

**Eléments d'Algèbre commutative et de Géométrie
Complexe**

Alain Yger

RÉSUMÉ. Le double objectif de ce cours est, d'une part, de présenter les bases essentielles de l'algèbre commutative tout en les motivant par des applications (choisies dans le riche vivier qu'entrouvre la géométrie complexe), d'autre part de confronter les problèmes classiques (étudiés depuis souvent plus d'un siècle) avec les développements récents où ces problèmes ressurgissent et font se poser des problèmes de recherche toujours ouverts dans le cadre des mathématiques contemporaines. Pour ce qui concerne l'algèbre commutative, c'est l'ouvrage de D. Eisenbud [**Eis**] qui nous servira fréquemment de trame; notons cependant qu'il s'agit plus d'un ouvrage de référence que l'on consulte sans cesse et qu'il serait impossible ici compte-tenu des objectifs que nous nous sommes fixés d'en faire une explication exhaustive. Les deux livres de D. Cox, J. Little, D. O'Shea [**CLO1**, **CLO2**], d'obédience plus « pratique », voire « algorithmique », nous seront aussi utiles en ce qui concerne les applications (et la présentation concrète et naïve des objets qui y est conduite). Pour ce qui est des bases de la Géométrie Complexe, nous nous référerons souvent aux ouvrages de P. Griffiths et J. Harris [**GH**] et de J.P. Demailly [**Dem**] (en ligne).

CHAPITRE 1

Idéaux d'un anneau de polynômes sous divers angles

1.1. Polynômes sur un domaine, élimination, nullstellensatz

On désigne par \mathbb{A} un *domaine*, c'est-à-dire un anneau commutatif unitaire¹ *intègre* et par \mathbb{K} son corps des fractions; on note $\overline{\mathbb{K}}$ la clôture intégrale de ce corps des fractions (c'est-à-dire le plus petit sur-corps $\widetilde{\mathbb{K}}$ de \mathbb{K} , à \mathbb{K} -isomorphisme près, tel que tout polynôme p en une variable à coefficients dans \mathbb{K} ait au moins une racine dans $\overline{\mathbb{K}}$, ce qui signifie qu'un tel polynôme se présente comme un polynôme scindé $a(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_d)$, où $a \in \mathbb{K}^*$ et les α_j sont dans $\overline{\mathbb{K}}$, et $d = \deg p$). On ne fait par pour l'instant d'hypothèses sur la caractéristique du corps \mathbb{K} ou bien le fait qu'il s'agisse d'un corps fini ou infini; ces hypothèses seront si nécessaires précisées par la suite.

Comme exemples de domaines \mathbb{A} , on peut penser à $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_\nu]$ (l'anneau des polynômes en ν paramètres transcendants sur \mathbb{Z} , soit \mathbb{Z} si $\nu = 0$) ou $\mathbb{Z}_p[t_1, \dots, t_\nu]$ (l'anneau des polynômes en ν paramètres transcendants sur l'anneau \mathbb{Z}_p des entiers p -adiques, soit \mathbb{Z}_p si $\nu = 0$) et la caractéristique est alors 0; dans ce cas \mathbb{K} est d'ailleurs toujours infini. On peut également penser à l'anneau $\mathbb{A} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (avec $p \geq 2$ premier) ou à $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[t_1, \dots, t_\nu]$, la caractéristique de \mathbb{K} est alors p , et \mathbb{K} est alors fini si $\nu = 0$, mais infini dès que $\nu \geq 1$.

Si d_1 et d_2 sont deux entiers strictement positifs, on peut considérer dans l'anneau

$$\mathbb{Z}[u_0, \dots, u_{d_1}, v_0, \dots, v_{d_2}][X] = \mathbb{Z}[u, v][X]$$

les deux polynômes

$$p_1(X) = \sum_{k=0}^{d_1} u_k X^{d_1-k}, \quad p_2(X) = \sum_{k=0}^{d_2} v_k X^{d_2-k}$$

Ces deux polynômes p_1 et p_2 sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}(u, v)[X]$ si et seulement il existe deux polynômes q_1 et q_2 à coefficients dans ce corps, de degrés respectifs $d_2 - 1$ et $d_1 - 1$, tels que $1 \equiv p_1 q_1 + p_2 q_2$ (identité de Bézout). Ceci s'exprime encore, si l'on exprime cette dernière identité comme une identité entre deux polynômes de degrés $d_1 + d_2 - 1$, en disant que le déterminant $R_{d_1, d_2}(u, v)$ de la matrice de Sylvester

1. Unitaire n'est pas indispensable, mais nous ajouterons cette hypothèse.

de taille $(d_1 + d_2, d_1 + d_2)$

$$(1.1) \quad \text{Sylv}_{d_1, d_2} = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{d_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & u_0 & \cdots & u_{d_1-1} & u_{d_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & u_{d_1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & u_{d_1-1} & u_{d_1} \\ v_0 & v_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & v_{d_2-1} & v_{d_2} \end{bmatrix}$$

est non nul. On constate, en remplaçant dans ce déterminant la dernière colonne par la combinaison

$$\sum_{k=0}^{d_1+d_2-1} X^{d_1+d_2-1-k} \text{ (colonne d'indice } k),$$

puis en le développant suivant la règle de Sarrus, que le déterminant $R_{d_1, d_2}(u, v)$ s'exprime sous la forme

$$R_{d_1, d_2}(u, v) = A_1(u, v, X)p_1(X) + A_2(u, v, X)p_2(X),$$

où A_1 et A_2 sont des éléments de $\mathbb{Z}[u, v][X]$. Le polynôme R_{d_1, d_2} est homogène de degré d_2 en u et homogène de degré d_1 en v ; il est donc bi-homogène. On envisagera plus loin dans ce cours une extension au cadre non plus de 2 polynômes en 1 variable (c'est-à-dire en fait, ce qui revient au même si on les homogénéise, de deux polynômes homogènes de degrés respectifs d_1 et d_2 en deux variables (X_0, X_1)), mais celui de $(n+1)$ polynômes homogènes en $n+1$ variables de degrés (totaux cette fois) précisés d_1, d_2, \dots, d_{n+1} ; ce sera le *résultant de Macaulay*, généralisation du résultant de Sylvester.

Si les polynômes $p_{1, \text{prec}}$ et $p_{2, \text{prec}}$ (« prec » pour « précisé ») sont maintenant des polynômes à coefficients $(a_j)_{j=0, \dots, d_1}$ et $(b_j)_{j=0, \dots, d_2}$ dans un corps \mathbb{K} spécifié soit

$$p_{1, \text{prec}}(X) = \sum_{j=0}^{d_1} a_j X^{d_1-j}, \quad p_{2, \text{prec}}(X) = \sum_{j=0}^{d_2} b_j X^{d_2-j}$$

et s'ils sont exactement de degrés d_1 et d_2 (ce qui signifie que les coefficients a_0 et b_0 sont non nuls), l'élément $R_{d_1, d_2}(u = a, v = b) \in \mathbb{K}$ est un élément du corps \mathbb{K} non nul si et seulement si les deux polynômes $p_{1, \text{prec}}$ et $p_{2, \text{prec}}$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 1.1. Voici une routine sous le logiciel Sage¹ permettant de générer le polynôme R_{d_1, d_2} (en seconde sortie) comme élément de $\mathbb{Z}[u, v]$ et la matrice de Sylvester Sylv_{d_1, d_2} en première sortie; les codes sont écrits sous l'environnement Python. Cette routine génère aussi les variables $u = u_0, \dots, u_{d_1}$, $v = v_0, \dots, v_{d_2}$ qu'elle numérote ainsi.

