Semestre 7, Année 2011-2012 SESSION 1

UE : N1MA7104

Date : 19 Décembre 2011, 14h00-18h00 Durée : 4h

Texte (en italiques) et corrigé (en roman).

Exercice I.

a) *Montrer l'inégalité*

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \min(|e^z|, |e^{-z}|) \leq 1.$$

Si $\operatorname{Re} z \geq 0$, on a $|e^{-z}| = e^{-\operatorname{Re} z} \leq 1$; si $\operatorname{Re} z \leq 0$, on a $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \leq 1$. D'où l'inégalité demandée.

b) *Déterminer toutes les fonctions entières f telles que*

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ f(z) = f(-z) \quad \text{et} \quad |f(z)| \leq 1 + |e^z|.$$

Soit f une telle fonction. On a $|f(z)| \leq 1 + |e^z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Comme f est paire, on a aussi $|f(z)| = |f(-z)| \leq 1 + |e^{-z}|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. D'où

$$|f(z)| \leq 1 + \min(|e^z|, |e^{-z}|) \leq 2 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

(d'après l'inégalité établie au **a)**). Il résulte du théorème de Liouville (Corollaire 2.13 du cours) que f est une fonction constante, *i.e.* $f \equiv C$. On doit avoir aussi $|C| \leq \min_{\zeta \in \mathbb{C}}(1 + |e^\zeta|) = 1$ (faire tendre $\zeta \in \mathbb{R}$ vers $-\infty$ par exemple). Il est clair que toute telle fonction constante $f \equiv C$, $|C| \leq 1$ vérifie l'inégalité demandée. La réponse à cette question est donc : f est une fonction constante de module inférieur ou égal à 1.

Exercice II. *Soit f une fonction holomorphe au voisinage du disque fermé $\overline{D(0,3)}$, ne s'annulant pas sur la frontière de ce disque. On note γ le chemin paramétré $t \in [0,1] \mapsto 3\, e^{2i\pi t}$ et l'on suppose que*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \zeta\, \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = 2, \quad \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \zeta^2\, \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = -4.$$

a) *Calculer le nombre, les multiplicités, et les valeurs des zéros de la fonction f appartenant au disque ouvert $D(0,3)$.*

D'après la formule de variation de l'argument (théorème 3.9, volet 1), on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = N_{\text{zer}}[f; D(0,3)],$$

$N_{\text{zer}}[f; D(0,3)]$ désignant le nombre des zéros de f dans $D(0,3)$ (comptés avec leurs multiplicités). Chacun de ces zéros α est un pôle simple de f'/f (*cf.* l'exemple 3.1 du cours) et l'on a donc

$$\text{Res}_\alpha\big[\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta\big] = \alpha, \quad \text{Res}_\alpha\big[\zeta^2\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta\big] = \alpha^2.$$

Le nombre de zéros de f dans $D(0,3)$ (comptés avec multiplicités) vaut ici 2 par hypothèses. Notons α_1, α_2 ces deux zéros ($\alpha_1 = \alpha_2$ signifiant que $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ est zéro double). La formule des résidus (théorème 3.8) implique, compte-tenu des hypothèses,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \quad \& \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = -4.$$

On en déduit $2\alpha_1\alpha_2 = (\alpha_1+\alpha_2)^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = 8$, soit $\alpha_1\alpha_2 = 4$. Les nombres α_1 et α_2 sont donc les deux racines de l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$, soit $1 \pm i\sqrt{3}$. Ces deux nombres sont distincts ; la fonction f a donc exactement deux zéros simples (à savoir $1 \pm i\sqrt{3}$) dans $D(0,3)$.

b) *On suppose de plus que* $\sup_{|\zeta|=2} |f(\zeta)| < 50$. *Calculer le nombre de zéros (comptés avec leurs multiplicités) de la fonction holomorphe*

$$g\ : z \mapsto z^2(z^4-1) + f(z) + 10$$

appartenant au disque ouvert $D(0,2)$.

On a

$$|\zeta| = 2 \Longrightarrow |g(\zeta) - \zeta^2(\zeta^4-1)| \leq |f(\zeta)| + 10 < 60 = 4(16-1) = \min_{|\zeta|=2} |\zeta^2(\zeta^4-1)|.$$

D'après le théorème de Rouché, version analytique (théorème 3.9, volet 2), les fonctions g et $\zeta \mapsto \zeta^2(\zeta^4-1)$ ont même nombre de zéros (comptés avec multiplicités) dans $D(0,2)$. On a donc $N_{\text{zer}}(g; D(0,2)) = 6$ car $\zeta \mapsto \zeta^2(\zeta^4-1)$ a un zéro double (0) et 4 zéros simples (les quatres racines quatrièmes de l'unité) dans $D(0,2)$.

