Semestre 7, Année 2012-2013 SESSION 1

UE : N1MA7104

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Nota. *Le texte est composé d'un problème (en deux parties* **I** *et* **II***) et de trois exercices. On pourra cependant ne choisir que* <u>*deux*</u> *exercices parmi les exercices* **1**, **2**, **3** *proposés (préciser alors lesquels dans la rédaction), l'exercice restant devenant dans ce cas optionnel et donc hors barème.*

Problème

Nota. *Si les questions du problème s'enchaînent, il est néanmoins possible d'admettre le résultat d'une question (qui est toujours explicité) et de passer à la question suivante si l'on est bloqué.*

Soit $\mathbb{D} = D(0,1)$ le disque unité ouvert de centre 0 et de rayon 1 du plan complexe. Soit $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions continues de $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\mathbb{C}$ qui de plus holomorphes dans $\mathbb{D}$. Pour tout $\alpha \in]0,1[$, on pose

$$\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}) := \Big\{ f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})\,;\ \sup_{\substack{\theta,\varphi\in[0,2\pi]\\ \theta\neq\varphi}} \Big(\frac{|f(e^{i\theta}) - f(e^{i\varphi})|}{|\theta-\varphi|^\alpha}\Big) = c_{f,\alpha} < \infty \Big\}.$$

L'objectif du problème est de montrer que si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ est telle que

$$\sup_{\substack{z,w\in\overline{\mathbb{D}}\\ z\neq w}} \frac{\big||f(z)| - |f(w)|\big|}{|z-w|^\alpha} = C_{f,\alpha} < +\infty,$$

alors $f \in \mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$.

Partie I

On suppose dans toute cette première partie que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ et que $|f(z)| \le 1$ pour tout z dans $\mathbb{D}$. Pour tout $z \in \mathbb{D}$, on désigne aussi par $D_z \subset \mathbb{D}$ le disque ouvert de centre z et de rayon $1 - |z|$ et l'on pose

$$M_z(f) := \sup_{\zeta\in D_z} |f(\zeta)|.$$

I.1. *Que peut-on dire de f si $|f(0)| = 1$? Montrer que, dans ce cas, f est dans $\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$ pour tout $\alpha \in]0,1[$. Montrer que toute fonction constante dans $\overline{\mathbb{D}}$ est dans $\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$ pour tout $\alpha \in]0,1[$.*

Si $|f(0)| = 1$, la fonction $|f|$ (qui vérifie d'autre part $|f(z)| \le 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$) présenterait un maximum local (d'ailleurs en fait global) dans $\mathbb{D}$. Comme la fonction f est holomorphe dans $\mathbb{D}$ et que $\mathbb{D}$ est connexe, le principe du maximum (version locale, Proposition 2.9 du cours) assure qu'alors f serait constante dans $\mathbb{D}$, donc dans $\overline{\mathbb{D}}$ par continuité. Si tel est le cas, on a, pour tout $\alpha \in]0,1[$,

$$\sup_{\substack{\theta,\varphi\in[0,2\pi] \\ \theta\neq\varphi}} \Big(\frac{|f(e^{i\theta}) - f(e^{i\varphi})|}{|\theta-\varphi|^\alpha}\Big) = 0 < +\infty$$

et par conséquent $f \in \mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$. Si f est constante dans $\overline{\mathbb{D}}$, on a $c_{f,\alpha} = 0 < +\infty$ pour tout $\alpha \in]0,1[$, donc $f \in \mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$ pour tout $\alpha \in]0,1[$.

I.2. *On suppose à partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette partie I que $|f(0)| < 1$ et que f n'est pas constante dans $\mathbb{D}$. Montrer que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Montrer ensuite que l'application*

$$\Phi \ : z \in \overline{\mathbb{D}} \longmapsto \frac{z - f(0)}{1 - \overline{f(0)}\, z}$$

est bien définie dans $\overline{\mathbb{D}}$ et que $\Phi \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$. Vérifier que Φ réalise une bijection de $\overline{\mathbb{D}}$ dans lui-même et que l'on a aussi $\Phi^{-1} \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$. Montrer que l'on a $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ si $g = \Phi \circ f$.

On sait déjà que $f(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ par hypothèses. Comme f n'est pas constante, $f(\mathbb{D})$ est ouvert (d'après le principe de l'application ouverte, version *light*, Corollaire 2.12 du cours), et par conséquent $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Comme $|f(0)| < 1$, le dénominateur $z \mapsto 1 - \overline{f(0)}\, z$ figurant dans l'expression de Φ ne s'annule pas dans $\overline{\mathbb{D}}$; son seul zéro éventuel est en effet $1/\overline{f(0)}$ (si $f(0)$ est non nul), qui est un point de $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. La fonction Φ est donc bien définie dans $\overline{\mathbb{D}}$. Elle y est continue comme quotient de fonctions continues et est de plus holomorphe dans $\mathbb{D}$ comme quotient de deux fonctions polynomiales, donc de fonctions holomorphes, la fonction au dénominateur ne s'annulant pas dans $\overline{\mathbb{D}}$ (donc *a fortiori* dans $\mathbb{D}$). On a donc $\Phi \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$.

On remarque que $|\Phi(e^{i\theta})| = 1$ pour tout $\theta \in [0,2\pi]$ puisque

$$|e^{i\theta} - f(0)| = |e^{-i\theta} - \overline{f(0)}| = |1 - \overline{f(0)}\, e^{i\theta}| \quad \forall\, \theta \in [0,2\pi].$$

On a donc $\Phi(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ d'après le principe du maximum (version globale, Proposition 2.10 du cours). L'application Φ est donc surjective. On vérifie d'autre part que, pour tout $Z \in \overline{\mathbb{D}}$,

$$\Phi(z) = Z \Longleftrightarrow z = \frac{Z + f(0)}{1 + \overline{f(0)}\, Z},$$

ce qui prouve que Φ est aussi injective (donc bijective de $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\overline{\mathbb{D}}$) et que l'application inverse Φ^{-1} est exactement du même type que Φ (on l'obtient juste en remplaçant $f(0)$ par $-f(0)$ dans l'expression de Φ). Il en résulte que $\Phi^{-1} \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ comme Φ. Comme $\Phi(\overline{\mathbb{D}}) = \overline{\mathbb{D}}$ et que $f(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ par hypothèses, on a bien $(\Phi \circ f)(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Mais $\Phi \circ f$ n'est pas constante dans $\mathbb{D}$, ninon f le serait (par composition à gauche avec Φ^{-1}). D'après le principe de l'application ouverte, version *light* (Corollaire 2.12 du cours), l'image de $\Phi \circ f$ est ouverte. On a donc bien en fait $(\Phi \circ f)(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

I.3. *Prouver le lemme des zéros de Schwarz en utilisant seulement la version* <u>*locale*</u> *du principe du maximum et non (comme cela est fait dans le cours) la version globale : si $g\ : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est une fonction holomorphe telle que $g(0) = 0$, alors*