1. Ce logiciel libre se télécharge depuis le site <http://www.sagemath.org/>. Il permet de coupler les potentialités du calcul formel et celles du calcul scientifique.

```

sage:
def SYLVESTER(d_1,d_2):
% On declare les listes de variables u et v
    U = list(var('u_%d' % i) for i in range(d_1+1))
    V = list(var('v_%d' % i) for i in range(d_2+1))
% On declare l'anneau de polynomes Z[u,v]
    T = ZZ[U+V]; ZZuv = PolynomialRing(ZZ,d_1+d_2+2,T.gens())
% On forme la matrice de Sylvester, puis
    UU = [ZZuv.gens()[k] for k in range(d_1+1)]
    VV = [ZZuv.gens()[d_1+1+k] for k in range(d_2+1)]
    M1 = Matrix([[0 for k in range(j)] + UU
    + [0 for k in range(d_2-1-j)] for j in range(d_2)])
    M2 = Matrix([[0 for k in range(j)] + VV
    + [0 for k in range(d_1-1-j)] for j in range(d_1)])
    L1 = [M1.rows()[j].list() for j in range(d_2)]
    L2 = [M2.rows()[j].list() for j in range(d_1)]
    return [Matrix(L1+L2),Matrix(L1+L2).det()]

```

On peut ainsi calculer certains résultants de Sylvester, par exemple :

```

sage:
Sylvester(2,1)[1]
ans:
u_2*v_0^2 - u_1*v_0*v_1 + u_0*v_1^2
Sylvester(3,2)[1]
ans:
u_3^2*v_0^3 - u_2*u_3*v_0^2*v_1 + u_1*u_3*v_0*v_1^2
- u_0*u_3*v_1^3 + u_2^2*v_0^2*v_2 - 2*u_1*u_3*v_0^2*v_2
- u_1*u_2*v_0*v_1*v_2 + 3*u_0*u_3*v_0*v_1*v_2
+ u_0*u_2*v_1^2*v_2 + u_1^2*v_0*v_2^2
- 2*u_0*u_2*v_0*v_2^2 - u_0*u_1*v_1*v_2^2
+ u_0^2*v_2^3

```

On s'aperçoit tout de suite que les choses sont vite compliquées (le développement d'un déterminant de taille $d_1 + d_2$ par la règle de Sarrus fait intervenir $(d_1 + d_2)!$ termes! Si l'on prend $d_1 = 2$, $d_2 = 1$ et comme polynômes précisés

$$p_{1,\text{prec}}(X) = aX^2 + bX + c, \quad p_{2,\text{prec}}(X) = p'_{1,\text{prec}}(X) = 2aX + b,$$

on trouve en lançant ainsi les calculs :

```

sage:
var('a,b,c')
SYLVESTER(2,1)[0](a,b,c,2*a,b), SYLVESTER(2,1)[1](a,b,c,2*a,b)
ans:
(
[ a  b  c]
[2*a b  0]
[ 0 2*a b], -a*b^2 + 4*a^2*c
)

```

On retrouve $-a(b^2 - 4ac)$, ce qui est normal ici, puisque l'on sait que la condition pour que le trinôme du second degré $p(X) = aX^2 + bX + c$ ($a \neq 0$) ait une racine double (c'est-à-dire que p ne soit pas premier avec sa dérivée p') est $b^2 - 4ac = 0$. La matrice de Sylvester est affichée ici en première sortie. Si l'on prend maintenant $d_1 = 3$, $d_2 = 2$ et les deux polynômes précisés

$$p_{1,\text{prec}}(X) = X^3 + pX + q, \quad p_{2,\text{prec}} = p'_{1,\text{prec}}(X) = 3X^2 + p,$$

(p et q étant cette fois des paramètres) on trouve :

```

sage:
var('p,q')
SYLVESTER(3,2)[0](1,0,p,q,3,0,p),
      SYLVESTER(3,2)[1](1,0,p,q,3,0,p)
ans:
(
 [1 0 p q 0]
 [0 1 0 p q]
 [3 0 p 0 0]
 [0 3 0 p 0]
 [0 0 3 0 p], 4*p^3 + 27*q^2
)

```

On pourrait augmenter les valeurs de d_1 et d_2 , mais les calculs deviennent très vite compliqués!

Le résultant de Sylvester est à la base de l'un des premiers résultats fondamentaux de l'algèbre commutative (dans le contexte polynomial), le *théorème des zéros de Hilbert* ou *Nullstellensatz*.

THEORÈME 1.1 (théorème des zéros de Hilbert ou aussi nullstellensatz¹). *Soient p_1, \dots, p_M M polynômes en n variables à coefficients dans un domaine \mathbb{A} et q un élément de $\mathbb{A}[X_1, \dots, X_n]$ tel que*

$$(1.2) \quad \forall x \in \overline{\mathbb{K}}^n, \quad (p_1(x) = \dots = p_M(x) = 0) \implies q(x) = 0$$

($\overline{\mathbb{K}}$ désignant, on le rappelle, la clôture intégrale du corps des fractions \mathbb{K} du domaine \mathbb{A}). *Il existe alors un entier $m \in \mathbb{N}^{*2}$ un élément $a \in \mathbb{A}^*$ ($a \neq 0$) et des polynômes q_1, \dots, q_M dans $\mathbb{A}[X_1, \dots, X_n]$, tels que l'on ait dans $\mathbb{A}[X_1, \dots, X_n]$ l'identité polynomiale*

$$(1.3) \quad a q^m = \sum_{j=1}^M p_j q_j.$$

DÉMONSTRATION. On remarque dans un premier temps qu'il est possible de se ramener au cas particulier où $q = 1$, c'est-à-dire au cas où les polynômes p_1, \dots, p_M , considérés comme des polynômes en n variables à coefficients dans \mathbb{K} , n'ont aucune racine commune z dans $\overline{\mathbb{K}}^n$.

1. On doit ce résultat majeur à David Hilbert, autour de 1893.

2. Dépendant ici, telle que la preuve sera faite, des polynômes p_1, \dots, p_M, q , mais on verra plus loin que cet entier ne dépend en fait que de p_1, \dots, p_M et non de q pourvu bien sûr que la clause (1.2) soit remplie.