Exercice III. *Soit f une fonction holomorphe bornée en module dans la bande ouverte* $B := \{z \in \mathbb{C}\,;\, 0 < \text{Re}\, z < 1\}$, *se prolongeant en une fonction continue (notée aussi f) à* $\overline{B}$. *Soient*

$$M_0 := \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(iy)| \quad \text{et} \quad M_1 := \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(1+iy)|.$$

a) *On suppose dans cette question et la suivante que* $M_0M_1 > 0$. *Montrer que la fonction* $G\ : z \in B \mapsto f(z)M_0^{z-1}M_1^{-z}$ *est holomorphe dans* B, *se*

prolonge en une fonction continue dans $\overline{B}$, et que ce prolongement est borné en module par 1 *sur la frontière de $\overline{B}$.*
La fonction

$$h\ : z \mapsto M_0^{z-1} M_1^{-z} = \exp\big((z-1)\log M_0 - z\log M_1)\big)$$

est une fonction entière. La fonction $G = fh$ est donc bien holomorphe dans B et se prolonge (comme f) continuement à $\overline{B}$. D'autre part,

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ |M_0^{z-1} M_1^{-z}| = \exp\big((\operatorname{Re} z - 1)\,\log M_0 - (\operatorname{Re} z)\,\log M_1\big).$$

La fonction h est donc de module égal à $\exp(-\log M_0) = M_0^{-1}$ sur l'axe vertical $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ et de module égal à $\exp(-\log M_1) = M_1^{-1}$ sur la droite verticale $\{\operatorname{Re} z = 1\}$. On a donc bien $|G(z)| \leq M_0 \times M_0^{-1} = 1$ si $\operatorname{Re} z = 0$ et $|G(z)| \leq M_1 \times M_1^{-1} = 1$ si $\operatorname{Re} z = 1$. On a donc $|G| \leq 1$ sur ∂B.
b) *Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, la fonction $z \in B \mapsto G(z)\, e^{\epsilon z^2}$ est bornée en module par e^ϵ dans la bande B. En déduire :*

$$\forall\, z \in B\,,\ |f(z)| \leq M_0^{1-\operatorname{Re} z} M_1^{\operatorname{Re} z}.$$

On a

$$\forall\, z = x + iy \in \overline{B},\ |e^{\epsilon z^2}| = e^{\epsilon(x^2-y^2)} \leq e^\epsilon e^{-\epsilon y^2}.$$

Soit $T > 0$. Le principe du maximum, version globale (proposition 2.10, appliquée ici dans le rectangle ouvert $]0,1[\times]-T,T[$) assure que

$$\begin{aligned} \sup_{[0,1]\times[-T,T]} |G(z)e^{\epsilon z^2}| &\leq \sup_{\partial([0,1]\times[-T,T])} |G(z)e^{-\epsilon z^2}| \\ &\leq e^\epsilon \max\big(1, e^{-\epsilon T^2} \sup_{x\in[0,1]} |G(x \pm iT)|\big) \end{aligned} \tag{1}$$

En effet, la fonction G est bornée en module par 1 sur les côtés verticaux du rectangle $[0,1] \times [-T,T]$, tandis que la fonction $z \mapsto e^{-\epsilon z^2}$ est bornée en module par e^ϵ sur ces mêmes côtés verticaux et par $e^\epsilon e^{-\epsilon T^2}$ sur les côtés horizontaux de ce rectangle. Dans la bande $\overline{B}$, la fonction $|G|$ est bornée par $\sup_{\overline{B}} |f| \times \exp(|\log M_0| + |\log M_1|) = M$. Si T est assez grand (tel que $e^{-\epsilon T^2} \leq 1/M$), on déduit de (1) que

$$\sup_{[0,1]\times[-T,T]} |G(z)e^{\epsilon z^2}| \leq e^\epsilon.$$

En faisant tendre T vers $+\infty$, on voit que ceci implique que $z \mapsto G(z)e^{-\epsilon z^2}$ est bornée en module par e^ϵ dans la bande B. Si z est fixé dans B, on obtient, en faisant tendre ϵ vers 0 dans l'inégalité $|G(z)e^{-\epsilon z^2}| \leq e^{\epsilon}$, que $|G(z)| \leq 1$, *i.e.* $|f(z)| \leq |M_0^{1-z}M_1^z| = M_0^{1-\operatorname{Re} z}M_1^{\operatorname{Re} z}$, ce qui est l'inégalité demandée.

c) *Si $M_0 = 0$ ou $M_1 = 0$, montrer que f est identiquement nulle dans B.*

Si par exemple $M_0 = 0$, f est identiquement nulle sur l'axe imaginaire pur. Le principe de réflexion de Schwarz (proposition 2.3) assure que f se prolonge par réflexion en une fonction holomorphe dans la bande $]-1,1[\times\mathbb{R}$. Le principe des zéros isolés (théorème 2.9) assure (puisque f est identiquement nulle sur l'axe imaginaire pur) que f est identiquement nulle dans B.

