Semestre 7, Année 2012-2013 SESSION 1

UE : N1MA7104

Date : 19 Décembre 2012, 13h30-17h30 Durée : 4h

Polycopié de cours autorisé (à l'exception de tout autre document)

Nota. *Le texte est composé d'un problème (en deux parties* **I** *et* **II***) et de trois exercices. On pourra cependant ne choisir que deux exercices parmi les exercices* **1***,* **2***,* **3** *proposés (préciser alors lesquels dans la rédaction), l'exercice restant devenant dans ce cas optionnel et donc hors barème.*

Problème

Nota. *Si les questions du problème s'enchaînent, il est néanmoins possible d'admettre le résultat d'une question (qui est toujours explicité) et de passer à la question suivante si l'on est bloqué.*

Soit $\mathbb{D} = D(0,1)$ le disque unité ouvert de centre 0 et de rayon 1 du plan complexe. Soit $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions continues de $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont de plus holomorphes dans $\mathbb{D}$. Pour tout $\alpha \in]0,1[$, on pose

$$\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}) := \Big\{ f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})\,;\, \sup_{\substack{\theta,\varphi\in[0,2\pi]\\ \theta\neq\varphi}} \Big(\frac{|f(e^{i\theta}) - f(e^{i\varphi})|}{|\theta-\varphi|^\alpha}\Big) = c_{f,\alpha} < \infty \Big\}.$$

L'objectif du problème est de montrer que si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ est telle que

$$\sup_{\substack{z,w\in\overline{\mathbb{D}}\\ z\neq w}} \Big(\frac{\big||f(z)| - |f(w)|\big|}{|z-w|^\alpha}\Big) = C_{f,\alpha} < +\infty,$$

alors $f \in \mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$.

Partie I

On suppose dans toute cette première partie que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ et que $|f(z)| \leq 1$ pour tout z dans $\mathbb{D}$. Pour tout $z \in \mathbb{D}$, on désigne aussi par $D_z \subset \mathbb{D}$ le disque ouvert de centre z et de rayon $1 - |z|$ et l'on pose

$$M_z(f) := \sup_{\zeta\in D_z} |f(\zeta)|.$$

I.1. Que peut-on dire de f si $|f(0)| = 1$? Montrer que, dans ce cas, f est dans $\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$ pour tout $\alpha \in]0,1[$. Montrer que toute fonction constante dans $\overline{\mathbb{D}}$ est dans $\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$ pour tout $\alpha \in]0,1[$.

I.2. On suppose à partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette partie I que $|f(0)| < 1$ et que f n'est pas constante dans $\mathbb{D}$. Montrer que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Montrer ensuite que l'application

$$\Phi \ : z \in \overline{\mathbb{D}} \longmapsto \frac{z - f(0)}{1 - \overline{f(0)}\, z}$$

est bien définie dans $\overline{\mathbb{D}}$ et que $\Phi \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$. Vérifier que Φ réalise une bijection de $\overline{\mathbb{D}}$ dans lui-même et que l'on a aussi $\Phi^{-1} \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$. Montrer que l'on a $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ si $g = \Phi \circ f$.

I.3. Prouver le lemme des zéros de Schwarz en utilisant seulement la version <u>locale</u> du principe du maximum et non (comme cela est fait dans le cours) la version globale : *si $g \ : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est une fonction holomorphe telle que $g(0) = 0$, alors*

- *d'une part $|g(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ et $|g'(0)| \leq 1$;*
- *d'autre part, s'il existe $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tel que $|g(\zeta)| = |\zeta|$ <u>ou</u> si $|g'(0)| = 1$, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $g(z) = e^{i\theta}\, z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.*

I.4. En appliquant le lemme de Schwarz à une fonction $g \ : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ convenable, déduire des résultats établis à la question **I.2** les inégalités

$$|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2 \leq 2\big(1 - |f(0)|\big).$$

I.5. Soit z un nombre complexe arbitraire dans $\mathbb{D}$. Pourquoi a-t'on l'inégalité $M_z(f) > 0$? Montrer que pour tout $w \in \mathbb{D}$, on a $z + w(1 - |z|) \in D_z \subset \mathbb{D}$. En raisonnant ensuite comme à la question **I.4**, mais cette fois avec la fonction

$$f_z \ : w \in \mathbb{D} \longmapsto \frac{f\big(z + w(1 - |z|)\big)}{M_z(f)}$$

(on montrera que l'on peut bien le faire), montrer que l'on a le jeu d'inégalités :

$$\forall\, z \in \mathbb{D}, \quad (1 - |z|)\, |f'(z)| \leq 2\, \big(M_z(f) - |f(z)|\big). \qquad (*)$$

I.6. Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ une fonction non constante. Montrer que le jeu d'inégalités $(*)$ établi à la question **I.5** reste toujours valable pour cette fonction f.