Supposons en effet le résultat acquis dans ce cas (très) particulier et introduisons une variable supplémentaire X_0 , puis formons, dans $\mathbb{A}[X_0, \dots, X_n]$ cette fois, les $M + 1$ polynômes

$$1 - X_0 q(X_1, \dots, X_n), p_1(X_1, \dots, X_n), \dots, p_M(X_1, \dots, X_n).$$

Ces $M + 1$ polynômes sont tels que, considérés comme des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} , ils n'ont aucun zéro commun dans $\overline{\mathbb{K}}^n$. Il existe donc un élément a de \mathbb{A} , des polynômes $\tilde{q}_0, \dots, \tilde{q}_M$ de $\mathbb{A}[X_0, \dots, X_n]$ tels que l'on ait l'identité polynomiale

$$a = (1 - X_0 q(X_1, \dots, X_n)) \tilde{q}_0(X_0, \dots, X_n) + \sum_{j=1}^M p_j(X_1, \dots, X_n) \tilde{q}_j(X_0, \dots, X_n)$$

dans $\mathbb{A}[X_0, \dots, X_n]$. Il suffit alors de substituer dans cette identité $1/q(X_1, \dots, X_n)$ à X_0 , puis de relever les dénominateurs (ici des puissances de $q(X_1, \dots, X_n)$) figurant dans la fraction rationnelle obtenue au second membre. On obtient une identité du type (1.3) avec un entier m convenable. Cette astuce célèbre est connue sous le nom de *truc de Rabinovich*.

Reste à prouver le cas particulier. Le procédé est en fait algorithmique et repose sur une démarche initiée par Greta Hermann, une élève d'Emmy Noether, dès 1926 (voir [Her] ou aussi [MW] où l'algorithme de Greta Hermann, un temps oublié¹, a été brusquement « redécouvert »); on trouvera cette présentation de l'algorithme de Greta Hermann dans [Lang] ou [VdW].

Supposons pour l'instant $n \geq 2$. Soient p_1, \dots, p_M M éléments de $\mathbb{A}[X_1, \dots, X_n]$ sans zéros communs dans $\overline{\mathbb{K}}^n$, tels que $d_1 = \deg(p_1) = \max_j(\deg p_j) > 0$ (si $d_1 = 0$, on a évidemment $p_1(0, \dots, 0) = p_1(X_1, \dots, X_n)$ et l'identité (1.3) est acquise). On choisit un élément $\alpha^1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de \mathbb{A}^n tel que la partie homogène de plus haut degré de p_1 ne s'annule pas en α^1 , puis l'on complète $\{\alpha^1\}$ par des éléments $\alpha^2, \dots, \alpha^n$ de \mathbb{A}^n de manière à ce que $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$ soit une base de \mathbb{K}^n . Soit T la transformation affine de \mathbb{A}^n dans \mathbb{A}^n dont la matrice a pour colonnes les vecteurs $\alpha^1, \dots, \alpha^n$. Les polynômes $p_1(T(X)), \dots, p_M(T(X))$ n'ont aucun zéro commun dans \mathbb{K}^n (comme les polynômes p_1, \dots, p_M , puisque T est inversible comme matrice à coefficients dans \mathbb{K}) et de plus, ce que l'on a gagné ici est que $p_1(T(X))$ se présente sous la forme « distinguée » :

$$p_1(T(X)) = a_{1,0} X^{d_1} + \sum_{k=1}^{d_1} a_{1,k}(X_2, \dots, X_n) X_1^{d_1-k},$$

avec $a_{1,0} \in \mathbb{A}^*$, $a_{1,k} \in \mathbb{A}[X_2, \dots, X_n]$ et $\deg a_{1,k} \leq k$ pour $k = 1, \dots, d_1$. Si t_2, \dots, t_M sont des paramètres transcendants (et indépendants) au dessus de \mathbb{K} , on introduit les deux polynômes

$$p_1(T(X)), p_1(T(X)) + \sum_{j=2}^M t_j p_j(T(X))$$

1. Un slogan fameux : « il faut éliminer l'élimination », faussement attribué à André Weil, est resté présent assez longtemps en filigrane dans la « philosophie » guidant les travaux de l'école Bourbaki dans l'après-guerre; il est en partie responsable de cet état de fait. Au travers d'idées inspirées de la géométrie ou de l'analyse, la théorie de l'élimination reprend aujourd'hui ses droits dans le paysage mathématique.

(en $X_1, \dots, X_n, t_2, \dots, t_M$, mais que l'on considère en fait comme des polynômes en X_1 à coefficients dans $\mathbb{A}[X_2, \dots, X_n, t_2, \dots, t_M]$, tous deux de degré d_1 en X_1) et l'on forme le résultant de Sylvester $R_{d_1, d_1}(u, v)$ dans lequel on substitue à u la liste des coefficients du premier polynôme, à v la liste des coefficients du second. On obtient ainsi un élément r de $\mathbb{A}[X_2, \dots, X_n, t_2, \dots, t_M]$ que l'on peut écrire sous la forme

$$r = \sum_{(\gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^{n-1}} r_\gamma(X_2, \dots, X_n) t_2^{\gamma_2} \cdots t_n^{\gamma_n}$$

où chaque coefficient $r_\gamma \in \mathbb{A}[X_2, \dots, X_n]$ s'exprime sous la forme

$$(1.4) \quad r_\gamma = A_{\gamma,1}(X_1, \dots, X_n) p_1(T(X)) + \sum_{j=2}^M A_{\gamma,j}(X_1, \dots, X_n) p_j(T(X)),$$

les polynômes $A_{\gamma,j}$, $j = 1, \dots, M$, étant à coefficients dans \mathbb{A} . Le fait que les polynômes $p_1(T(X)), \dots, p_M(T(X))$ n'aient aucun zéro commun dans $\overline{\mathbb{K}}^n$ implique que les polynômes r_γ ($\gamma \in \mathbb{N}^{n-1}$, mais ils sont en nombre fini), qui sont cette fois des éléments de $\mathbb{A}[X_2, \dots, X_n]$ (on a donc une variable de moins!), n'ont aucun zéro commun dans $\overline{\mathbb{K}}^{n-1}$. On abaisse ainsi la dimension n (le nombre de variables) dans notre problème. En poursuivant de la sorte, on aboutit à $n = 1$, auquel cas les r_γ deviennent cette fois des éléments de \mathbb{A} dont l'un au moins \tilde{a} est non nul. On remonte ensuite les calculs en exploitant de proche en proche les identités du type (1.4) pour obtenir une identité

$$\tilde{a} = \sum_{j=1}^M \tilde{q}_j(X) p_j(T(X)).$$

Il reste à remplacer X par $T^{-1}(X)$ et à chasser les dénominateurs pour obtenir l'identité (1.3) voulue (n'oublions pas qu'ici nous avons supposé $q = 1$). \square