d) *Si la fonction f, une fois prolongée à $\overline{B}$, est telle que $f(\partial B) \subset \mathbb{R}$, montrer que f est constante dans B.*

Le principe de réflexion de Schwarz (proposition 2.3), appliqué à gauche ou à droite (f est réelle sur les deux droites verticales constituant le bord de B), permet de prolonger (par réflexion) f à la bande $[-1,2]\times\mathbb{R}$, le prolongement étant holomorphe à l'intérieur de cette bande fermée, continu et borné en module dans cette bande fermée par $\sup_B |f|$, et toujours réel sur le bord de cette bande fermée. On peut donc itérer ce processus et prolonger ainsi f de proche en proche à toute bande $[-k, 1+k]$, $k \in \mathbb{N}^*$, donc à $\mathbb{C}$ tout entier, en une fonction entière f de module borné par $\sup_B |f|$. D'après le théorème de Liouville (corollaire 2.13 du cours), ce prolongement est une fonction constante dans $\mathbb{C}$, donc f est une fonction constante dans B.

Exercice IV. *Soit f une fonction holomorphe dans le demi-plan ouvert $\Pi^+ := \{\operatorname{Re} z > 0\}$, se prolongeant en une fonction continue (notée aussi f) au demi-plan fermé $\overline{\Pi^+} = \{\operatorname{Re} z \geq 0\}$. On suppose qu'il existe des constantes $\alpha \in]0,1[$, $A > 0$, $C > 0$, $M > 0$, telles que*

$$\sup_{\zeta\in\Pi^+} \big(|f(\zeta)|\, e^{-C|\zeta|^\alpha}\big) \leq A \quad \text{et} \quad \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(iy)| \leq M.$$

a) *Soit $\beta \in]\alpha, 1[$. Montrer que la fonction*

$$z \mapsto z^\beta := \exp\big(\beta(\log|z| + i\arg_{]-\pi,\pi[}(z))\big)$$

est holomorphe dans Π^+ et se prolonge en une fonction continue dans $\overline{\Pi^+}$. Que vaut cette fonction prolongée en $z = 0$? Quelle est l'image de $\overline{\Pi^+}$ par cette fonction prolongée ? Cette fonction prolongée peut-elle être la restriction à $\overline{\Pi^+}$ d'une fonction holomorphe dans un demi-plan ouvert $\{\operatorname{Re} z > -\eta\}$ avec $\eta > 0$?

La fonction

$$z \mapsto \log|z| + i\arg_{]-\pi,\pi[}(z)$$

est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \leq 0\}$ (elle est en effet C^∞ dans cet ouvert et vérifie l'équation de Cauchy-Riemann qu'il est commode ici d'exprimer en coordonnées polaires : $\partial g/\partial r + (i/r)\partial g/\partial\theta = 0$, *cf.*

l'exemple 1.3 du cours). La fonction $z \mapsto z^\beta$ est donc bien holomorphe dans Π^+ comme composée de fonctions holomorphes (l'exponentielle est une fonction entière). Elle se prolonge d'ailleurs en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \leq 0\}$. Elle se prolonge aussi continuement à $\overline{\Pi^+}$ car elle se prolonge continuement en $z = 0$ en posant $0^\beta = 0$; en effet $\lim_{z \to 0, z \in \overline{\Pi^+}} |z|^\beta = 0$. L'image de $\overline{\Pi^+}$ par cette fonction prolongée est le secteur angulaire fermé $\{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}\,;\, r \geq 0,\ |\theta| \leq \beta\pi/2\}$. La fonction $z \in \Pi^+ \mapsto z^\beta$ ne peut se prolonger holomorphiquement à un voisinage ouvert de l'origine car

$$\lim_{z \to 0, z \in \Pi^+} |\partial z^\beta / \partial z| = \lim_{z \to 0, z \in \Pi^+} (\beta |z|^{\beta - 1}) = +\infty$$

puisque $\beta < 1$. Elle ne peut donc *a fortiori* se prolonger holomorphiquement à aucun demi-plan ouvert de la forme $\{\mathrm{Re}\, z > -\eta\}$, avec $\eta > 0$.

b) *Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, la fonction*

$$z \in \Pi^+ \longmapsto g_\epsilon(z) := f(z)\, e^{-\epsilon z^\beta}$$

(où la fonction $z \mapsto z^\beta$ a été introduite au **a)***) est holomorphe et bornée en module dans Π^+.*