Partie II

Soit $\alpha \in]0, 1[$. On considère dans cette partie une fonction $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$, non constante dans $\mathbb{D}$, telle que

$$\sup_{\substack{z, w \in \overline{\mathbb{D}} \\ z \neq w}} \left(\frac{\big||f(z)| - |f(w)|\big|}{|z - w|^\alpha} \right) = C_{f,\alpha} < +\infty. \qquad (\dagger)$$

II.1. Soit $z \in \mathbb{D}$. Déduire de l'inégalité (†) une majoration de $|f|$ (en fonction de $|f(z)|$ et de $|z|$) sur le bord du disque D_z (de centre, on le rappelle, z, et de rayon $1-|z|$). En déduire une majoration (en fonction de $|z|$) pour $M_z(f) - |f(z)|$ (citer précisément le résultat du cours invoqué à l'appui du raisonnement). Déduire du jeu d'inégalités $(*)$ établi aux questions **I.5** puis **I.6**, que l'on a :

$$\forall\, z \in \mathbb{D}, \quad |f'(z)| \leq \frac{2\, C_{f,\alpha}}{(1-|z|)^{1-\alpha}}. \tag{$**$}$$

II.2. Soient $0 < r_1 \leq r_2 < 1$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Déduire du théorème fondamental de l'analyse que l'on peut écrire :

$$f(r_2\, e^{i\theta}) - f(r_1\, e^{i\theta}) = e^{i\theta} \int_{r_1}^{r_2} f'(\rho\, e^{i\theta})\, d\rho.$$

En utilisant le jeu d'inégalités $(**)$ établi à la question **II.1**, vérifier que la fonction

$$\rho \in [0,1[\longmapsto f'(\rho\, e^{i\theta})$$

est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1[$ et que l'on a, pour tout $r \in]0,1[$,

$$f(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta}) = e^{i\theta} \int_{[r,1[} f'(\rho\, e^{i\theta})\, d\rho.$$

En déduire les inégalités

$$\forall\, r \in]0,1[, \quad \forall\, \theta \in [0,2\pi], \quad \left|f(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})\right| \leq \frac{2\, C_{f,\alpha}}{\alpha}\, (1-r)^{\alpha}.$$

II.3. Soit $r \in]0,1[$ et $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$. Vérifier

$$f(r\, e^{i\phi}) - f(r\, e^{i\theta}) = ir \int_{\theta}^{\phi} f'(r\, e^{it})\, e^{it}\, dt.$$

En utilisant à nouveau le jeu d'inégalités $(**)$ établi à la question **II.1**, en déduire :

$$\left|f(r\, e^{i\phi}) - f(r\, e^{i\theta})\right| \leq 2\, C_{f,\alpha}\, \frac{|\phi - \theta|}{(1-r)^{1-\alpha}}.$$

II.4. On suppose que $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$ satisfont de plus $0 < \phi - \theta < 1$. Soient $0 < r_1 \leq r_2 < 1$ et $\Gamma_{\theta,\phi,r_1,r_2}$ le chemin continu (d'origine $r_2\, e^{i\theta}$, d'extrémité $r_2\, e^{i\phi}$) représenté en gras sur la figure ci-dessous.

