Interpolation par un spline cubique

Objectif du TP

L'objectif de ce TP guidé est la réalisation d'un code

`[t,S] = Spline3(a,b,x,y,N)`

qui, étant donnés deux nombres réels $a < b$ et une liste

$$\mathtt{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]$$

où $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < b$ de $n \geq 2$ nœuds positionnés dans l'ordre strictement croissant sur le segment $]a, b[$, ainsi qu'une liste

$$\mathtt{y} = [y_1, y_2, ..., y_n]$$

de nombres réels de même longueur (n) que la suite `x`, retourne les valeurs aux $N + 1$ points du maillage

$$\mathtt{t} = [a : (b-a)/N : b] = a + (b-a) * [0 : 1/N : 1]$$

de la fonction spline cubique (2-spline) s interpolant les valeurs y_j aux points distincts x_j. Outre `t`, le tableau `S` retourné ici est donc le tableau en ligne des valeurs

$$\mathtt{S} = [s(a), s(a + (b-a)/N), ..., s(a + (b-a)(N-1)/N), s(b)].$$

Cette fonction $t \mapsto s(t)$ doit se plier aux exigences ci-dessous :

- ce doit être une fonction affine $t \mapsto \alpha_0 t + \beta_0$ et $t \mapsto \alpha_{n+1} t + \beta_{n+1}$ sur les deux segments extrêmes $[a, x_1]$ et $[x_n, b]$;
- sur chaque segment $[x_j, x_{j+1}]$ ($j = 1, ..., n-2$), ce doit être une fonction polynomiale de degré au plus 3 ;
- tous les raccords aux points $x_1, ..., x_n$ doivent être assurés de manière telle que la fonction s, une fois tous les raccords faits, soit une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$.

L'expression de la fonction s en fonction des nombres $z_j = s''(x_j)$ pour $j = 1, ..., n$

Pour réaliser le code, il faut connaitre cette expression théorique.

On commence par remarquer que si s est une fonction polynomiale de degré au plus 3 sur $[x_j, x_{j+1}]$ (lorsque $j = 1, ..., n-1$), la fonction s'' doit être une fonction polynomiale de degré au plus 1. On doit donc avoir nécessairement :

$$\forall\, j \in \{1, ..., n-1\},\ \forall\, t \in [x_j, x_{j+1}],\ s''(t) = \frac{z_{j+1}}{\delta x_j}\,(t - x_j) + \frac{z_j}{\delta x_j}\,(x_{j+1} - t), \quad (1)$$

où l'on a posé $\delta x_j := x_{j+1} - x_j$ pour $j = 1, ..., n-1$. En intégrant (1) une fois, on trouve

$$\forall\, j \in \{1, ..., n-1\},\ \exists\, b_j \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall\, t \in [x_j, x_{j+1}],$$
$$s'(t) = \frac{z_{j+1}}{\delta x_j}\,\frac{(t-x_j)^2}{2} - \frac{z_j}{\delta x_j}\,\frac{(x_{j+1}-t)^2}{2} + b_j.$$

En intégrant une seconde fois, on trouve

$$\forall\, j \in \{1, ..., n-1\},\ \exists\, a_j, b_j \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall\, t \in [x_j, x_{j+1}],$$
$$s(t) = \frac{z_{j+1}}{\delta x_j}\,\frac{(t-x_j)^3}{6} + \frac{z_j}{\delta x_j}\,\frac{(x_{j+1}-t)^3}{6} + b_j(t-x_j) + a_j.$$

En écrivant que $s(t_j) = y_j$ et que $s(t_{j+1}) = y_{j+1}$, on trouve, toujours pour tout $j = 1, ..., n-1$, les deux relations

$$\begin{aligned} s(x_j) &= y_j = \frac{z_j}{\delta x_j}\,\frac{(\delta x_j)^3}{6} + a_j = z_j\,\frac{(\delta x_j)^2}{6} + a_j \\ s(x_{j+1}) &= y_{j+1} = \frac{z_{j+1}}{\delta x_j}\,\frac{(\delta x_j)^3}{6} + b_j\,\delta x_j + a_j = z_{j+1}\frac{(\delta x_j)^2}{6} + b_j\,\delta x_j + a_j. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall\, j = 1, ..., n-1, \quad a_j = y_j - z_j\,\frac{(\delta x_j)^2}{6} \tag{$\dagger$}$$