La fonction g_ϵ est holomorphe dans Π^+ comme produit de fonctions holomorphes. Elle se prolonge (d'après le **a)** continuement à $\overline{\Pi^+}$. On a

$$\begin{aligned} &\forall\, z = re^{i\theta} \in \Pi^+ \ (r > 0, \theta \in]-\pi/2, \pi/2[), \\ &\quad |f(z) e^{-\epsilon z^\beta}| \leq A \exp\big(Cr^\alpha - r^\beta \cos(\beta\theta)\big)| \leq \exp\big(Cr^\alpha - \cos(\beta\pi/2) r^\beta\big) \end{aligned} \tag{2}$$

puisque $\beta \in]\alpha, 1[$ (ce qui implique $\cos(\beta\theta) \geq \cos(\beta\pi/2) > 0$ pour tout θ dans $]-\pi/2, \pi/2[$). Comme d'autre part $\beta > \alpha$, on a

$$\lim_{r \to +\infty} \exp\big(Cr^\alpha - \cos(\beta\pi/2) r^\beta\big) = 0,$$

d'où l'on déduit, compte-tenu de (2),

$$\lim_{|z| \to +\infty, z \in \Pi^+} |g_\epsilon(z)| = 0.$$

On a également, du fait que g_ϵ se prolonge continuement à $\overline{\Pi^+}$,

$$\lim_{|z| \to +\infty, z \in \overline{\Pi^+}} |g_\epsilon(z)| = 0.$$

Comme la fonction g_ϵ est bornée en module dans tout demi-disque compact $\overline{D(0, R)} \cap \overline{\Pi^+}$ (puisque continue sur ce compact) et bornée en module par 1 dans $\overline{\Pi^+} \cap \{|z| \geq R\}$ lorsque R est assez grand, elle est bornée en module dans Π^+ (même dans $\overline{\Pi^+}$).

c) *En appliquant convenablement le principe du maximum (on justifiera soigneusement le raisonnement utilisé), montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, la fonction g_ϵ est bornée en module par M dans Π^+. En déduire que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \overline{\Pi^+}$.*

Soit R assez grand pour que

$$\sup_{z \in \overline{\Pi^+}, |z| \geq R} |g_\epsilon(z)| \leq M/2.$$

Un tel R existe puisque

$$\lim_{|z| \to +\infty, z \in \overline{\Pi^+}} |g_\epsilon(z)| = 0$$

(*cf.* le raisonnement utilisé pour répondre à la question **b)**). D'après le principe du maximum (proposition 2.10) appliqué dans le demi-disque ouvert $\Pi^+ \cap D(0, R)$, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{\Pi^+ \cap D(0,R)} |g_\epsilon(z)| &< \max\Big(M/2, \sup_{y \in [-R,R]} |g_\epsilon(iy)|\Big) \\
&\leq \max\Big(M/2, \sup_{y \in [-R,R]} |f(iy)|\Big) \leq M.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout R assez grand, on en déduit que $|g_\epsilon| < M$ dans Π^+. Si z est fixé (arbitraire) dans Π^+, on obtient, en faisant tendre ϵ vers 0 dans les inégalités

$$|f(z) e^{-\epsilon z^\beta}| < M \quad \forall\, \epsilon > 0,$$

l'inégalité limite $|f(z)| \leq M$.

d) *Un tel résultat subsiste-t'il si l'on conserve les hypothèses de l'en-tête de l'exercice, mais que l'on suppose cette fois $\alpha = 1$ au lieu de $\alpha \in]0, 1[$? Justifier toute réponse négative par un contre-exemple approprié.*

La fonction exp vérifie les conditions voulues avec $A = C = \alpha = 1$ et $M = 1$, puisque $|\exp z| = e^{\mathrm{Re}\, z} \leq e^{|z|}$ dans Π^+ et que $|e^{iy}| = 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Cette fonction n'est pourtant pas bornée en module par 1 dans Π^+. Le résultat établi au **c)** ne subsiste donc plus si $\alpha = 1$.

Exercice V.

a) *Soient α et β deux nombres réels tels que $|\beta| < \alpha$. Calculer, en utilisant la formule des résidus, l'intégrale curviligne*

$$\int_\gamma \frac{\zeta}{(\alpha\zeta^2 + \beta)(\beta\zeta^2 + \alpha)}\, d\zeta\,,$$

où γ désigne le chemin paramétré $\gamma\ : t \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi t}$.
Comme $|\beta| < \alpha$, les pôles de la fonction rationnelle

$$R_{\alpha,\beta}\ : \zeta \mapsto \frac{\zeta}{(\alpha\zeta^2+\beta)(\beta\zeta^2+\alpha)}$$

appartenant au disque unité ouvert sont les zéros de $\alpha\zeta^2+\beta = 0$. Si $\beta = 0$, on a

$$\int_\gamma R_{\alpha,0}(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{\alpha^2}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2i\pi}{\alpha^2}$$

puisque $\mathrm{Ind}(\gamma,0)=1$. Si $\beta \neq 0$, les deux pôles de $R_{\alpha,\beta}$ appartenant au disque unité sont simples. En chacun de ces pôles ξ (tous les deux non nuls dans ce cas, avec $\xi^2 = -\beta/\alpha$), on a, d'après la formule donnant le résidu en un pôle simple (lemme 3.1, formule (3.29)),

$$\mathrm{Res}_\xi[R_{\alpha,\beta}(\zeta)\, d\zeta] = \frac{1}{2\alpha\xi}\,\frac{\xi}{\beta\xi^2+\alpha} = \frac{1}{2(\alpha^2-\beta^2)}.$$