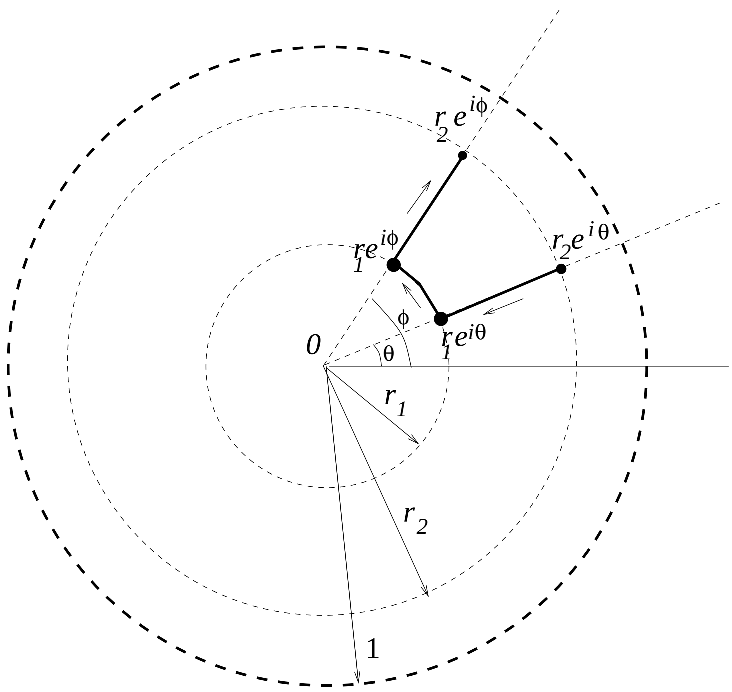

FIGURE 1 – Le chemin $\Gamma_{\theta,\phi,r_1,r_2}$

Que vaut l'intégrale curviligne

$$I(\theta,\phi,r_1,r_2) := \int_{\Gamma_{\theta,\phi,r_1,r_2}} f'(\zeta)\,d\zeta \quad ?$$

Calculer, pour $r \in]0,1[$ fixé, la limite de $I(\theta,\phi,r,r_2)$ lorsque r_2 tend vers 1 par valeurs (strictement) inférieures. En utilisant les inégalités établies aux questions **II.2** et **II.3**, montrer que

$$\Big|\lim_{r_2\to 1_-}\big(I(\theta,\phi,r,r_2)\big)\Big| \le 2\,C_{f,\alpha}(1-r)^{\alpha}\Big(\frac{2}{\alpha}+\frac{\phi-\theta}{1-r}\Big).$$

En choisissant $r \in]0,1[$ convenable (en fonction de $\phi-\theta$), en déduire l'inégalité

$$|f(e^{i\phi})-f(e^{i\theta})| \le \frac{2(\alpha+2)}{\alpha}\,C_{f,\alpha}(\phi-\theta)^{\alpha}.$$

En déduire que $f \in \mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$.

II.5. On suppose maintenant $\alpha \ge 1$ et l'on considère une fonction $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ telle que la condition (†) soit remplie. Vérifier que l'inégalité $(**)$ établie à la question **II.1** reste valable. Que peut-on dire alors de f si $\alpha > 1$ (on pensera à utiliser le principe du maximum pour f') ? Si $\alpha = 1$, vérifier que f est Lipschitzienne dans $\overline{\mathbb{D}}$.

Exercice 1.