Le problème majeur se posant avec le résultat de l'algorithme d'Hermann est que les bornes que l'on peut espérer en termes du maximum d_1 des degrés des polynômes q_1, \dots, q_M explose de manière doublement exponentielle : l'estimation précise, telle qu'elle est donnée par exemple dans [MW] en suivant fidèlement cet algorithme (partant de polynômes p_1, \dots, p_M sans zéros communs dans $\overline{\mathbb{K}}$), est

$$(1.5) \quad \max_j \deg q_j \leq 2(2d_1)^{2^{n-1}}.$$

Ainsi, si l'on invoque le *truc de Rabinovich*, l'exposant m dans (1.4) est estimé par cette borne doublement exponentielle $2(2 \max(\deg(p_j)))^{2^{n-1}}$, ce qui n'est pas satisfaisant, on verra ultérieurement pourquoi, car non en phase avec la théorie géométrique de l'intersection et le théorème géométrique de Bézout. La complexité de ces bornes est doublement exponentielle. Cela reste aujourd'hui un challenge que de savoir si la complexité algorithmique du théorème des zéros de Hilbert est *polynomiale*. Ce type de question conditionnerait une réponse à la célèbre conjecture $P = ? NP$: la classe des problèmes solubles en temps polynomiale coïncide-t-elle ou non avec celle des problèmes solubles en temps polynomial, mais modulo une tolérance d'erreur probabiliste (voir par exemple la référence en ligne [Blum] et les travaux de M. Shub

et S. Smale (1993) relatifs à la complexité du problème de Bézout I, II, III, cités en référence dans ce texte).

Soit \mathbb{K} est un corps commutatif et I un idéal de l'algèbre polynomiale $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Cette algèbre $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est noëtherienne, ce qui signifie qu'il n'existe aucune suite infinie strictement croissante d'idéaux, ou encore, ce qui est équivalent, que tout idéal est de type fini. On peut donc choisir des générateurs p_1, \dots, p_M pour un idéal $I \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ donné et assurer de l'égalité entre les idéaux

$$\{q \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]; \forall x \in \overline{\mathbb{K}}^n, (p_1(x) = \dots = p_M(x) = 0) \implies q(x) = 0\}$$

et

$$\{q \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]; \exists m \in \mathbb{N} \text{ tel que } q^m \in I\}.$$

L'idéal ainsi défini dans $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est appelé radical de I et est noté \sqrt{I} . Un idéal I tel que $I = \sqrt{I}$ est dit *radiciel*.

Remarque 1.1. On note que, comme nous l'avions signalé dans l'énoncé du théorème 1.1 des zéros de Hilbert que, comme \sqrt{I} est un idéal de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, donc aussi de type fini, l'exposant m impliqué dans ce théorème (voir (1.3)) ne dépend que de p_1, \dots, p_M et non de q (on raisonne avec un nombre fini de générateurs de \sqrt{I}). Le plus petit entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\sqrt{I})^m \subset I$ s'appelle *exposant de Noëther* de l'idéal I .

Le nullstellensatz assure donc, lorsque \mathbb{K} est de plus algébriquement clos, une correspondance bijective entre les idéaux radicaux de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ (ceux tels que $I = \sqrt{I}$) et les sous-ensembles algébriques de l'espace affine $A^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$, c'est-à-dire les sous-ensembles de $A^n(\mathbb{K})$ lieux des zéros communs à une famille finie de polynômes à coefficients dans \mathbb{K} .

1.2. La clôture intégrale d'un idéal dans un anneau commutatif

Si I désigne un idéal de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ (où \mathbb{K} désigne un corps commutatif algébriquement clos), le fossé existant entre l'objet algébrique I (où se trouvent encodées toutes les propriétés de nature algébrique) et l'objet \sqrt{I} (qui, lui, n'encode, du fait de la correspondance bijective générée par le nullstellensatz, que les caractères de I ne relevant que de la géométrie, à savoir le support du $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ -module de type fini $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I$) est trop large. Cette notion de clôture intégrale a été introduite dans les travaux de D.G. Northcott et D. Rees en algèbre cette fois locale [NR] (dans les années 1950-1960).

Exemple 1.2 (combien I et \sqrt{I} peuvent différer). Par exemple, si $n = 2$ et que $I = (X_1) \cap ((X_1^2, X_2^2))$ est l'intersection de l'idéal principal (X_1) et de l'idéal (X_1^2, X_2^2) engendré par X_1^2 et X_2^2 dans $\mathbb{K}[X_1, X_2]$, l'ensemble

$$\{(x_1, x_2) \in \overline{\mathbb{K}}^2; p(x_1, x_2) = 0 \quad \forall p \in I\}$$

est juste l'ensemble $\{x_1 = 0\}$; le radical de cet idéal est l'idéal principal (X_1) . D'autre part, pour qu'un polynôme en deux variables p à coefficients dans \mathbb{K} s'exprime à la fois sous la forme aX_1 et $bX_1^2 + cX_2^2$ (avec $a, b, c \in \mathbb{K}[X_1, X_2]$), il faut et il suffit que p s'écrive aX_1 , mais aussi que a s'exprime sous la forme $b_1X_1 + c_1X_2^2$; ceci équivaut à dire que P est de la forme $b_1X_1^2 + c_1X_1X_2^2$; l'idéal $I = (X_1) \cap ((X_1^2, X_2^2))$ considéré ici est donc l'idéal engendré par les deux polynômes X_1^2 et $X_1X_2^2$; cet idéal

est strictement inclus dans l'idéal principal (X_1) . L'information algébrique codée dans l'idéal (X_1^2, X_2^2) (de radical (X_1, X_2)) pourtant présent dans la décomposition de I

$$I = (X_1) \cap ((X_1^2, X_2^2)) = (X_1) \cap ((X_1, X_1 X_2, X_2^2)) = (X_1) \cap ((X_1, X_2))^2$$

proposée se trouve perdue lorsque l'on ne regarde les choses que sous l'angle géométrique (en remplaçant I par son radical).

Un objet « intermédiaire » entre I et \sqrt{I} sera amené à jouer par la suite un rôle essentiel, celui de *clôture intégrale d'un idéal*. Sans en encoder toute la structure algébrique, on verra qu'un tel objet encode bien plus que la seule structure géométrique inhérente à la donnée de l'idéal I .

DÉFINITION 1.1 (clôture intégrale d'un idéal). Soit \mathbb{A} un anneau commutatif (non nécessairement unitaire ou intègre) et I un idéal de \mathbb{A} . La clôture intégrale de I (dans l'anneau \mathbb{A}) est l'idéal¹ \bar{I} de \mathbb{A} constitué des éléments h de I tels que

$$(1.6) \quad \exists m \in \mathbb{N}, \exists a_k \in I^k \ (k = 1, \dots, m) \text{ tels que } h^m + \sum_{k=1}^m a_k h^{m-k} = 0.$$

Remarque 1.2. Une autre manière de phraser (1.6) (en phase avec la notion d'« élément entier » concernant un tel $h \in \bar{I}$) consiste à dire que hT , considéré comme élément de l'algèbre graduée $\mathbb{A}[T] = \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{A} T^k$, est *entier* par rapport à la sous-algèbre de Rees $\tilde{\mathbb{I}} := \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{I}^k T^k$ (en convenant que $\mathbb{I}^0 = \mathbb{A}$), c'est-à-dire satisfait une équation algébrique unitaire

$$(hT)^m + \sum_{k=1}^m u_k (hT)^{m-k} \quad (u_k \in \tilde{\mathbb{I}} \quad \forall k = 1, \dots, m)$$

C'est d'ailleurs ainsi que l'on observe que \bar{I} est bien un idéal lorsque I en est un.