- *d'une part $|g(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ et $|g'(0)| \leq 1$;*
- *d'autre part, s'il existe $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tel que $|g(\zeta)| = |\zeta|$* <u>*ou*</u> *si $|g'(0)| = 1$, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $g(z) = e^{i\theta}\, z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.*

Pour tout $\epsilon \in]0,1[$, la fonction $z \mapsto g(z)/z$ est une fonction continue dans $\overline{D(0,1-\epsilon)} \setminus \{0\}$ et holomorphe dans $D(0,1-\epsilon) \setminus \{0\}$. Comme $g(0) = 0$, on a $g(z) = z + o(|z|)$ au voisinage de l'origine d'après le théorème d'analyticité (Théorème 2.6), ce qui implique que la singularité en $z = 0$ est fictive. Cette fonction $z \mapsto g(z)/z$ se prolonge donc continuement en une fonction continue dans $\overline{D(0,1-\epsilon)}$ et holomorphe dans $D(0,1-\epsilon)$. D'après le principe du maximum, version locale (Proposition 2.9 du cours), que l'on demandait d'utiliser ici, le maximum de la fonction continue $z \mapsto |g(z)|/|z|$ dans $\overline{D(0,1-\epsilon)}$ est forcément atteint en un point du cercle de centre 0 et de rayon $1-\epsilon$. Or, sur ce cercle, on a $|g(z)|/|z| \leq 1/(1-\epsilon)$. En faisant tendre ϵ vers 0, on en déduit que $|g(z)/z| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et que $|\big(g(z)/z\big)_{z=0}| = |g'(0)| \leq 1$. S'il existe $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tel que $|g(\zeta)| = |\zeta|$ ou bien si $|g'(0)| = 1$, cela signifierait que la fonction holomorphe $z \in \mathbb{D} \mapsto g(z)/z$ ainsi prolongée est telle que son module admette un maximum global (donc local) en un point de $\mathbb{D}$. Comme $\mathbb{D}$ est connexe, la fonction $z \mapsto g(z)/z$ serait constante dans $\mathbb{D}$, ce qui signifierait $g(z) = c\,z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ (avec $c \in \mathbb{C}$ indépendant de z). Comme $|g(\zeta)| = |\zeta|$ pour un certain $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ ou $|g'(0)| = 1$, on aurait bien $c = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$.

I.4. *En appliquant le lemme de Schwarz à une fonction $g\ : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ convenable, déduire des résultats établis à la question* **I.3** *les inégalités*

$$|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2 \leq 2\big(1 - |f(0)|\big).$$

On considère la fonction $g\ : z \in \mathbb{D} \mapsto \Phi(f(z))$. Cette fonction est holomorphe dans $\mathbb{D}$ comme composée de fonctions holomorphes et vérifie $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ d'après le résultat établi à la question **I.2**. On a donc, d'après le lemme de Schwarz, $|g'(0)| \leq 1$, soit, d'après la règle de Leibniz :

$$\big|\Phi'(f(0))\, f'(0)\big| = |f'(0)| \times |\Phi'(f(0))| = |f'(0)| \times \frac{1}{1 - |f(0)|^2} \leq 1,$$

ce qui donne la première inégalité voulue. La seconde inégalité résulte simplement de ce que

$$2(1 - |f(0)|) - (1 - |f(0)|^2) = 1 - 2\,|f(0)| + |f(0)|^2 = (1 - |f(0)|)^2 \geq 0.$$

I.5. *Soit z un nombre complexe arbitraire dans $\mathbb{D}$. Pourquoi a-t'on l'inégalité $M_z(f) > 0$? Montrer que pour tout $w \in \mathbb{D}$, on a $z + w(1 - |z|) \in D_z \subset \mathbb{D}$. En raisonnant ensuite comme à la question* **I.4***, mais cette fois avec la fonction*

$$f_z \ : w \in \mathbb{D} \longmapsto \frac{f\big(z + w(1 - |z|)\big)}{M_z(f)}$$

(on montrera que l'on peut bien le faire), montrer que l'on a le jeu d'inégalités :

$$\forall\, z \in \mathbb{D}, \quad (1 - |z|)\, |f'(z)| \leq 2\, \big(M_z(f) - |f(z)|\big). \qquad (*)$$

Si l'on avait $M_z(f) = 0$, la fonction f serait, du fait de la définition de $M_z(f)$, identiquement nulle dans le disque D_z, donc identiquement nulle dans $\mathbb{D}$ d'après le principe des zéros isolés (Théorème 2.9 du cours). Or ceci est exclu par hypothèses, donc $M_z(f) > 0$.
Si $|w| < 1$, on a $z + w\,(1 - |z|) \in \mathbb{D}_z$ par définition de D_z.
La fonction f_z (qui est donc bien, de par ce qui précède, définie dans $\mathbb{D}$ comme fonction composée), est holomorphe dans $\mathbb{D}$ (car la composée d'une fonction holomorphe et d'une fonction affine, donc holomorphe, l'est). D'autre part, d'après la règle de Leibniz :

$$f_z'(w) = (1 - |z|)\, \frac{f'\big(z + w\,(1 - |z|)\big)}{M_z(f)} \quad \forall\, w \in \mathbb{D}.$$

D'après la définition de $M_z(f)$, on a

$$\forall\, w \in \mathbb{D},\ f(z + w\,(1 - |z|)) \leq M_z(f).$$

Le principe de l'application ouverte assure, puisque la fonction f_z n'est pas constante dans $\mathbb{D}$ (sinon f le serait du fait du principe des zéros isolés) que son image est ouverte. Comme cette image est incluse dans $\overline{\mathbb{D}}$, elle est incluse en fait dans $\mathbb{D}$. La fonction f_z est donc bien une fonction holomorphe de $\mathbb{D}$

dans $\mathbb{D}$. On peut appliquer à f_z le lemme de Schwarz comme on l'a appliqué à f à la question **I.4**. On a donc (*cf.* la seconde inégalité établie en **I.4**) :

$$|f_z'(0)| \leq 2\,(1 - |f_z(0)|).$$

Or $f_z'(0) = (1-|z|)\,f'(z)/M_z(f)$ et $f_z(0) = f(z)/M_z(f)$, d'où l'inégalité voulue en multipliant les deux membres par $M_z(f) > 0$.

I.6. *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ une fonction non constante. Montrer que le jeu d'inégalités $(*)$ établi à la question* **I.5** *reste toujours valable pour cette fonction f.*

Comme f est continue dans le compact $\overline{\mathbb{D}}$ et non identiquement nulle (car non constante), on a $\sup_{\overline{\mathbb{D}}} |f| = \max_{\overline{\mathbb{D}}} |f| = M \in]0, +\infty[$. En appliquant ce qui a été fait dans les questions **I.2** et **I.4** à la fonction $z \in \overline{\mathbb{D}} \mapsto f(z)/M$ (qui satisfait cette fois $f(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ et même $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ d'après le principe de l'application ouverte), on obtient bien les inégalités voulues, divisées par M. Il suffit de les multiplier par M pour conclure.