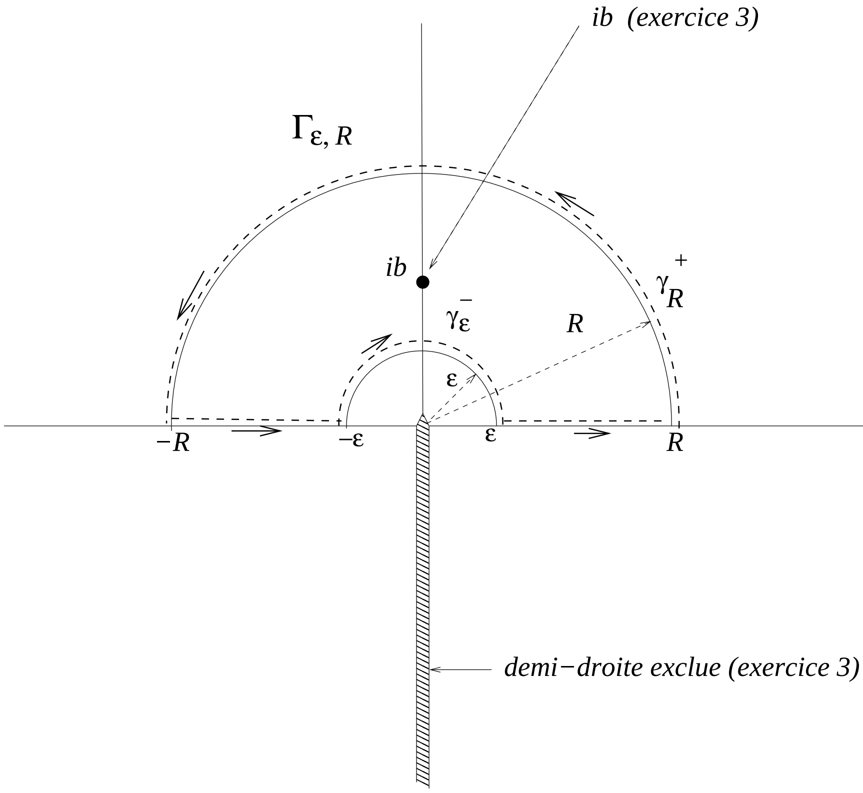

FIGURE 2 – Le chemin $\Gamma_{\epsilon,R}$ (exercices 1 et 3)

1. Soient a et b deux nombres positifs ou nuls distincts. Montrer que la fonction

$$f \ : z \in \mathbb{C} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ \infty & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$$

est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$. Calculer ses pôles dans $\mathbb{C}$ et les résidus en ces pôles de la forme $f(\zeta)\, d\zeta$. Pourquoi la singularité à l'infini de f est-elle essentielle ? Que vaut le résidu à l'infini de la forme $f(\zeta)\, d\zeta$?

2. Soient $0 < \epsilon < R < \infty$. On introduit le lacet continu $\Gamma_{\epsilon,R}$ représenté sur la figure 2 ci-dessus (et parcouru une fois). On note γ_R^+ le tronçon du chemin $\Gamma_{\epsilon,R}$ ayant pour support le demi-cercle de rayon R situé dans le demi-plan $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ (*cf.* la figure 2). Vérifier

$$\lim_{R \to +\infty} \Big(\int_{\gamma_R^+} f(\zeta)\, d\zeta \Big) = 0.$$

3. On rappelle (*cf.* la remarque 3.3 du cours) que la partie polaire $\mathrm{Pol}_{z_0}[f]$ d'une fonction holomorphe près de $z_0 \in \mathbb{C}$ et présentant une singularité isolée en z_0 est la somme des termes impliquant une puissance <u>négative</u> $(z - z_0)^{-k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, figurant dans le développement de Laurent de f en z_0, donc des termes de ce développement qui sont vraiment <u>singuliers</u> en z_0. La fonction f s'écrit donc près de z_0 comme somme de la partie polaire $\mathrm{Pol}_{z_0}[f]$ (holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$) et d'une fonction holomorphe au voisinage de z_0. Calculer la partie polaire $z \in \mathbb{C}^* \mapsto \mathrm{Pol}_0[f](z)$, puis l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma_\epsilon^-} \mathrm{Pol}_0[f](\zeta)\, d\zeta$$

si γ_ϵ^- désigne le tronçon du lacet $\Gamma_{\epsilon,R}$ ayant pour support le demi-cercle de rayon ϵ situé dans le demi-plan $\{\mathrm{Im}\, z \geq 0\}$ (*cf.* encore la figure 2). Montrer que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Big(\int_{\gamma_\epsilon^-} \big(f(\zeta) - \mathrm{Pol}_0[f](\zeta)\big)\, d\zeta \Big) = 0.$$

4. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}\, dx$$

est absolument convergente (au sens de Lebesgue) et calculer sa valeur.

Exercice 2. Soit E la bande verticale ouverte

$$E := \{z = x + iy \in \mathbb{C}\,;\, 0 < x < 1\}$$

du plan complexe et ∂E sa frontière, soit $\partial E = \{i\mathbb{R}\} \cup \{1 + i\mathbb{R}\}$.

1. Montrer que la fonction

$$h\ : z \in \mathbb{C} \longmapsto \exp\big(- i \exp(i\pi z)\big)$$

est une fonction entière, bornée en module par une constante que l'on précisera sur ∂E, mais pourtant non bornée en module dans E (on pensera à étudier le comportement de cette fonction sur la droite verticale $1/2 + i\mathbb{R}$, incluse dans E).