On a donc dans ce cas

$$\int_\gamma R_{\alpha,\beta}(\zeta)\, d\zeta = 2i\pi \times 2 \times \frac{1}{2(\alpha^2-\beta^2)} = \frac{2i\pi}{\alpha^2-\beta^2}.$$

b) *Soient a et b deux nombres strictement positifs. Déduire du* **a)** *(on prendra $\alpha = a+b$ et $\beta = a-b$) la valeur (en fonction de a et b) de l'intégrale définie*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}.$$

Si $\zeta = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0,2\pi]$), on a

$$\begin{aligned} & 4(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) = a^2(\zeta+1/\zeta)^2 - b^2(\zeta-1/\zeta)^2 \\ = {} & \Big(a(\zeta+1/\zeta)+b(\zeta-1/\zeta)\Big)\Big(a(\zeta+1/\zeta)-b(\zeta-1/\zeta)\Big) \\ = {} & \frac{(\alpha\zeta^2+\beta)(\beta\zeta^2+\alpha)}{\zeta^2}, \end{aligned}$$

où $\alpha := a+b$ et $\beta := a-b$ (on a bien $|a-b| < a+b$ car $a>0$ et $b>0$). On a donc, en utilisant le résultat établi au **a)**,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} &= 4\int_\gamma \frac{\zeta^2}{(\alpha\zeta^2+\beta)(\beta\zeta^2+\alpha)}\,\frac{d\zeta}{i\zeta} \\ &= \frac{4}{i}\int_\gamma \frac{\zeta}{(\alpha\zeta^2+\beta)(\beta\zeta^2+\alpha)}\, d\zeta \\ &= \frac{4}{i} \times \frac{2i\pi}{\alpha^2-\beta^2} = \frac{8\pi}{4ab} = \frac{2\pi}{ab}. \end{aligned}$$

Exercice VI.

a) *Donner explicitement une détermination holomorphe φ du logarithme dans le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \{iy\,;\, y \leq 0\}$, telle que $\varphi(t) = \log t$ pour tout $t > 0$. On note* $\log$ *cette détermination dans la suite de l'exercice.*

Cette détermination holomorphe est

$$z \mapsto \log |z| + i\mathrm{arg}_{]-\pi/2, 3\pi/2[}(z).$$

Cette fonction φ est en effet bien holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{iy\,;\, y \geq 0\}$ (*cf.* l'exemple 1.3 du cours) et telle que $\exp(\varphi(z)) = z$ dans cet ouvert.

b) *Montrer que les intégrales*

$$I_q := \int_{]0,\infty[} \frac{(\log t)^q}{(1+t^2)^2}\, dt, \quad q = 0, 1, 2,$$

sont convergentes au sens de Lebesgue.

Comme $|\log t| = o(t^{-\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures, les trois fonctions

$$t \mapsto \frac{(\log t)^q}{(1+t^2)^2}, \quad q = 0, 1, 2,$$

sont intégrables sur $]0, 1]$ d'après le critère de Riemann ($1/t^\alpha$ est intégrable en 0_+ si et seulement si $\alpha < 1$). Comme $|\log t| = o(t^\epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$ lorsque t tend vers $+\infty$, ces mêmes trois fonctions sont intégrables sur $[1, +\infty[$ d'après le critère de Riemann ($1/t^\alpha$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$).

c) *Soient $\epsilon \in]0, 1[$ et $R > 1$. Exprimer en utilisant la formule des résidus les intégrales curvilignes*

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^2} \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{(\log \zeta)^2}{(1+\zeta^2)^2}\, d\zeta\,,$$

où $\Gamma_{\epsilon,R}$ désigne le chemin paramétré correspondant au trajet indiqué sur la figure 1, parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

Dans les deux cas, le seul pôle de la fonction méromorphe

$$\zeta \mapsto \frac{(\log \zeta)^q}{(1+\zeta^2)^2}, \quad (q = 0 \text{ ou } q = 2)$$

(figurant sous la prise d'intégrale curviligne) qui appartienne à l'ouvert enserré par le support de $\Gamma_{\epsilon,R}$ est i. Il s'agit dans les deux cas d'un pôle double. Le développement de Taylor de la fonction $(\log z)^2$ au voisinage de $z = i$ est

$$(\log(i+h))^2 = (\log i)^2 + 2\frac{\log i}{i} h + o(|h|) = -\pi^2/4 + \pi h + o(h)$$