Dans un anneau commutatif \mathbb{A} , le radical \sqrt{I} d'un idéal I est encore défini par

$$\sqrt{I} = \{h \in \mathbb{A}; \exists m = m(h, I) \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } h^m \in I\}.$$

Le radical de I est aussi bien sûr un idéal (en général beaucoup plus gros que I) et on observe qu'on a l'encadrement :

$$I \subset \bar{I} \subset \sqrt{I}$$

pour tout idéal de l'anneau commutatif \mathbb{A} . Cependant \bar{I} (tout en étant en général strictement plus gros que I) « colle » beaucoup mieux à I que ne le faisait le radical \sqrt{I} . On verra que, dans certains cas, c'est l'analyse qui permet d'encoder² (au travers précisément de \bar{I}) des éléments de la structure algébrique de I totalement perdus lorsque l'on ne retient que l'information contenue dans \sqrt{I} .

Il existe une autre caractérisation de la clôture idéale d'un idéal dans un anneau commutatif noetherien \mathbb{A} . Parmi les idéaux premiers de \mathbb{A} , considérons ceux qui sont minimaux au sens de l'ordre induit par l'inclusion. Un élément $h \in \mathbb{A}$ est dans la clôture intégrale d'un idéal I si et seulement, pour tout tel idéal premier, pour tout

1. Ce n'est pas facile de voir qu'il s'agit d'un idéal, voir la remarque 1.2 ci-dessous.
2. Tout au moins partiellement, mais c'est déjà bien.

anneau de valuation \mathbb{V} de rang 1¹ entre \mathbb{A}/\mathfrak{P} et son corps des fractions, on a $h \in I_V$. Ce critère est dit *critère valuatif*.

Plutôt que d'expliciter ici ce critère (on y reviendra), on va donner deux exemples, celui de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ des germes de fonctions holomorphes à l'origine dans \mathbb{C}^n et celui de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/I_V$, où I_V est l'idéal radical de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ constitué des germes de fonctions holomorphes à l'origine s'annulant sur un germe d'ensemble analytique $\{f_1 = \dots = f_M = 0\}$.

Exemple 1.3 (trois caractérisations équivalentes pour l'appartenance à la clôture intégrale d'un idéal dans l'anneau $\mathbb{A} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$). Une *fonction holomorphe* au voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^n est une fonction de la forme

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$$

où les c_α sont des nombres complexes tels qu'il existe $r_1 > 0, \dots, r_n > 0$ avec

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |c_\alpha| r_1^{\alpha_1} \cdots r_n^{\alpha_n} < +\infty ;$$

la fonction f est alors bien définie (et de classe C^∞ comme fonction de $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$, où $z_j = x_j + iy_j$ pour $j = 1, \dots, n$) dans le polydisque $D_{z_1}(0, r_1) \times \cdots \times D_{z_n}(0, r_n)$. Pour définir l'anneau $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}, +, \times)$ des *germes en l'origine* de telles fonctions, on quotiente l'ensemble des couples (v, f) (où v désigne un voisinage ouvert de l'origine et f une fonction holomorphe dans v) en identifiant les deux objets (v_1, f_1) et (v_2, f_2) dès que $v_1 \subset v_2$ et $(f_2)|_{v_1} = f_1$. L'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ représente les fonctions holomorphes au voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^n , mais seulement vues « infinitésimalement » localement au voisinage de l'origine. Un tel anneau est, comme l'anneau $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ lorsque \mathbb{K} est un corps commutatif, un anneau noëthérien, donc tout idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ est engendré par un nombre fini de générateurs. La clôture intégrale \bar{I} d'un idéal dans l'anneau $\mathbb{A} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ se caractérise de trois manières équivalentes ; considérons, pour $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ et $I = (f_1, \dots, f_M)$ idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, les trois assertions :

1. Une *valuation de rang 1* (ou aussi *discrète*) ν sur un corps commutatif k est une application de k dans $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ telle que $\nu(x) = \infty$ si et seulement si $x = 0$, $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ et $\nu(x + y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$ pour tout $(x, y) \in k$; l'anneau $A_\nu = \{x \in k; \nu(x) \geq 0\}$ est alors appelé *anneau de valuation discrète* attaché à la valuation ν sur le corps k . Il s'agit d'un anneau local dont le seul idéal propre maximal est $\{x \in k; \nu(x) > 0\}$. Dans le contexte mentionné ici, il faut entendre que k est le corps des fractions de \mathbb{A}/\mathfrak{P} , \mathfrak{P} parcourant la famille des idéaux premiers minimaux de l'anneau \mathbb{A} . Les valuations entrent en jeu dans la définitions des valeurs absolues non archimédiennes sur un corps commutatif k , c'est-à-dire les valeurs absolues $|\cdot| : k \rightarrow [0, +\infty[$ qui vérifient à la place de l'inégalité triangulaire archimédienne sur k ($|x + y| \leq |x| + |y|$) l'inégalité ultramétrique $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$. Sur le corps \mathbb{Q} par exemple, vit une seule valeur absolue archimédienne (la valeur absolue usuelle, pour laquelle le complété de $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ est \mathbb{R}), tandis que les valeurs absolues non archimédiennes sont indexées par l'ensemble des nombres premiers : si p est un tel nombre premier, $|m/n|_p$ désigne $p^{-\nu_p(m/n)}$, où $\nu_p(m/n)$ désigne l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de m/n (par exemple, comme $7/30 = 7^1 \times 3^{-1} \times 2^{-1} \times 5^{-1}$, on a $|7/30|_7 = 1/7$, $|7/30|_3 = 3$, $|7/30|_2 = 2$, $|7/30|_5 = 5$; on observe ici que le produit de toutes les valeurs absolues (archimédiennes ou non) d'un nombre rationnel vaut 1 (c'est la *formule du produit*). Le complété de $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ est l'ensemble des nombres p -adiques; c'est un corps de caractéristique 0 et de clôture intégrale le corps \mathbb{C}_p des nombres complexes p adiques.

- (1) $h \in \bar{I}$, ce qui signifie qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \in I$, $a_2 \in I^2, \dots, a_m \in I^m$, tels que

$$h^m + a_1 h^{m-1} + \dots + a_m = 0.$$

C'est juste ici la définition de l'appartenance d'un élément de l'anneau à la clôture intégrale de l'idéal I .

- (2) Il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait, dans un voisinage ouvert v infinitésimalement petit de l'origine, l'inégalité

$$(1.7) \quad \forall z \in v, |h(z)| \leq C \|f(z)\|,$$

où $f = (f_1, \dots, f_M)$ est un système de générateurs de I (cette propriété (1.7) ne dépendant pas du système de générateurs, quitte à modifier la constante C); la norme $\| \cdot \|$ choisie ici est la norme euclidienne sur \mathbb{C}^M , ce choix étant sans effet puisque toutes les normes sont équivalentes sur \mathbb{C}^M .