Partie II

On considère dans cette partie une fonction $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$, non constante dans $\mathbb{D}$, telle que

$$\sup_{\substack{z,w \in \overline{\mathbb{D}} \\ z \neq w}} \left(\frac{\big||f(z)| - |f(w)|\big|}{|z-w|^\alpha} \right) = C_{f,\alpha} < +\infty. \tag{$\dagger$}$$

II.1. *Soit $z \in \mathbb{D}$. Déduire de l'inégalité $(\dagger)$ une majoration de $|f|$ (en fonction de $|f(z)|$ et de $|z|$) sur le bord du disque D_z (de centre, on le rappelle, z, et de rayon $1-|z|$). En déduire une majoration (en fonction de $|z|$) pour $M_z(f) - |f(z)|$ (citer précisément le résultat du cours invoqué à l'appui du raisonnement). Déduire du jeu d'inégalités $(*)$ établi aux questions* **I.5** *puis* **I.6**, *que l'on a :*

$$\forall\, z \in \mathbb{D}, \quad |f'(z)| \leq \frac{2\, C_{f,\alpha}}{(1-|z|)^{1-\alpha}}. \tag{$**$}$$

Si w est un point du bord de D_z, on a $|z-w| = 1-|z|$. En utilisant l'inégalité $(\dagger)$, on a

$$|f(w)| - |f(z)| \leq C_{f,\alpha}\, |w-z|^\alpha = C_{f,\alpha}\,(1-|z|)^\alpha.$$

On a donc

$$\sup_{\partial D_z} |f| \leq |f(z)| + C_{f,\alpha}\,(1-|z|)^\alpha.$$

On déduit maintenant du principe du maximum, version globale (Proposition 2.10 du cours) que

$$M_z(f) := \sup_{D_z} |f| \leq \sup_{\partial D_z} |f| \leq |f(z)| + C_{f,\alpha}\,(1-|z|)^\alpha.$$

En reportant dans l'inégalité $(*)$ établie en **I.5**, puis en **I.6**, il vient :

$$(1-|z|)\,|f'(z)| \leq 2\,C_{f,\alpha}\,(1-|z|)^{\alpha}.$$

Ceci est valable pour tout $z \in \mathbb{D}$. On en déduit le jeu d'inégalités $(**)$ en divisant cette dernière inégalité par $1-|z|$.

II.2. *Soient* $0 < r_1 \leq r_2 < 1$ *et* $\theta \in [0, 2\pi]$. *Déduire du théorème fondamental de l'analyse que l'on peut écrire :*

$$f(r_2 e^{i\theta}) - f(r_1 e^{i\theta}) = e^{i\theta} \int_{r_1}^{r_2} f'(\rho\, e^{i\theta})\, d\rho.$$

En utilisant les inégalités $(**)$ *établies à la question* **II.1***, vérifier que la fonction*

$$\rho \in [0,1[\longmapsto f'(\rho\, e^{i\theta})$$

est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1[$ *et que l'on a, pour tout* $r \in]0,1[$,

$$f(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta}) = e^{i\theta} \int_{[r,1[} f'(\rho\, e^{i\theta})\, d\rho.$$

En déduire les inégalités

$$\forall\, r \in]0,1[, \quad \forall\, \theta \in [0,2\pi], \quad \big|f(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})\big| \leq \frac{2\,C_{f,\alpha}}{\alpha}\,(1-r)^{\alpha}.$$

La fonction

$$\rho \in]0,1[\longmapsto f(\rho\, e^{i\theta})$$

est de classe C^1 sur $]0,1[$, de dérivée

$$t \in]0,1[\longmapsto e^{i\theta}\, f'(\rho\, e^{i\theta})$$

puisque la fonction f est dérivable au sens complexe en tout point de $\mathbb{D}$ (car holomorphe) et de dérivée au sens complexe $z \in \mathbb{D} \mapsto f'(z)$. Le théorème fondamental de l'Analyse assure donc que

$$f(r_2 e^{i\theta}) - f(r_1 e^{i\theta}) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{d}{d\rho}[f(\rho\, e^{i\theta})]\, d\rho = e^{i\theta} \int_{r_1}^{r_2} f'(\rho\, e^{i\theta})\, d\rho.$$

D'après les inégalités $(**)$, on a

$$\forall\, \rho \in [0,1[, \quad |f'(\rho\, e^{i\theta})| \leq \frac{2C_{f,\alpha}}{(1-\rho)^{1-\alpha}}.$$

Or

$$\int_{[0,1[} \frac{d\rho}{(1-\rho)^{1-\alpha}} = -\frac{1}{\alpha}\Big[(1-\rho)^{\alpha}\Big]_0^1 = \frac{1}{\alpha} < +\infty.$$

La fonction $\rho \in [0,1[\longmapsto f'(\rho e^{i\theta})$ est donc bien intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1[$ car dominée en module sur cet intervalle par une fonction positive intégrable. Si l'on fixe $r_1 = r \in]0,1[$ et que l'on fait tendre r_2 vers 1 par valeurs (striuctement) inférieures, le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique donc et assure

$$\lim_{r_2 \to 1_-} \int_r^{r_2} f'(\rho\, e^{i\theta})\, d\rho = \int_{[r,1[} f'(\rho\, e^{i\theta})\, d\rho.$$

Comme d'autre part f est continue dans $\overline{\mathbb{D}}$, on déduit en passant à la limite dans

$$f(r_2 e^{i\theta}) - f(re^{i\theta}) = \int_r^{r_2} \frac{d}{d\rho}[f(\rho\, e^{i\theta})]\, d\rho = e^{i\theta} \int_r^{r_2} f'(\rho, e^{i\theta})\, d\rho$$

lorsque r_2 tend vers 1 par valeurs (strictement) inférieures que

$$f(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta}) = e^{i\theta} \int_{[r,1[} f'(\rho\, e^{i\theta})\, d\rho.$$

En majorant enfin le module de l'intégrale d'une fonction par l'intégrale du module de cette fonction, il vient :

$$\begin{aligned} \big|f(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})\big| \leq 2C_{f,\alpha} \int_{[r,1[} \frac{d\rho}{(1-\rho)^{1-\alpha}} &= -\frac{2\, C_{f,\alpha}}{\alpha}\Big[(1-\rho)^{\alpha}\Big]_r^1 \\ &= \frac{2\, C_{f,\alpha}}{\alpha}\,(1-r)^{\alpha}. \end{aligned}$$

II.3. *Soit $r \in]0,1[$ et $\theta, \phi \in [0,2\pi]$. Vérifier*

$$f(r\, e^{i\phi}) - f(r\, e^{i\theta}) = ir \int_\theta^\phi f'(r\, e^{it})\, e^{it}\, dt.$$