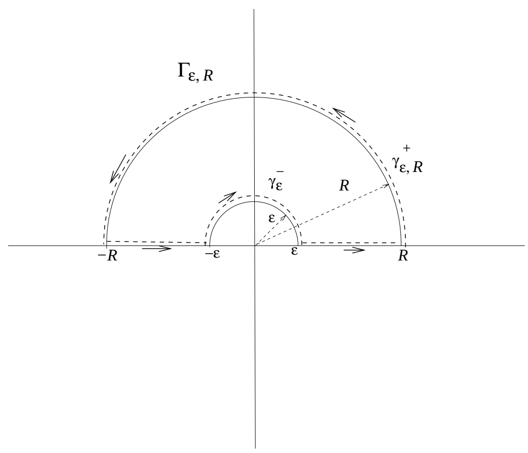

FIG. 1 – Contour $\Gamma_{\epsilon,R}$ (Exercice VI, **c)**)

puisque $\log i = i\pi/2$ et $\log'(i) = 1/i$. On a, au voisinage de $h = 0$,

$$\frac{1}{((i+h)+i)^2} = \frac{1}{-4+4ih+o(h)} = -\frac{1+ih}{4} + o(h).$$

Il en résulte

$$\mathrm{Res}_i\Big[\frac{1}{(\zeta^2+1)^2}\,d\zeta\Big] = \mathrm{Res}_0\Big[\frac{1}{h^2(2i+h)^2}\,dh\Big] = -\frac{i}{4}.$$

De même

$$\frac{(\log(i+h))^2}{((i+h)+i)^2} = \frac{-\pi^2/4+\pi h+o(h)}{-4+4ih+o(h)} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}(i\pi^2/4-\pi)h + o(h).$$

Il en résulte

$$\mathrm{Res}_i\Big[\frac{(\log\zeta)^2}{(\zeta^2+1)^2}\,d\zeta\Big] = \mathrm{Res}_0\Big[\frac{(\log(i+h))^2}{h^2(2i+h)^2}\,dh\Big] = \frac{1}{4}(i\pi^2/4-\pi).$$

On a donc, comme conséquence de la formule des résidus (théorème 3.8) :

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^2} = 2i\pi \times \Big(\frac{-i}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}$$
$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{(\log\zeta)^2}{(1+\zeta^2)^2}\,d\zeta = 2i\pi \times \Big(\frac{1}{4}(i\pi^2/4-\pi)\Big) = -\frac{\pi^3}{8} - i\frac{\pi^2}{2}.$$

d) *En faisant tendre ϵ vers 0, puis R vers l'infini, dans l'expression de*

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^2}$$

obtenue au **c**)*, calculer la valeur numérique de* I_0*.*

On utilise les notations indiquées sur la figure 1 pour désigner les deux circuits correspondant aux deux chemins paramétrés que sont $\gamma^+_{\epsilon,R} : t \in [0,1] \mapsto Re^{i\pi t}$ et $\gamma^-_{\epsilon,R} \ : t \in [0,1] \mapsto \epsilon e^{i(1-t)\pi}$ (de supports respectifs l'un des deux demi-cercles impliqués dans la décomposition du circuit $\Gamma_{\epsilon,R}$). On constate que

$$\Big| \int_{\gamma^+_{\epsilon,R}} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^2} \Big| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} = O(R^{-3}).$$

Il en résulte

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma^+_{\epsilon,R}} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^2} = 0.$$

Comme la fonction

$$\zeta \mapsto \frac{1}{(1+\zeta^2)^2}$$

est continue en $\zeta = 0$, on a

$$\lim_{\epsilon\to 0_+} \int_{\gamma^-_{\epsilon,R}} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^2} = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2} \lim_{\substack{\epsilon\to 0^+ \\ R\to+\infty}} \Big(\int_{-\epsilon}^{-R} \frac{dt}{(1+t^2)^2} + \int_{\epsilon}^{R} \frac{dt}{(1+t^2)^2} \Big) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\substack{\epsilon\to 0^+ \\ R\to+\infty}} \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

e) *En faisant tendre* ϵ *vers* 0*, puis* R *vers l'infini, dans l'expression de*

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{(\log\zeta)^2}{(1+\zeta^2)^2}\, d\zeta$$

obtenue au **c**)*, déduire du résultat établi au* **d**) *les valeurs numériques de* I_1 *et* I_2*.*

On raisonne comme au **d**). On constate que

$$\Big| \int_{\gamma^+_{\epsilon,R}} \frac{(\log\zeta)^2\, d\zeta}{(1+\zeta^2)^2} \Big| \leq \frac{\pi R(\log R + \pi)^2}{(R^2-1)^2} = O((\log R)^2 R^{-3}).$$

Il en résulte

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma^+_{\epsilon,R}} \frac{(\log\zeta)^2\, d\zeta}{(1+\zeta^2)^2} = 0.$$

Comme la fonction $\zeta \mapsto (\log \zeta)^2$ est telle que

$$\lim_{\epsilon \to 0_+} (\epsilon \sup_{\mathrm{supp}(\gamma^-_{\epsilon,R})} |\log \zeta|^2) = 0$$