et

$$\begin{aligned} \forall\, j = 1, ..., n-1, \quad b_j &= \frac{1}{\delta x_j}\Big(y_{j+1} - y_j + (z_j - z_{j+1})\,\frac{(\delta x_j)^2}{6}\Big) \\ &= \frac{\delta y_j}{\delta x_j} + (z_j - z_{j+1})\,\frac{\delta x_j}{6}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\forall\, j = 1, ..., n-1,\ b_j = \frac{\delta y_j}{\delta x_j} + (z_j - z_{j+1})\,\frac{\delta x_j}{6}. \tag{$\dagger\dagger$}$$

Les nombres a_j et b_j, pour $j = 1, ..., n-1$, se calculent donc en fonction de $z_1, ..., z_n$. Il faut donc calculer d'abord ces n nombres $z_1, ..., z_n$.

Le calcul de $z_1, ..., z_{n-2}$ en résolvant un système linéaire

On prend pour commencer j entre 2 et $n-1$. Comme la fonction s doit être de classe C^2, donc C^1, les dérivées à gauche et à droite au point x_j doivent être égales. La dérivée à droite en x_j se calcule en prenant $t = x_j$ dans l'expression de s sur $[x_j, x_{j+1}]$, qui est :

$$s'(t) = \frac{z_{j+1}}{\delta x_j}\,\frac{(t-x_j)^2}{2} - \frac{z_j}{\delta x_j}\,\frac{(x_{j+1}-t)^2}{2} + b_j.$$

Cette dérivée à droite vaut :

$$s'_d(x_j) = -\frac{z_j}{\delta x_j}\frac{(\delta x_j)^2}{2} + b_j = -z_j\frac{\delta x_j}{2} + b_j.$$

La dérivée à gauche en x_j se calcule en prenant $t = x_j$ dans l'expression de s sur $[t_{j-1}, t_j]$, qui est :

$$s'(t) = \frac{z_j}{\delta x_{j-1}}\,\frac{(t-x_{j-1})^2}{2} - \frac{z_{j-1}}{\delta x_{j-1}}\,\frac{(x_j-t)^2}{2} + b_{j-1}.$$

Cette dérivée à gauche vaut :

$$s'_g(x_j) = \frac{z_j}{\delta x_{j-1}} \frac{(\delta x_{j-1})^2}{2} + b_{j-1} = z_j \frac{\delta x_{j-1}}{2} + b_{j-1}.$$

On a donc, en égalant les deux dérivées à gauche et à droite en x_j (pour $j = 2, ..., n-1$) :

$$\forall\, j = 2, ..., n-1, \quad -z_j \frac{\delta x_j}{2} + b_j = z_j \frac{\delta x_{j-1}}{2} + b_{j-1}.$$

Or

$$b_j - b_{j-1} = \frac{\delta y_j}{\delta x_j} - \frac{\delta y_{j-1}}{\delta x_{j-1}} + z_j \Big(\frac{\partial x_j + \partial x_{j-1}}{6} \Big) - z_{j+1} \frac{\delta x_j}{6} - z_{j-1} \frac{\delta x_{j-1}}{6}.$$

On a donc les relations

$$\forall\, j = 2, ..., n-1,$$
$$\frac{\delta x_{j-1}}{6}\, z_{j-1} + \Big(\frac{\delta x_j + \delta x_{j-1}}{3} \Big)\, z_j + \frac{\delta x_j}{6}\, z_{j+1} = \frac{\partial y_j}{\partial x_j} - \frac{\partial y_{j-1}}{\partial x_{j-1}}.$$

Comme $z_n = 0$ (puisque la fonction s est supposée polynomiale de degré 1 sur $[x_n, a]$ et que z_n qui représente sa dérivée d'ordre 2 en x_n est nul), la dernière de ces relations s'écrit

$$\frac{\delta x_{n-2}}{6}\, z_{n-2} + \Big(\frac{\delta x_{n-1} + \delta x_{n-2}}{3} \Big)\, z_{n-1} = \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_{n-1}} - \frac{\partial y_{n-2}}{\partial x_{n-2}}.$$