En utilisant à nouveau le jeu d'inégalités $(**)$ établi à la question **II.1**, *en déduire :*

$$\big|f(r\, e^{i\phi}) - f(r\, e^{i\theta})\big| \leq 2\, C_{f,\alpha} \frac{|\phi - \theta|}{(1-r)^{1-\alpha}}.$$

On suppose, pour fixer les idées, $\theta \leq \phi$. On utilise, comme à la question précédente, le théorème fondamental de l'analyse, appliqué à la fonction de classe C^1 sur $[0,1]$:

$$t \in [\theta, \phi] \longmapsto f(re^{it})$$

(l'arc de cercle de centre 0 joignant les deux points $re^{i\theta}$ et $re^{i\phi}$ reste complètement dans $\mathbb{D}$), dont la dérivée est, puisque f est dérivable au sens complexe en tout point de $\mathbb{D}$:

$$t \in [\theta, \phi] \longmapsto ir\, e^{it} f'(re^{it}).$$

Le théorème fondamental de l'analyse donne la formule :

$$f(r\, e^{i\phi}) - f(r\, e^{i\theta}) = ir \int_\theta^\varphi f'(r\, e^{it})\, e^{it}\, dt. \qquad (i)$$

On a

$$\left| r \int_\theta^\phi f'(\rho\, e^{it})\, e^{it}\, dt \right| \leq |\phi - \theta| \times r \sup_{t \in [\theta, \phi]} |f'(re^{it})| \leq 2\, r\, C_{f,\alpha} \frac{|\phi - \theta|}{(1-r)^{1-\alpha}} \qquad (ii)$$

d'après le jeu d'inégalités (∗∗). On en déduit, comme $r \leq 1$, l'inégalité demandée

$$\left| f(r\, e^{i\phi}) - f(r\, e^{i\theta}) \right| \leq 2\, C_{f,\alpha} \frac{|\phi - \theta|}{(1-r)^{1-\alpha}}$$

en combinant (i) et (ii).

II.4. *On suppose que $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$ avec de plus $0 < \phi - \theta < 1$. Soient $0 < r_1 \leq r_2 < 1$ et $\Gamma_{\theta,\phi,r_1,r_2}$ le chemin continu (d'origine $r_2\, e^{i\theta}$, d'extrémité $r_2\, e^{i\phi}$) représenté en gras sur la figure ci-dessous.*

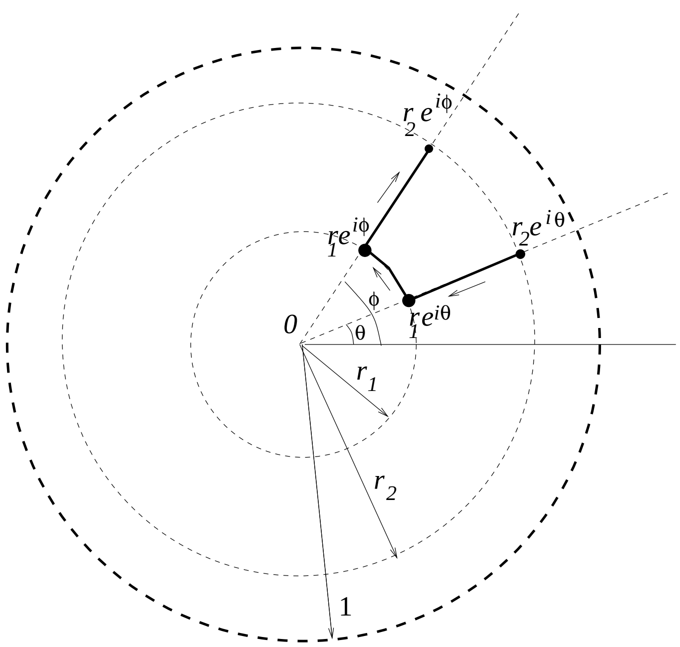

Figure 1 – Le chemin $\Gamma_{\theta,\phi,r_1,r_2}$

Que vaut l'intégrale curviligne

$$I(\theta,\phi,r_1,r_2) := \int_{\Gamma_{\theta,\phi,r_1,r_2}} f'(\zeta)\,d\zeta \quad ?$$

Calculer, pour $r \in]0,1[$ fixé, la limite de $I(\theta,\phi,r,r_2)$ lorsque r_2 tend vers 1 par valeurs (strictement) inférieures. En utilisant les inégalités établies aux questions **II.2** *et* **II.3**, *montrer que*

$$\big|\lim_{r_2\to 1_-}\big(I(\theta,\phi,r,r_2)\big)\big| \leq 2\,C_{f,\alpha}(1-\rho)^\alpha\Big(\frac{2}{\alpha}+\frac{\phi-\theta}{1-r}\Big).$$

En choisissant $r \in]0,1[$ convenable (en fonction de $\phi-\theta$), en déduire l'inégalité

$$|f(e^{i\phi})-f(e^{i\theta})| \leq \frac{2(\alpha+2)}{\alpha}\,C_{f,\alpha}(\phi-\theta)^\alpha.$$

En déduire que $f \in \mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$.

Comme la forme $f'(\zeta)\,d\zeta = df(\zeta)$ est exacte dans $\mathbb{D}$ et dérive du potentiel f, on a

$$I(\theta,\phi,r_1,r_2) := \int_{\Gamma_{\theta,\phi,r_1,r_2}} f'(\zeta)\,d\zeta = f(r_2\,e^{i\phi}) - f(r_2\,e^{i\theta})$$

d'après la Proposition 1.3 du cours ($r_2e^{i\phi}$ est l'extrémité du chemin, tandis que $r_2e^{i\theta}$ en est l'origine). Lorsque $r_1 = r$ est fixé et que r_2 tend vers 1 par valeurs inférieures, on a donc, puisque f est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$:

$$\lim_{r_2\to 1_-}\big(I(\theta,\phi,r,r_2)\big) = f(e^{i\phi}) - f(e^{i\theta}).$$

On observe, en découpant le chemin $\Gamma_{\theta,\phi,r,r_2}$ ($r < r_2 < 1$) en ses trois tronçons et en utilisant pour les deux tronçons rectilignes les majorations établies à la question **II.2** et pour le tronçon curviligne le long du cercle de rayon r la majoration établie à la question **II.3**, que

$$\big|I(\theta,\phi,r,r_2)\big| \leq 2\,C_{f,\alpha}(1-\rho)^\alpha\Big(\frac{2}{\alpha}+\frac{\phi-\theta}{1-r}\Big).$$