- (3) Pour toute courbe paramétrée complexe $\gamma : t \in D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}^n$ telle que $\gamma(0) = (0, \dots, 0)$ (γ est ici une fonction holomorphe de la variable complexe t), la valuation¹ en $t = 0$ de la fonction $t \in D(0, 1) \mapsto h(\gamma(t))$ est supérieure ou égale au minimum des valuations en 0 de toutes les fonctions $t \in D(0, 1) \mapsto f_j(\gamma(t))$, ou encore

$$\text{val}_0(h \circ \gamma) \geq \min_{1 \leq j \leq M} \text{val}_0(f_j \circ \gamma) = \min_{f \in I} (\text{val}_0(f \circ \gamma)).$$

Pour montrer que (1) \implies (2), voici comment on raisonne, en supposant $I = (f_1, \dots, f_M)$; avec la norme choisie sur \mathbb{C}^M , le fait que

$$h^m + \sum_{k=1}^M a_k h^{m-k} = 0$$

implique, pour z voisin de l'origine dans \mathbb{C}^n ,

$$|h(z)|^m = \left| \sum_{k=1}^M a_k(z) h^{m-k}(z) \right| \leq \sum_{k=1}^M C_k \|f(z)\|^k |h(z)|^{m-k}$$

(puisque $a_k \in I^k = ((f_1, \dots, f_M))^k$, il existe une constante positive C_k telle que $|a_k(z)| \leq C_k \|f(z)\|^k$ au voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^n). En posant $u(z) = |h(z)| / \|f(z)\|$, on observe donc que

$$(u(z))^m \leq \sum_{k=1}^m (u(z))^{m-k}$$

dans un voisinage de 0 (privé des zéros communs des f_j), ce qui implique que $u(z) \leq C$ dans ce voisinage pour une certaine constante positive C , ce qui correspond bien à la clause (2).

Le fait que (2) \implies (3) est immédiat. L'implication (3) \implies (1) est beaucoup plus difficile et ne sera reprise que plus tard dans ce cours. La clause (3) correspond ici au critère valuatif mentionné plus haut.

1. La valuation en 0 d'une fonction g d'une variable complexe t holomorphe au voisinage de $t = 0$ est l'exposant $\nu = \text{val}_0(g)$ du premier monôme non nul dans le développement de Taylor de g au voisinage de 0 : $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (g^{(k)}(0)/k!) t^k = a_\nu t^\nu + a_{\nu+1} t^{\nu+1} + \dots$; on convient que $\text{val}_0(g) = +\infty$ si $g \equiv 0$ au voisinage de $t = 0$. Il s'agit d'un cas particulier de la notion de valuation discrète mentionnée plus haut.

Exemple 1.4 (trois caractérisations équivalentes pour l'appartenance à la clôture intégrale d'un idéal dans l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/I_V$). On reprend l'exemple précédent, mais cette fois, on considère dans l'anneau noëthérien $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ un idéal radical I_V (donc tel que $I_V = \sqrt{I_V}$) dont l'ensemble des zéros $V = V(I_V) = \{z; g(z) = 0 \forall g \in I_V\}$ est un germe à l'origine de sous-ensemble analytique fermé¹. L'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/I_V$ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ -module de type fini. On peut considérer ses éléments comme les « fonctions holomorphes sur le germe de sous-ensemble analytique V ». Si V est un germe de variété analytique complexe de dimension complexe de dimension $1 \leq k \leq n - 1$ ², les choses sont claires, car les fonctions holomorphes sont bien définies intrinsèquement sur la variété; dans le cas où V présente des singularités, c'est précisément comme éléments de cet anneau quotient $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/I_V$ que l'on définit, ce qui est naturel, les germes de fonctions holomorphes sur V au voisinage de 0 (dans V). Dans un tel anneau $\mathbb{A} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/I_V$, on a encore, étant donné un idéal $I = (f_1, \dots, f_M)$ (de type fini car l'anneau est encore noëthérien), l'équivalence :

$$h \in \bar{I} \iff (\exists C > 0, \text{ t.q. } |h(z)| \leq C \|f(z)\| \text{ au voisinage de } 0, \text{ mais sur } V \text{ cette fois}).$$

Cette équivalence passe encore par un critère valuatif (3') plus délicat à formuler car il faut regarder les germes de courbe tracés sur les diverses composantes irréductibles de V au voisinage de 0 et que ces composantes ne sont en général pas des variétés analytiques complexes (car elles peuvent être singulières au sens géométrique en 0). Toutefois, le critère valuatif se formule algébriquement comme nous l'avons fait avant de traiter ces deux derniers exemples de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/I_V$.

Avant de présenter l'exemple suivant (qui nous guidera vers le théorème 1.2 à suivre), indiquons deux objets de nature très différente encodant la « complexité géométrique » d'un polynôme en n variables à coefficients dans un corps commutatif \mathbb{K} .

- le premier est le degré total du polynôme, par exemple 10003 si

$$p(X_1, X_2) = 1 + X_1^{10000} X_2^3 + X_1 X_2 + 6X_1^5 X_2^3 - X_1^{50} X_2^7 \in \mathbb{K}[X_1, X_2];$$

- le second est de nature combinatoire : dans l'espace \mathbb{R}^n , on représente l'ensemble support(P) constitué des points à coordonnées entières $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans \mathbb{N}^n tels qu'un monôme $a_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ soit effectivement présent avec un coefficient $a_\alpha \in \mathbb{K}^*$ non nul dans le développement du polynôme p . Par exemple, pour le polynôme p choisi au premier item :

$$\text{support}(P) = \{(0, 0), (10000, 3), (1, 1), (5, 3), (50, 7)\}.$$

1. Un *sous-ensemble analytique fermé* d'un ouvert de \mathbb{C}^n est un sous-ensemble de cet ouvert pouvant être défini localement au voisinage de tout point de cet ouvert comme le lieu des zéros communs d'un nombre fini (éventuellement vide) de fonctions holomorphes.

2. Il s'agit d'un alors d'un germe de variété différentielle de dimension réelle $2k$, les transformations de changement de cartes étant cette fois des transformations biholomorphes entre ouverts de $\mathbb{C}^k = \mathbb{R}^k + i\mathbb{R}^k$ au lieu d'être seulement des difféomorphismes C^∞ . Les variétés analytiques complexes sont toujours orientables; lorsqu'elles sont de dimension 1, on les appelle des *surface de Riemann* : le plan complexe, la sphère $S^2 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, le tore $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$, en sont des exemples importants. Dans ce cours, $\mathbb{C}^k, \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ ainsi que les variétés dites *toriques* de dimension k seront des exemples que l'on croquera fréquemment.