Mais, comme on a aussi $z_1 = 0$ (pour la même raison que celle pour laquelle on avait $z_n = 0$, puisque s est aussi supposée affine sur $[a, x_1]$), la première de ces relations s'écrit

$$\Big(\frac{\delta x_2 + \delta x_1}{3} \Big)\, z_2 + \frac{\delta x_2}{6}\, z_3 = \frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_1}{\partial x_1}.$$

En mettant tout ensemble, on voit que

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta x_2 + \delta x_1}{3} & \frac{\delta x_2}{6} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\delta x_2}{6} & \frac{\delta x_3 + \delta x_2}{3} & \frac{\delta x_3}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\delta x_3}{6} & \frac{\delta x_4 + \delta x_3}{3} & \frac{\delta x_4}{6} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \frac{\delta x_{n-3}}{6} & \frac{\delta x_{n-3} + \delta x_{n-2}}{3} & \frac{\delta x_{n-2}}{6} \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & \frac{\delta x_{n-2}}{6} & \frac{\delta x_{n-2} + \delta x_{n-1}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_3} - \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_4}{\partial x_4} - \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_{n-2}}{\partial x_{n-2}} - \frac{\partial y_{n-3}}{\partial x_{n-3}} \\ \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_{n-1}} - \frac{\partial y_{n-2}}{\partial x_{n-2}} \end{bmatrix}$$

Si l'on déclare la matrice `M` ci-dessus (de taille $[n-2, n-2]$) sous `Scilab` et la matrice colonne `Y` correspondant au second membre, on en déduit (en colonne) la liste des nombres $z_1, ..., z_{n-2}$ avec la suite d'instructions :

```
Z = inv(M)*Y ; Z = [0;Z;0]
```

Les nombres a_j et b_j pour $j = 1, ..., n-1$ sont aussi connus par les formules (†) et (††).

L'expression de la fonction s

La fonction s est maintenant complètement explicitée sur chaque segment $[x_j, x_{j+1}]$ pour $j = 1, ..., n-1$ puisque les z_j, les a_j et les b_j sont tous connus. Sur $[x_j, x_{j+1}]$ $(j = 1, ..., n-1)$, on a en effet

$$s(t) = \frac{z_{j+1}}{\delta x_j} \frac{(t - x_j)^3}{6} + \frac{z_j}{\delta x_j} \frac{(x_{j+1} - t)^3}{6} + b_j(t - x_j) + a_j.$$

On doit juste remplacer les a_j et les b_j par leurs expressions (†) et (††) en fonction des x_j, des y_j et des z_j qui sont maintenant connus.

Sur $[a, x_1]$, la fonction s est affine. Comme on sait déjà que le graphe passe par (x_1, y_1), il suffit (pour connaitre la fonction s sur le segment initial $[a, x_1]$) de connaitre la pente α_0 du graphe de $f_{|[a,x_1]}$ qui vaut la dérivée à droite en x_1 de la fonction s. Cette pente vaut

$$\alpha_0 = \texttt{coeff}_0 = b_1$$

puisque l'on a

$$s'(t) = \frac{z_2}{\delta x_1} \frac{(t - x_1)^2}{2} - \frac{z_1}{\delta x_1} \frac{(x_2 - t)^2}{2} + b_1$$

sur $[x_1, x_2]$ et que $z_1 = 0$.

Sur $[x_n, b]$, la fonction s est encore affine. Comme on sait déjà que le graphe passe par (x_n, y_n), il suffit (pour connaitre la fonction s sur le segment final $[x_n, b]$) de connaitre la pente α_{n+1} du graphe de $f_{|[x_n,b]}$ qui vaut la dérivée à gauche en x_n de la fonction s. Cette pente vaut

$$\alpha_{n+1} = \texttt{coeff}_{n+1} = b_{n-1}.$$

puisque l'on a

$$s'(t) = \frac{z_n}{\delta x_{n-1}} \frac{(t - x_{n-1})^2}{2} - \frac{z_{n-1}}{\delta x_{n-1}} \frac{(x_n - t)^2}{2} + b_{n-1}$$

sur $[x_{n-1}, x_n]$ et que $z_n = 0$.

La fonction s est connue partout. Il reste à calculer ses valeurs en toutes les mailles $a + \ell(b - a)/N$ pour $\ell = 0, ..., N$. On discute juste pour cela la position de chaque maille par rapport aux positions des nœuds d'interpolation $x_1, ..., x_n$.