L'inégalité

$$\big|\lim_{r_2\to 1_-}\big(I(\theta,\phi,r,r_2)\big)\big| \leq 2\,C_{f,\alpha}(1-\rho)^\alpha\Big(\frac{2}{\alpha}+\frac{\phi-\theta}{1-r}\Big).$$

s'en déduit par passage à la limite puisque le majorant à droite ne dépend pas de r_2. On en déduit

$$|f(e^{i\phi})-f(e^{i\theta})| \leq \frac{2(\alpha+2)}{\alpha}\,C_{f,\alpha}(\phi-\theta)^\alpha$$

si l'on choisit r tel que $1-r=\phi-\theta$,n *i.e.* $r=1-(\phi-\theta)$ qui est dans $]0,1[$ puisque $0<\phi-\theta<1$. Si ϕ et θ sont des nombres pris dans $[0,2\pi]$, distincts modulo 2π, mais supposés assez proches ($|e^{i\phi}-e^{i\theta}|<\epsilon_0$ avec ϵ_0 uniforme correspondant à une longueur strictement inférieure à 1 radian pour l'arc de cercle le plus court joignant ces deux points), on a bien

$$|e^{i\phi}-e^{i\theta}|\leq k_f|\phi-\theta|^{\alpha}$$

pour une certaine constante k_f positive. Quitte à remplacer k_f par

$$c_{f,\alpha}=\frac{k_f}{\min(1,\epsilon_0^{\alpha})},$$

cette inégalité subsiste pour tout couple (θ,ϕ) tel que θ et ϕ ne soient pas congrus modulo 2π. La fonction f est donc bien dans $\mathcal{A}_{\alpha}(\mathbb{D})$.

II.5. *On suppose maintenant $\alpha\geq 1$ et l'on considère une fonction $f\in\mathcal{A}(\mathbb{D})$ telle que la condition $(\dagger)$ soit remplie. Vérifier que l'inégalité $(**)$ établie à la question* **II.1** *reste valable. Que peut-on dire alors de f si $\alpha>1$ (on pensera à utiliser le principe du maximum pour f') ? Si Si $\alpha=1$, vérifier que f est Lipschitzienne dans $\overline{\mathbb{D}}$.*

Seule la condition $\alpha>0$ a été utilisée dans la question **II.1**. L'inégalité $(**)$ reste donc valable. Si $\alpha>1$, on trouve donc

$$\forall\, z\in\mathbb{D},\quad |f'(z)|\leq 2\,C_{f,\alpha}\,(1-|z|)^{\alpha-1}.$$

Ceci implique, puisque $\alpha-1>0$ cette fois, que

$$\lim_{r\to 1_-}(\sup_{|\zeta|=r}|f'|)=0.$$

D'après le principe du maximum (version globale, Proposition 2.10 du cours), on en déduit que f' est identiquement nulle dans $\mathbb{D}$, donc que f est constante. Si $\alpha=1$, les inégalités $(**)$ assurent qu $|f'(z)|\leq 2\,C_{f,1}$. Si z et w sont deux points de $\mathbb{D}$, on en déduit en utilisant le fait que $\mathbb{D}$ soit convexe et l'inégalité des accroissements finis que

$$|f(z)-f(w)|\leq 2C_{f,1}\,|z-w|.$$

Ceci reste vrai pour tout couple (z,w) dans $\overline{\mathbb{D}}\times\overline{\mathbb{D}}$ puisque f est continue dans $\overline{\mathbb{D}}$. La fonction f est donc bien Lipschitzienne dans $\overline{\mathbb{D}}$.

Exercice 1.

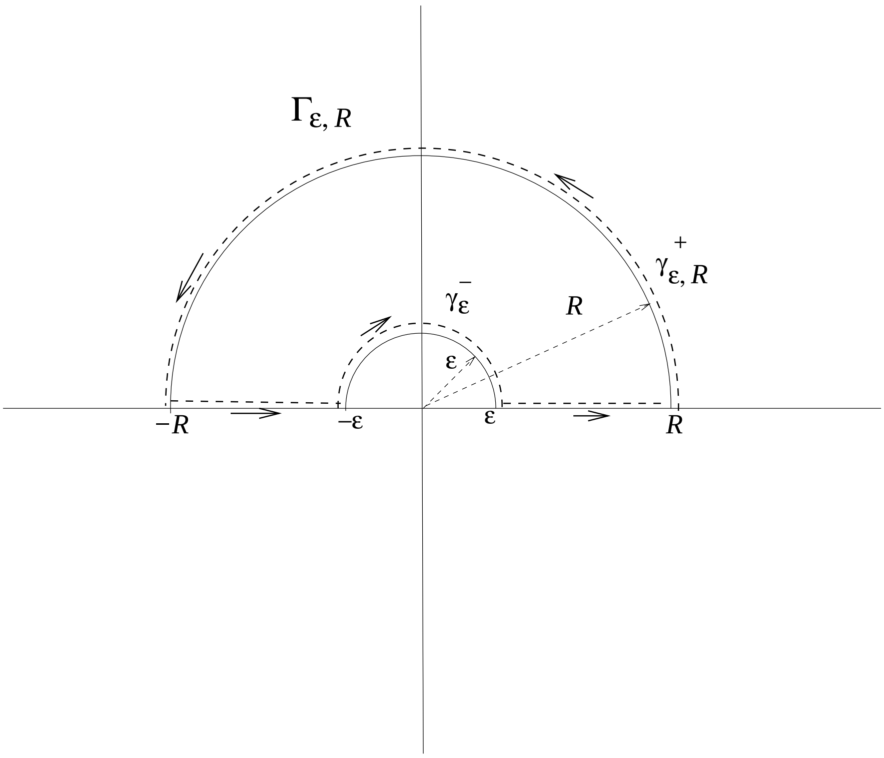

FIGURE 2 – Le chemin $\Gamma_{\epsilon,R}$

1. *Soient a et b deux nombres positifs ou nuls distincts. Montrer que la fonction*

$$f \ : z \in \mathbb{C} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ \infty & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$$

est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$. Calculez ses pôles dans $\mathbb{C}$ et les résidus en ces pôles de la forme $f(\zeta)\, d\zeta$. Pourquoi la singularité à l'infini de f est-elle essentielle ? Que vaut le résidu à l'infini de la forme $f(\zeta)\, d\zeta$?

Cette fonction est par définition une fonction à valeurs dans la sphère de Riemann $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Elle est holomorphe dans $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus f^{-1}(\infty)$ comme quotient de deux fonctions entières, à savoir la fonction

$$z \mapsto e^{iaz} - e^{ibz} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k (a^k - b^k)}{k!}\, z^k$$

et la fonction polynomiale $z \mapsto z^2$. Le développement en série de Laurent en la (seule) singularité isolée $z = 0$ est :

$$f(z) = \frac{i(a-b)}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k (b^{k+2} - a^{k+2})}{(k+2)!}\, z^k.$$

La partie polaire de ce développement est

$$\mathrm{Pol}_0[f] : z \longmapsto \frac{i(a-b)}{z}.$$

Elle ne contient qu'un nombre fini de puissances de z^{-k}, $k \in \mathbb{N}^*$ (en fait, seulement une). La singularité est donc inessentielle et la fonction f (valant ∞ en 0) est bien continue (Proposition 3.1 du cours) au point $z = 0$ comme fonction à valeurs dans $\mathbb{S}^2$. La fonction f est donc bien méromorphe dans $\mathbb{C}$, avec comme seul pôle $z = 0$. Le résidu au seul pôle $z = 0$ de la forme $f(\zeta)\, d\zeta$ vaut $i(a-b)$. Le développement de Laurent de la fonction f à l'infini s'écrit (voir le Corollaire 3.3 du cours) :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k (b^{k+2} - a^{k+2})}{(k+2)!}\, z^k + \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{i(b-a)}{z}.$$

La partie polaire

$$\mathrm{Pol}_\infty[f] : z \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k (b^{k+2} - a^{k+2})}{(k+2)!}\, z^k$$

(elle correspond à la partie polaire du développement de Laurent en $w = 0$ de $w \mapsto 1/w$) contient une infinité de puissances de z. La singularité en l'infini est donc essentielle. Le résidu en l'infini de la forme $f(\zeta)\, d\zeta$ vaut par définition ici encore $i(b-a)$ (Définition 3.4 du cours).