On se donne à partir de maintenant une fonction $f\ : \overline{E} \to \mathbb{C}$, continue dans $\overline{E}$, holomorphe dans E, bornée en module par K sur $\overline{E}$ et par M sur ∂E. On se propose de vérifier qu'alors $|f| \leq M$ dans $\overline{E}$.

2. On introduit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\ : \overline{E} \to \mathbb{C}$ est définie par

$$\forall\, z \in \overline{E}, \quad f_n(z) = f(z)\, \exp(z^2/n).$$

Vérifier les inégalités :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, z \in \overline{E}, \quad |f_n(z)| \leq K \, \exp\Big(\frac{1-y^2}{n}\Big).$$

3. En déduire qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un nombre strictement positif Y_n tel que :

$$\forall\, z = x+iy \in \overline{E} \text{ tel que } |y| \geq Y_n, \quad |f_n(z)| \leq M \, \exp(1/n). \qquad (\star)$$

4. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, Δ_n le rectangle fermé $[0,1]\times[-Y_n, Y_n]$ du plan complexe. Démontrer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sup_{\Delta_n} |f_n| \leq M \, \exp(1/n).$$

En combinant avec le résultat $(\star)$ établi à la question **3**, montrer que l'on a $|f_n| \leq M e^{1/n}$ dans $\overline{E}$. En déduire :

$$\forall\, z \in \overline{E}, \quad |f(z)| \leq M.$$

Exercice 3. Soit $z \mapsto \log(z)$ la fonction définie dans l'ouvert $U = \mathbb{C}\setminus\{i\mathbb{R}^-\} = \mathbb{C} \setminus \{-iy\,;\, y \geq 0\}$ par

$$f(z) = \log z = \log |z| + i \arg_{]-\pi/2, 3\pi/2[}(z) \quad \forall\, z \in U.$$

1. Vérifier que f est holomorphe dans U ; que vaut f' ? (on utilisera l'expression de l'opérateur de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires, ainsi que celle de son conjugué, *cf.* l'exemple 1.3 du cours). Calculer $\log(iy)$ pour $y > 0$ et $\log(x)$, $\log(-x)$ pour $x > 0$.
2. Soit $b > 0$. Vérifiez que la fonction

$$f_b \ : z \in U \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\log z}{(z^2+b^2)^2} & \text{si} \quad z \neq ib \\ \infty & \text{si} \quad z = ib \end{cases}$$

est méromorphe dans U. Quel est l'ordre de son pôle ib ? Calculer la dérivée dans U de la fonction holomorphe :

$$z \in U \longmapsto \frac{\log z}{(z+ib)^2} = f_b(z)(z-ib)^2$$

et en déduire la valeur de $\mathrm{Res}_{ib}[f_b(\zeta)\, d\zeta]$ (on pourra, malgré les avertissements prodigués en cours, utiliser ici quand même la formule de la remarque 3.7 du polycopié).

3. Calculer, si $0 < \epsilon < b < R$, l'intégrale

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f_b(\zeta)\, d\zeta\,,$$

où $\Gamma_{\epsilon,R}$ désigne encore le lacet continu (parcouru une seule fois) figurant sur la figure 2 de l'exercice 1.

4. Montrer (on se réfère aux notations de la figure 2) que

$$\lim_{R\to+\infty}\Big(\int_{\gamma_R^+} f_b(\zeta)\, d\zeta\Big) = \lim_{\epsilon\to 0_+}\Big(\int_{\gamma_\epsilon^-} f_b(\zeta)\, d\zeta\Big) = 0,$$

lorsque γ_R^+ correspond au tronçon du chemin $\Gamma_{\epsilon,R}$ le long du demi-cercle de rayon R et γ_ϵ^- correspond au tronçon du chemin $\Gamma_{\epsilon,R}$ le long du demi-cercle de rayon ϵ (*cf.* la figure 2).

5. Montrer que les deux intégrales

$$I := \int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+b^2)^2}\, dx \quad , \quad J := \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+b^2)^2}$$

sont toutes deux absolument convergentes au sens de Lebesgue. Déduire des résultats établis aux questions **3** et **4** la valeur de $2I + i\pi J$. Donner les valeurs exactes de I et J.

FIN