibility manifolds. *Pacific J. Math.*, 46:45–109, 1973.

[16] Jordan S. ELLENBERG et Akshay VENKATESH : The number of extensions of a number field with fixed degree and bounded discriminant. *Ann. of Math. (2)*, 163(2):723–741, 2006.

[17] Charles HERMITE : Note sur la réduction des fonctions homogènes à coefficients entiers et à deux indéterminées. *J. Reine Angew. Math.*, 36:357–364, 1848.

[18] Charles HERMITE : Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres. *J. Reine Angew. Math.*, 41:191–216, 1851.

[19] Charles HERMITE : Sur la réduction des formes cubiques à deux indéterminées. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 48:351–357, 1859.

[20] John HUNTER : The minimum discriminants of quintic fields. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 3:57–67, 1957.

[21] Gaston JULIA : *Étude sur les formes binaires non quadratiques à indéterminées réelles, ou complexes, ou à indéterminées conjuguées*. Gauthier-Villars, Paris, 1917.

[22] George R. KEMPF et Linda A. NESS : The length of vectors in representation spaces. *In Algebraic geometry (Proc. Summer Meeting, Univ. Copenhagen, Copenhagen, 1978)*, volume 732 de *Lecture Notes in Math.*, pages 233–243. Springer, Berlin, 1979.

[23] Robert J. LEMKE OLIVER et Frank THORNE : Upper bounds on number fields of given degree and bounded discriminant. arXiv :2005.14110.

[24] Jacques MARTINET : Methodes géométriques dans la recherche des petits discriminants. *In Séminaire de théorie des nombres, Paris 1983-1984*, volume 59 de *Progr. Math.*, pages 147–179. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1985.

[25] George B. MATHEWS et William E. H. BERWICK : On The Reduction of Arithmetical Binary Cubics which have a Negative Determinant. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 10:48–53, 1912.

[26] Michael E. Pohst : On the computation of number fields of small discriminants including the minimum discriminants of sixth degree fields. *J. Number Theory*, 14(1):99–117, 1982.

[27] Ashwath Rabindranath : Enumerating totally real quartic fields. 2012.

[28] Michael Stoll : Reduction theory of point clusters in projective space. *Groups Geom. Dyn.*, 5(2):553–565, 2011.

[29] Michael Stoll et John E. Cremona : On the reduction theory of binary forms. *J. Reine Angew. Math.*, 565:79–99, 2003.

[30] Anne-Edgar Wilke : Primitive quartic number fields of absolute discriminant at most 10^9, 2022. Zenodo :7254825.