2. *Soient* $0 < \epsilon < R < \infty$. *On introduit le lacet continu* $\Gamma_{\epsilon,R}$ *représenté sur la figure 2 ci-dessus (et parcouru une fois). On note* $\gamma^+_{\epsilon,R}$ *le tronçon du chemin* $\Gamma_{\epsilon,R}$ *ayant pour support le demi-cercle de rayon* R *situé dans le demi-plan* $\{\mathrm{Im}\, z \geq 0\}$ *(cf. la figure 2). Vérifier*

$$\lim_{R \to +\infty} \Big(\int_{\gamma^+_{\epsilon,R}} f(\zeta)\, d\zeta \Big) = 0.$$

On majore cette intégrale curviligne par :

$$\Big| \int_{\gamma^+_{\epsilon,R}} f(\zeta)\, d\zeta \Big| \leq \pi R \times \sup_{|\zeta| = R, \mathrm{Im}\, \zeta \geq 0} |f(\zeta)|.$$

En remarquant que
$$|e^{ix\zeta}| = e^{-x\operatorname{Im}\zeta}$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\sup_{|\zeta|=R, \operatorname{Im}\zeta\geq 0} |f(\zeta)| \leq \frac{2}{R^2}.$$
On a donc
$$\Big|\int_{\gamma^+_{\epsilon,R}} f(\zeta)\, d\zeta\Big| \leq 2\pi/R,$$
d'où le résultat puisque $2\pi/R$ tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini.

3. *On rappelle (cf. la remarque 3.3 du cours) que la partie polaire* $\mathrm{Pol}_{z_0}[f]$ *d'une fonction holomorphe près de* $z_0 \in \mathbb{C}$ *et présentant une singularité isolée en* z_0 *est la somme des termes impliquant une puissance négative* $(z-z_0)^{-k}$*,* $k \in \mathbb{N}^*$*, figurant dans le développement de Laurent de* f *en* z_0*, donc des termes de ce développement qui sont vraiment singuliers en* z_0*. La fonction* f *s'écrit donc près de* z_0 *comme somme de la partie polaire* $\mathrm{Pol}_{z_0}[f]$ *(holomorphe dans* $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$*) et d'une fonction holomorphe au voisinage de* z_0*. Calculer la partie polaire* $z \in \mathbb{C}^* \mapsto \mathrm{Pol}_0[f](z)$*, puis l'intégrale curviligne*
$$\int_{\gamma^-_\epsilon} \mathrm{Pol}_0[f](\zeta)\, d\zeta$$
si γ^-_ϵ *désigne le tronçon du lacet* $\Gamma_{\epsilon,R}$ *ayant pour support le demi-cercle de rayon* ϵ *situé dans le demi-plan* $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ *(cf. encore la figure 2). Montrer que*
$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{\gamma^-_\epsilon} \big(f(\zeta) - \mathrm{Pol}_0[f](\zeta)\big)\, d\zeta\Big) = 0.$$

On a vu à la question **1** que
$$\mathrm{Pol}_0[f] : z \mapsto \frac{i(a-b)}{z}.$$

Le calcul de l'intégrale curviligne demandé donne en paramétrant ($\zeta = e^{i\theta}$, θ variant de π à 0),
$$\int_{\gamma^-_\epsilon} \mathrm{Pol}_0[f](\zeta)\, d\zeta = i(a-b) \times i \int_\pi^0 d\theta = \pi(a-b).$$

La fonction
$$\mathrm{Reg}_0[f] : z \longmapsto f(z) - \mathrm{Pol}_0[f](z)$$

est une fonction holomorphe au voisinage de l'origine (c'est même en fait ici une fonction entière). Elle est donc bornée en module (par exemple par C) au voisinage de l'origine. Comme

$$\Big| \int_{\gamma_\epsilon^-} \mathrm{Reg}_0[f](\zeta)\, d\zeta \Big| \le C\pi\epsilon,$$

pour ϵ assez petit, on a bien

$$\lim_{\epsilon\to 0} \Big(\int_{\gamma_\epsilon^-} \big(f(\zeta) - \mathrm{Pol}_0[f](\zeta)\big)\, d\zeta \Big) = 0.$$

4. *Montrer que l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}\, dx$$

est absolument convergente (au sens de Lebesgue) et calculer sa valeur.

Au voisinage de l'infini, l'absolue intégrabilité de l'intégrale est assurée par le fait que la fonction sous l'intégrale est majorée en valeur absolue par $2/x^2$ et le critère d'intégrabilité de Riemann. Au voisinage de 0, un développement limité du numérateur de l'intégrant donne

$$\cos(ax) - \cos(bx) = \frac{a^2 - b^2}{2}\, x^2 + o(x^2).$$

La fonction sous l'intégrale est donc bornée en valeur absolue au voisinage de 0. Cette fonction est donc bien intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, \infty[$. La formule de résidus (version analytique, Théorème 3.8 du cours) assure que, pour tout $0 < \epsilon < R < +\infty$,

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

puisqu'aucun pôle de la fonction f n'est enserré par le lacet continu $\Gamma_{\epsilon,R}$. La contribution à l'intégrale curviligne des deux tronçons du lacet situés sur l'axe réel est :

$$\int_{-R}^{-\epsilon} f(t)\, dt + \int_\epsilon^R f(t)\, dt = 2 \int_\epsilon^R \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}\, dx.$$

Si R tend vers $+\infty$ et ϵ tend vers 0, cette contribution tend (grâce par exemple au théorème de convergence dominée de Lebesgue) vers $2I$, où I est l'intégrale que l'on demande de calculer. Compte tenu de ce qui se passe pour les contributions à l'intégrale curviligne des deux tronçons restants (les deux demi-cercles de rayons respectifs ϵ et R) lorsque R tend vers l'infini et ϵ tend vers 0 (voir le résultat des questions **1** et **2**), on a au final, en faisant tendre R vers l'infini et ϵ vers 0 dans la formule

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(\zeta)\, d\zeta = 0,$$

que

$$2\,I + \pi(a-b) = 0,$$

soit

$$I = \frac{\pi(b-a)}{2}.$$

On pourra vérifier ce résultat avec `Maple` :

```
> g:= x -> (cos (abs(a)*x) - cos(abs(b)*x))/x^2:
> int(g(x),x=0..infinity);
                        1          1
                        - Pi |b| - - |a| Pi
                        2          2
```

Exercice 2. *Soit E la bande verticale ouverte*

$$E := \{z = x + iy \in \mathbb{C}\,;\, 0 < x < 1\}$$

du plan complexe et ∂E sa frontière, soit $\partial E = \{i\mathbb{R}\} \cup \{1 + i\mathbb{R}\}$.