L'enveloppe convexe fermée (dans \mathbb{R}^n) du support d'un tel polynôme p s'appelle le *polyèdre (ou diagramme) de Newton* de p ; le volume n -dimensionnel de ce *polyèdre de Newton* (une fois ce volume multiplié par $n!$ puisque $1/n!$ est la mesure du simplexe de sommets $(0, \dots, 0)$ et les extrémités de la base canonique de \mathbb{R}^n) est un autre indicateur important de la complexité géométrique du polynôme p ; au contraire du degré, cet indicateur rend compte du fait que l'expression du polynôme p puisse être très lacunaire (même si, comme dans l'exemple choisi, le degré est très grand).

Dans la suite du cours, on retrouvera ces notions, reliant l'algèbre commutative à la géométrie des polytopes convexes dans \mathbb{R}^n et à la combinatoire. L'exemple ci-dessous y fait justement appel.

Exemple 1.5 (un exemple jouet : celui des idéaux monomiaux). . Soit I un idéal de $\mathbb{K}[X_1, X_2]$ engendré par un nombre fini de monômes $(X_1^{\alpha_{1,1}} X_2^{\alpha_{1,2}}, \dots, X_1^{\alpha_{M,1}} X_2^{\alpha_{M,2}})$. Le sous-ensemble du plan \mathbb{R}^2 défini par

$$E(I) = \bigcup_{j=1}^M ([\alpha_{j,1}, +\infty[\times [\alpha_{j,2}, +\infty[$$

(c'est une union de « quadrants ») est, de part son allure même, appelé *escalier* de l'idéal I : dire que p est un polynôme appartenant à I signifie que $\text{support}(p) \subset E(I)$. En effet, le support d'un polynôme de la forme

$$X_1^{\alpha_{j,1}} X_2^{\alpha_{j,2}} q_j(X_1, X_2) \quad (j \in \{1, \dots, M\}, q_j \in \mathbb{K}[X_1, X_2])$$

est inclus (comme par conséquent son diagramme de Newton) dans le quadrant $[\alpha_{j,1}, +\infty[\times [\alpha_{j,2}, +\infty[$; cette propriété caractérise d'ailleurs de tels polynômes. Le support d'un élément de I , de la forme

$$\sum_{j=1}^M X_1^{\alpha_{j,1}} X_2^{\alpha_{j,2}} q_j(X_1, X_2),$$

est donc bien (comme son diagramme de Newton) dans l'escalier $E(I)$. Les polynômes de support dans cet escalier sont d'ailleurs exactement les éléments de I . Regardons maintenant l'idéal I_0 de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ engendré par les germes en $(0,0)$ des monômes engendrant I . Les éléments f de l'idéal I_0 sont les germes en $(0,0)$ de fonctions holomorphes de la forme

$$f : z \mapsto \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^2} c_\gamma[f] z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2}$$

où

$$\text{support}(f) := \{\gamma \in \mathbb{N}^2 ; c_\gamma[f] \neq 0\} \subset E(I).$$

Dire que $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ appartient à $\overline{I_0}$ (dans l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$) signifie maintenant que, si

$$h : z \mapsto \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^2} c_\gamma[h] z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2}$$

on a

$$\text{support}(h) := \{\gamma \in \mathbb{N}^2 ; c_\gamma[h] \neq 0\} \subset \text{conv}(E(I)).$$

L'idéal $\overline{I_0}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ est donc en général plus gros que I_0 . Cependant, il résulte du théorème de Carathéodory en géométrie affine (ici en dimension 2)¹ que

$$\text{conv}(E(I)) + \text{conv}(E(I)) \subset E(I)$$

(si l'on était dans \mathbb{R}^n et non plus dans \mathbb{R}^2 , il faudrait ajouter n fois l'enveloppe convexe $\text{conv}(E(I))$ pour retomber dans $E(I)$, c'est la somme de Minkovski des polytopes de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^n qui est ici en jeu). On voit donc que pour un tel idéal monomial dans $\mathbb{K}[X_1, X_2]$, certes $I_0 \subset \overline{I_0}$ et $I_0 \neq \overline{I_0}$ en général (comme idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$); cependant $\overline{I_0}^2 \subset I_0$ (en fait, on a même $\overline{I_0}^2 \subset I_0$). Au contraire de l'exposant de Noëther m tel que $(\sqrt{I_0})^m \subset I_0$ (qui, lui, dépend de I_0), il se pourrait que l'on dispose d'un exposant uniforme (ne dépendant que de $\mathbb{A} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ et non de I_0 , ici valant justement $\mu = 2$) tel que $\overline{I_0}^\mu \subset I_0$ pour tout idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$; cela marche en tout cas si I_0 est engendré par des germes en $(0,0)$ de monômes. C'est effectivement ce qui se passe pour certains anneaux (justement en particulier $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$), et c'est le sens du théorème 1.2 ci-dessous.

Un anneau commutatif *local* est un anneau commutatif unitaire dans lequel un seul idéal propre, noté $\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}$, se trouve être maximal, auquel cas $\mathbb{A}/\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}$ est un corps commutatif², dit corps résiduel $k_{\mathbb{A}}$; de plus $\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}/(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})^2$ est un $k_{\mathbb{A}}$ -espace vectoriel.

DÉFINITION 1.2 (anneau local régulier). Un anneau commutatif local est dit régulier de dimension n s'il est de plus noëtherien et tel que le $k_{\mathbb{A}}$ -espace vectoriel $\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}/(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})^2$ (alors nécessairement de dimension finie) soit exactement égale à la dimension de Krull de l'anneau \mathbb{A} , c'est-à-dire à la longueur de la plus grande chaîne strictement croissante d'idéaux de \mathbb{A} .

Exemple 1.6. Les exemples les plus importants d'anneaux locaux réguliers exploités dans ce cours sont fournis par l'anneau des séries formelles $\mathbb{K}[[X_1, \dots, X_n]]$ à coefficients dans un corps commutatif, le localisé $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)}$ de l'anneau des polynômes en l'idéal premier maximal (X_1, \dots, X_n) , l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ ou plus généralement $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ des germes de fonctions holomorphes en un point x d'une variété analytique complexe de dimension n , par exemple l'espace projectif

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\})/\mathcal{R},$$

où \mathcal{R} est la relation de colinéarité dans $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, variété analytique complexe compacte dont on reparlera souvent au fil de ce cours.

THEORÈME 1.2 (théorème dit de Briançon-Skoda). *Si \mathbb{A} est un anneau commutatif local régulier de dimension n , alors, pour tout idéal I de \mathbb{A} , on dispose de la chaîne d'inclusions*

$$(1.8) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \overline{I^{n+(k-1)}} \subset I^k.$$

Plus généralement, si \mathbb{A} est un anneau local de type fini sur un anneau local noëtherien excellent, il existe un entier μ , dit exposant de Briançon-Skoda de \mathbb{A} , ne dépendant

1. Si E est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^n , un point de l'enveloppe convexe fermé de E se réalise comme une combinaison barycentrique de $n+1$ points de E .