(car $|\log \epsilon| = o(1/\epsilon)$ lorsque ϵ tend vers 0_+), on a

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma^-_{\epsilon,R}} \frac{(\log \zeta)^2 \, d\zeta}{(1+\zeta^2)^2} = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\epsilon\to 0^+ \\ R\to+\infty}} \Big(\int_{-\epsilon}^{-R} \frac{(\log|t| + i\pi)^2 \, dt}{(1+t^2)^2} + \int_{\epsilon}^{R} \frac{(\log t)^2 \, dt}{(1+t^2)^2} \Big) &= \lim_{\substack{\epsilon\to 0^+ \\ R\to+\infty}} \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{(\log \zeta)^2 \, d\zeta}{(1+\zeta^2)^2} \\ &= -\frac{\pi^3}{8} - i\frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

d'après le résultat établi au **c)**. En prenant les parties réelles dans cette égalité et en utilisant le calcul de I_0 effectué au **d)**, on trouve

$$2I_2 - \pi^2 I_0 = 2I_2 - \frac{\pi^3}{4} = -\frac{\pi^3}{8},$$

soit $I_2 = \pi^3/16$. En prenant maintenant les parties imaginaires dans la même égalité, on trouve $2\pi I_1 = -\pi^2/2$, soit $I_1 = -\pi/4$.

Exercice VII. *Soit $f \ : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1, intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{C}$.*
a) *Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'intégrale double*

$$\iint_{\mathbb{C}} f(z+\zeta) \, \frac{d\xi d\eta}{\zeta} \qquad (\textit{où } \zeta = \xi + i\eta)$$

est convergente au sens de Lebesgue.

La fonction f est de classe C^1 dans $\mathbb{C}$, donc bornée en module au voisinage de tout point z du plan. Comme la fonction $\zeta \mapsto 1/\zeta$ est intégrable au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$ (en vertu du critère de Riemann qui stipule que $\zeta \mapsto |\zeta|^{-\alpha}$ est intégrable au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $\alpha < 2$), la fonction

$$\zeta \mapsto \frac{f(z+\zeta)}{\zeta}$$

est intégrable au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$, ce pour tout nombre complexe z. La fonction $\zeta \mapsto f(z+\zeta)$ est aussi supposée intégrable sur $\mathbb{C}$, comme l'est la fonction f (par invariance par translation de la mesure de Lebesgue). L'intégrale

$$\iint_{|\zeta|\geq 1} f(z+\zeta)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta}$$

est donc aussi convergente au sens de Lebesgue (comme l'est, on vient de le voir, l'intégrale sur $\{|\zeta| \leq 1\}$).

b) *Soit $\rho\ : \mathbb{C} \to [0,1]$ une fonction de classe C^1, identiquement égale à 1 dans $D(0,1/2)$, et de support compact inclus dans $D(0,1)$ (on admettra l'existence d'une telle fonction, dite « fonction-plateau »). Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer, après avoir scindé f en la somme*

$$f(\zeta) = f(\zeta)\,\rho(\zeta - z_0) + f(\zeta)\,\big(1 - \rho(\zeta - z_0)\big)$$

que la fonction

$$F\ : z \mapsto \iint_{\mathbb{C}} f(z+\zeta)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta}$$

est de classe C^1 dans $D(z_0,1/4)$ et vérifie dans ce disque ouvert

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}(z) = \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\big[f(z+\zeta)\rho(z+\zeta-z_0)\big]\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta}.$$

On découpe F en

$$\begin{aligned}
&F(z) = \\
&= \iint_{\mathbb{C}} f(z+\zeta)\rho(z+\zeta-z_0)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta} + \iint_{\mathbb{C}} f(z+\zeta)\big(1-\rho(z+\zeta-z_0)\big)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta} \\
&= F_{z_0,1}(z) + F_{z_0,2}(z).
\end{aligned}$$

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Pour $|z - z_0| < 1/4$, la fonction

$$\zeta \mapsto f(z+\zeta)\rho(z+\zeta-z_0)$$

est une fonction de classe C^1, à support compact inclus dans $D(0,5/4)$ (puisque le support de ρ est inclus dans $D(0,1)$ et que $|z - z_0| \leq 1/4$). Il existe donc (puisque f et ρ sont de classe C^1), une constante $M_{f,\rho}(z_0)$ telle que, pour tout $z \in D(z_0,1/4)$, pour presque tout $\zeta \in \mathbb{C}$ (ici $\zeta \neq 0$), on ait

$$\frac{\big\|\vec{\nabla}_{x,y}[f(x+iy+\zeta)\rho(x+iy+\zeta-z_0)]\big\|}{|\zeta|} \leq M_{f,\rho}(z_0) \times \frac{\chi_{D(0,5/4)}(\zeta)}{|\zeta|}.$$