1. *Montrer que la fonction*

$$h\ : z \in \mathbb{C} \longmapsto \exp\big(-i\exp(i\pi z)\big)$$

est une fonction entière, bornée en module par une constante que l'on précisera sur ∂E, mais pourtant non bornée en module dans E (on pensera à étudier le comportement de cette fonction sur la droite verticale $1/2 + i\mathbb{R}$, incluse dans E).

La fonction h une fonction entière comme composée de fonctions entières (l'exponentielle étant une fonction entière). Si $z = iy$, $\exp(i\pi z) = \exp(-\pi y)$ est un nombre réel. La fonction h est donc de module constant égal à 1 sur $i\mathbb{R}$. Si $z = 1+iy$, on a $\exp(i\pi z) = -e^{-\pi y} \in \mathbb{R}$ et la fonction h est encore de module 1 sur $1+i\mathbb{R}$. La fonction h est donc bornée en module par 1 (elle est même en fait de module 1) sur les deux droites dont l'union forme ∂E. En revanche, si $z = 1/2 + iy$, on a $\exp(i\pi z) = \exp(i\pi/2 - \pi y) = i\exp(-\pi y)$ et donc $|h(z)| = \exp(\exp(-\pi y))$. Cette fonction croît donc doublement exponentiellement vers l'infini si z tend vers $1/2 - i\infty$ le long de la droite $1/2 + i\mathbb{R}$. La fonction h est donc non bornée en module dans E.

On se donne à partir de maintenant une fonction $f : \overline{E} \to \mathbb{C}$, continue dans $\overline{E}$, holomorphe dans E, bornée en module par K sur $\overline{E}$ et par M sur ∂E. On se propose de vérifier qu'alors $|f| \le M$ dans $\overline{E}$.

2. *On introduit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \overline{E} \to \mathbb{C}$ est définie par*

$$\forall\, z \in \overline{E}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(z) = f(z)\, \exp(z^2/n).$$

Vérifier les inégalités :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, z \in \overline{E}, \quad |f_n(z)| \le K\, \exp\Big(\frac{1-y^2}{n}\Big).$$

Si $z = x + iy$, $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Si $z \in \overline{E}$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\exp(z^2/n)| = \exp\big(-\mathrm{Re}(z^2)/n\big) = \exp\big((x^2-y^2)/n\big) \le \exp\big((1-y^2)/n\big)$. En combinant avec $|f| \le K$ dans $\overline{E}$, on a bien l'inégalité demandée.

3. *En déduire qu'il existe, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, un nombre strictement positif Y_n tel que :*

$$\forall\, z = x + iy \in \overline{E} \text{ tel que } |y| \ge Y_n, \quad |f_n(z)| \le M\, \exp(1/n). \qquad (\star)$$

Comme

$$\lim_{Y\to\pm\infty} K \exp(-Y^2/n) = 0,$$

il existe un seuil $Y_n > 0$ tel que $|y| \ge Y_n$ implique $K\exp(-y^2/n) \le M$. Si $z = x + iy \in \overline{E}$ est tel que $|y| \ge Y_n$, on a donc, reprenant l'inégalité établie à la question **2**,

$$|f_n(z)| \le K\, \exp\Big(\frac{1-y^2}{n}\Big) \le K\, \exp\Big(\frac{1-Y_n^2}{n}\Big) \le M\, e^{1/n}.$$

4. *Soit Δ_n le rectangle fermé $[0,1]\times[-Y_n, Y_n]$ du plan complexe. Démontrer :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sup_{\Delta_n} |f_n| \le M\, \exp(1/n).$$

*En combinant avec le résultat $(\star)$ établi à la question **3**, montrer que $|f_n| \le M e^{1/n}$ dans $\overline{E}$. En déduire :*

$$\forall\, z \in \overline{E}, \quad |f(z)| \le M.$$

Sur le bord du rectangle Δ_n, la fonction f_n est bornée par $Me^{1/n}$. C'est vrai sur les bords horizontaux du fait du résultat établi à la question **3**. C'est vrai sur les bords verticaux puisque $|f| \leq M$ sur ∂E et que $|\exp(z^2/n) = \exp\big((1-y^2)/n\big) \leq \exp(1/n)$ sur ∂E. D'après le principe du maximum, version globale (Proposition 2.10 du cours), on a donc $|f_n| \leq Me^{1/n}$ dans Δ_n. Comme $|f_n(z)| \leq Me^{1/n}$ dans $\overline{E} \setminus \Delta_n$ d'après le choix de Y_n (question **3**, inégalité $(\star)$), on a bien en fait $|f_n| \leq Me^{1/n}$ dans $\overline{E}$. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f uniformément sur tout compact de E. Pour un point z fixé dans E, on a donc $f(z) = \lim_{n\to+\infty} f_n(z)$ et par conséquent $|f(z)| \leq M$ puisque $|f_n(z)| \leq Me^{1/n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (d'après ce qui précède) et que $e^{1/n}$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3. *Soit $z \mapsto \log(z)$ la fonction définie dans l'ouvert $U = \mathbb{C} \setminus \{i\mathbb{R}^-\} = \mathbb{C} \setminus \{-iy\,;\, y \geq 0\}$ par*

$$f(z) = \log z = \log|z| + i\,\arg_{]-\pi/2,3\pi/2[}(z) \quad \forall\, z \in U.$$

1. *Vérifier que f est holomorphe dans U ; que vaut f' ? (on utilisera l'expression de l'opérateur de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires, ainsi que celle de son conjugué, cf. l'exemple 1.3 du cours). Calculer* $\log(iy)$ *pour $y > 0$ et* $\log(x)$, $\log(-x)$ *pour $x > 0$.*

En coordonnées polaires, la détermination de l'argument θ étant prise entre $-\pi/2$ et $3\pi/2$, la fonction log s'exprime en polaire comme $\log z = \log r + i\theta$. Comme l'opérateur de Cauchy-Riemann s'écrit en coordonnées polaires

$$e^{i\theta}\Big(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)$$

(exemple 1.3 du cours), on vérifie que $(\partial/\partial\overline{z})[\log z] \equiv 0$ dans U. La fonction log est donc holomorphe dans U. Comme d'autre part, l'opérateur $\partial/\partial z$ s'exprime en polaire come le conjugué du précédent, soit

$$e^{-i\theta}\Big(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big),$$

un calcul simple sur log exprimée en polaire sous la forme $\log r + i\theta$ montre que $(\log z)'(z) = 1/z$ dans U.

On a $\log(iy) = \log y + i\pi/2$ pour tout $y > 0$ tandis que, pour $x > 0$, $\log x$ est le logarithme népérien usuel de x et que $\log(-x) = \log x + i\pi$.

2. *Soit $b > 0$. Vérifiez que la fonction*

$$f_b\ : z \in U \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\log z}{(z^2+b^2)^2} & \text{si} \quad z \neq ib \\ \infty & \text{si} \quad z = ib \end{cases}$$

est méromorphe dans U. Quel est l'ordre de son pôle ib ? Calculer la dérivée dans U de la fonction holomorphe :

$$z \in U \longmapsto \frac{\log z}{(z+ib)^2} = f_b(z)(z-ib)^2$$

et en déduire la valeur de $\mathrm{Res}_{ib}[f_b(\zeta)\,d\zeta]$ *(on pourra, malgré les avertissements prodigués en cours, utiliser ici quand même la formule de la remarque 3.7 du polycopié).*

Dans U privé de $\{ib\} = f_b^{-1}(\infty)$, la fonction f_b est holomorphe. Dans un voisinage épointé de ib, f_b se présente comme le quotient de deux fonctions holomorphes, ce qui entraine que la singularité isolée en ib est fictive ou non essentielle. Elle n'est pas fictive, et c'est même un pôle d'ordre 2, puisque $\log(ib) = \log b + i\pi/2 \neq 0$ et que le dénominateur $(z^2+b^2)^2 = (z+ib)^2(z-ib)^2$ s'annule à l'ordre 2 en ib. La fonction f_b, considérée comme fonction à valeurs dans la sphère de Riemann $\mathbb{S}^2$, est donc bien continue au point ib. La fonction que l'on demande de dériver, et qui est en fait la fonction $z \mapsto f_b(z)(z-ib)^2$, se dérive dans U en

$$z \mapsto \frac{1}{z(z+ib)^2} - 2\frac{\log z}{(z+ib)^3}.$$

La valeur en ib de cette fonction dérivée est égale au résidu en ib de la forme $f_b(\zeta)\,d\zeta$ d'après la formule « interdite » de la remarque 3.7 (ici $p=2$). Ce résidu vaut

$$\mathrm{Res}_{ib}\,[f(\zeta)\,d\zeta] = \frac{1}{4(ib)^3} - \frac{\log b + i\pi/2}{4(ib)^3} = \frac{1}{4b^3}\Big(\frac{\pi}{2} + i(1-\log b)\Big).$$

3. *Calculer, si $0 < \epsilon < b < R$, l'intégrale*

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f_b(\zeta)\,d\zeta\,,$$

où $\Gamma_{\epsilon,R}$ désigne encore le lacet continu (parcouru une seule fois) figurant sur la figure 2 de l'exercice 1.

D'après la formule des résidus (Théorème 3.8 du cours), cette intégrale vaut $2i\pi$ fois le résidu au seul pôle (en l'occurrence $z = ib$) de f_b enserré par le lacet de la forme $f_p(\zeta)\,d\zeta$, soit :

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f_b(\zeta)\,d\zeta = \frac{i\pi}{2b^3}\Big(\frac{\pi}{2} + i(1-\log b)\Big)$$

d'après le calcul fait à la question **2**.

4. *Montrer (on se réfère aux notations de la figure 2) que*

$$\lim_{R\to+\infty}\Big(\int_{\gamma_R^+} f_b(\zeta)\,d\zeta\Big)=\lim_{\epsilon\to 0_+}\Big(\int_{\gamma_\epsilon^-} f_b(\zeta)\,d\zeta\Big)=0,$$

lorsque γ_R^+ correspond au tronçon du chemin $\Gamma_{\epsilon,R}$ le long du demi-cercle de rayon R et γ_ϵ^- correspond au tronçon du chemin $\Gamma_{\epsilon,R}$ le long du demi-cercle de rayon ϵ (cf. la figure 2).

Lorsque $R>b$ tend vers l'infini,

$$\Big|\int_{\gamma_R^+} f_b(\zeta)d\zeta\Big|\leq \pi R\sup_{|\zeta|=R,\mathrm{Im}\,\zeta\geq 0}|f_b(\zeta)|\leq \pi R\times\frac{\log R+\pi}{(R^2-b^2)^2}=o(1).$$

Lorsque $0<\epsilon<b$ tend vers 0,

$$\Big|\int_{\gamma_\epsilon^-} f_b(\zeta)d\zeta\Big|\leq \pi \epsilon\sup_{|\zeta|=\epsilon,\mathrm{Im}\,\zeta\geq 0}|f_b(\zeta)|\leq \pi \epsilon\times\frac{|\log\epsilon|+\pi}{(b^2-\epsilon^2)^2}=o(1).$$

5. *Montrer que les deux intégrales*

$$I:=\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+b^2)^2}\,dx\quad,\quad J:=\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+b^2)^2}$$

sont toutes deux absolument convergentes au sens de Lebesgue. Déduire des résultats établis aux questions **3** *et* **4** *la valeur de $2I+i\pi J$. Donner les valeurs exactes de I et J.*

Comme $b>0$ et que log est absolument intégrable au voisinage de 0, le seul problème pour la convergence absolue de ces deux intégrales est en l'infini. Il n'y en a pas pour la seconde à cause du critère de Riemann (car $4>1$) et pour la première à cause du fait que $\log x\leq x$ pour x grand et du critère de Riemann encore car $3>1$.

En faisant tendre ϵ vers 0 et R vers l'infini dans la formule établie à la question **3**, on trouve, grâce au résultat établi à la question **4**, que

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0_+\\ R\to+\infty}}\Big(\int_{-R}^{-\epsilon}\frac{\log|x|+i\pi}{(x^2+b^2)^2}\,dx+\int_\epsilon^R\frac{\log x}{(x^2+b^2)^2}\,dx\Big)=\frac{i\pi}{2b^3}\Big(\frac{\pi}{2}+i(1-\log b)\Big).$$

On en déduit, en invoquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue (après avoir fait le changement de variables de x en $-x$ dans la première des deux intégrales), que

$$2I+i\pi J=\frac{i\pi}{2b^3}\Big(\frac{\pi}{2}+i(1-\log b)\Big).$$

Il en résulte, en identifiant parties réelles et imaginaires :

$$I = \frac{\pi(\log b - 1)}{4b^3} \quad , \quad J = \frac{\pi}{4b^3}.$$

On pourra pour s'en convaincre vérifier ces résultats avec par exemple `Maple` :

```
> f := x-> log(x)/(x^2 + (abs(b))^2):
> g := x-> 1/(x^2 + (abs(b))^2):
> int(f(x),x=0..infinity);
                          Pi     Pi ln(|b|)
                      - ------ + ----------
                               3          3
                        4 |b|      4 |b|
> int(g(x),x=0..infinity);
                                Pi
                              ------
                                   3
                              4 |b|
```