On en déduit, en appliquant le théorème de Lebesgue relatif à la différentiation des intégrales fonctions de deux paramètres x et y (ce théorème s'applique ici car le « chapeau dominant » $\zeta \mapsto M_{f,\rho}(z_0)\,\chi_{D(0,5/4)}(\zeta)/|\zeta|$ est intégrable sur $\mathbb{C}$) que la fonction

$$z \mapsto F_{z_0,1}(z) := \iint_{\mathbb{C}} f(z+\zeta)\rho(z+\zeta-z_0)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta}$$

est de classe C^1 dans $D(z_0,1/4)$, et que l'on a

$$\forall\, z \in D(z_0,1), \quad \frac{\partial F_{z_0,1}}{\partial \overline{z}}(z) = \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}[f(z+\zeta)\rho(z+\zeta-z_0)]\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta}.$$

En utilisant l'invariance par translation pour la mesure de Lebesgue, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} F_{z_0,2}(z) &:= \iint_{\mathbb{C}} f(z+\zeta)\big(1-\rho(z+\zeta-z_0)\big)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta} \\ &= \iint_{\mathbb{C}} f(\zeta)\big(1-\rho(\zeta-z_0)\big)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\ &= \iint_{|\zeta-z_0|\geq 1/2} f(\zeta)\big(1-\rho(\zeta)\big)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \end{aligned}$$

(puisque $\rho \equiv 1$ dans $D(0,1/2)$). Pour $|z-z_0| < 1/4$ et $|\zeta - z_0| \geq 1/2$, on a (par l'inégalité triangulaire) $1/|\zeta - z|^2 \leq 16$. Pour tout $z \in D(z_0,1/4)$, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, on a donc

$$|f(\zeta)(1-\rho(\zeta-z_0))|\,\Big\|\vec{\nabla}_{x,y}\Big[\frac{1}{\zeta - x - iy}\Big]\Big\|\chi_{\{|\zeta-z_0|\geq 1/2\}} \leq 16|f(\zeta)|$$

(on prend comme norme $\|\ \|$ sur $\mathbb{C}^2$ le maximum des modules des coordonnées). On est à nouveau dans les conditions d'application du théorème de Lebesgue de différentiation des intégrales fonctions de deux paramètres, puisque le « chapeau dominant » (ici $\zeta \mapsto 16|f(\zeta)|$) est intégrable sur $\mathbb{C}$. On en déduit que la fonction

$$z \mapsto F_{z_0,2}(z) := \iint_{\mathbb{C}} f(z+\zeta)\big(1-\rho(z+\zeta-z_0)\big)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta}$$

est aussi de classe C^1 dans $D(z_0,1/4)$ et que

$$\forall\, z \in D(z_0,1), \quad \frac{\partial F_{z_0,2}}{\partial \overline{z}}(z) = \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big[\frac{1}{\zeta - z}\Big](1-\rho(\zeta-z_0))f(\zeta)\,d\xi\,d\eta = 0.$$

Comme $F = F_{z_0,1} + F_{z_0,2}$ dans $D(z_0,1/4)$, on obtient bien le résultat demandé : chacune des deux fonctions est de classe C^1 dans $D(z_0,1/4)$ et seule la première des deux contribue au calcul de $\partial F/\partial \overline{z}$ dans ce disque ouvert.

c) *En utilisant judicieusement la formule de Cauchy-Pompeiu, déduire du* **c)** *que la fonction F est solution de l'équation de Cauchy-Riemann avec second membre*

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}(z) = -\pi f(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. La fonction

$$\zeta \mapsto f(\zeta)\rho(\zeta - z_0)$$

est une fonction de classe C^1, de support compact inclus dans $D(z_0, 1)$. D'après la formule de Cauchy-Pompeiu (proposition 1.6 du cours, appliquée ici avec $K = \overline{D(0,1)}$), on a, pour tout $z \in D(z_0, 1)$,

$$\begin{aligned}
f(z)\rho(z - z_0) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{D(0,1)} \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\big[f(\zeta)\rho(\zeta - z_0)\big]\, \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\
&= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\big[f(\zeta)\rho(\zeta - z_0)\big]\, \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\
&= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\big[f(z+\zeta)\rho(z + \zeta - z_0)\big]\, \frac{d\xi d\eta}{\zeta} \\
&= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\big[f(z+\zeta)\rho(z + \zeta - z_0)\big]\, \frac{d\xi d\eta}{\zeta}.
\end{aligned}$$

Si $z \in D(z_0, 1/4)$, on a $\rho(z - z_0) = 1$ et, d'après le résultat établi à la question **b)**,

$$\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\big[f(z+\zeta)\rho(z + \zeta - z_0)\big]\, \frac{d\xi d\eta}{\zeta} = \frac{\partial F_{z_0,1}}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}(z).$$

Dans $D(z_0, 1/4)$, on a donc bien

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}(z),$$

ce qui donne le résultat voulu puisque z_0 est ici arbitraire.