2. Si $\bar{x} \in \mathbb{A}/\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}$ est tel que $\bar{x} \neq 0$, relevons \bar{x} en un élément de $\mathbb{A} \setminus \mathfrak{M}_{\mathbb{A}}$; comme $\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}$ est l'unique idéal maximal de \mathbb{A} , $(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}, x)$ est certainement l'anneau \mathbb{A} tout entier; \bar{x} est donc inversible dans $\mathbb{A}/\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}$ qui est donc un corps.

que de \mathbb{A} , tel que, pour tout idéal I de \mathbb{A} , on dispose de la chaîne d'inclusions

$$(1.9) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \overline{I^{\mu+(k-1)}} \subset I^k.$$

Au travers de ce cours, nous verrons diverses approches (et digressions) autour de ce théorème jouant aujourd'hui un rôle important à la croisée de l'algèbre commutative, de la géométrie et de l'analyse. La formulation dans le cadre $\mathbb{A} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ (donc $\mathbb{A} = \mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$) est due à J. Briançon et H. Skoda [**BriS**]; elle est basée sur les méthodes L^2 en analyse pluricomplexe introduites par L. Hörmander. La transcription au cadre algébrique est arrivée curieusement seulement presque dix ans plus tard, avec les travaux de J. Lipman, A. Sathaye et B. Teissier ([**LS**, **LT**]). Le second résultat, dans le cadre des anneaux locaux non réguliers, est beaucoup moins connu (de par le peu d'information dont on dispose à propos de l'exposant μ en termes d'effectivité); il est dû à C. Huneke [**Hun**] (on se reportera à [**SwH**] pour une présentation plus récente), mais nous en donnerons dans ce cours une nouvelle approche. Nous ne dirons pour l'instant ici rien de précis concernant le qualificatif *excellent* si ce n'est que les divers anneaux locaux réguliers mentionnés dans l'exemple 1.6 (comme d'ailleurs tous les anneaux locaux réguliers impliqués dans les questions d'algèbre ou de théorie des nombres) sont excellents. L'exemple typique d'application du résultat d'Huneke est celui où $\mathbb{A} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/I_V$, où I_V est un idéal radical et $V = V(I_V)$ désigne un germe d'ensemble analytique de dimension pure¹ $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et I_V l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ constitué des germes de fonctions holomorphes en n variables s'annulant sur V ; le point ici est que V présente (considéré sous l'angle ensembliste) un ensemble singulier non vide (par exemple si $n = 2$ et si V est le germe en $(0,0)$ de l'ensemble analytique (c'est une courbe) dit *cusp* $\{(z_1, z_2); z_1^2 - z_2^3 = 0\}$); c'est la raison pour laquelle on dit alors que l'anneau $\mathbb{A} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/I_V$ est un anneau local *singulier* et non plus *régulier*; on peut toutefois parler de sa dimension, qui vaut cette fois k , et qui est la dimension de l'ouvert $V \setminus V^{\text{sing}}$ de V , considéré comme une variété analytique complexe (c'est aussi, notons le, la dimension de Krull de $\mathbb{A} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/I_V$).

Pour terminer cette section, nous allons mettre à contribution la puissance du théorème 1.2 pour produire une démonstration tout-à-fait différente de celle que nous avons présenté du théorème des zéros de Hilbert (théorème 1.1) dans le cadre $\mathbb{A} = \mathbb{C}$; il n'y aura plus cette fois d'algorithme car il s'agira d'un argument direct reposant sur un travail dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, variété analytique complexe compacte de dimension n . Le théorème suivant, prouvé par D. Brownawell en 1987 [**Brow**], arriva réellement comme une surprise, soixante ans après l'article de Greta Hermann [**Her**] et presque cent ans après la démonstration du théorème de Hilbert. Ce résultat révèle que le problème des zéros de Hilbert est un problème de nature géométrique, et non algébrique, comme l'approche algorithmique fondée sur la théorie de l'élimination et présentée à la section 1.1 aurait pu le laisser penser.

THEORÈME 1.3 (le nullstellensatz sur $\mathbb{A} = \mathbb{C}$ revisité par D. Brownawell [**Brow**]).
Soient p_1, \dots, p_M , M polynômes en n variables à coefficients complexes tels que

$$\{z \in \mathbb{C}^n; p_1(z) = \dots = p_M(z) = 0\} = \emptyset.$$

1. Dire que V est de dimension pure k signifie en fait que I_V est intersection finie d'idéaux premiers tous de même dimension de Krull k .

Soit $D = \max_{1 \leq j \leq n} \deg(p_j)$. Il existe des polynômes q_1, \dots, q_M dans $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, tels que $\max_j \deg(p_j q_j) \leq n D^n$ et que l'on ait l'identité

$$1 \equiv \sum_{j=1}^M p_j q_j,$$

cette identité polynomiale étant entendue dans $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

Remarque 1.3. L'estimation des degrés des $p_j q_j$ est cette fois en $n D^n$ et non plus en $2(2D)^{2^{n-1}}$. On trouve des bornes en accord avec la théorie géométrique de l'intersection, que l'on introduira dans la section suivante. Ceci ne signifie toutefois malheureusement encore rien au niveau de la complexité algorithmique du problème des zéros de Hilbert sur \mathbb{C} (P -complet ou seulement NP -complet ?) ; la démarche de D. Brownawell n'est en effet pas algorithmique comme l'était celle de G. Hermann.

DÉMONSTRATION. On admet ici qu'il est possible de construire n combinaisons linéaires (à coefficients constants) $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n$, toutes de degré D , telles que

$$(1.10) \quad \sum_{j=1}^n \frac{|\tilde{p}_j(z)|}{\|z\|^D} \geq \kappa (1 + \|z\|)^{-D^n}$$

pour $|z| \gg 1$ suffisamment grand, avec $\kappa > 0$. Exprimons ici cette condition en coordonnées homogènes $[w_0 : w_1 : \dots : w_n]$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Cela revient à exprimer les coordonnées affines (z_1, \dots, z_n) dans \mathbb{C}^n en termes des coordonnées homogènes $[w_0 : w_1 : \dots : w_n]$, soit

$$z_1 = w_1/w_0, \dots, z_n = w_n/w_0.$$

Si l'on note

$$\tilde{P}_j(w_0, \dots, w_n) = w_0^D \tilde{p}_j(w_1/w_0, \dots, w_n/w_0),$$

on déduit de (1.10) que

$$\sum_{j=1}^n \frac{|\tilde{P}_j(w_0, \dots, w_n)|}{\|w\|^D} \geq \kappa \frac{|w_0|^{D^n}}{\|w\|^{D^n}}.$$

Ceci implique que si x est un point quelconque de

$$\{w_0 = 0\} \cap \{\tilde{P}_1(w) = \dots = \tilde{P}_n(w)\}$$

dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, le germe de la fonction $w \mapsto w_0^{D^n}$ se trouve être dans la clôture intégrale dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), x}$ de l'idéal engendré par les $\tilde{P}_j(w)$ (ainsi exprimés en coordonnées homogènes $[w_0 : \dots : w_n]$), suivant la formulation (2) de la clause d'appartenance à la clôture intégrale (voir l'exemple 1.3). Il résulte alors du théorème 1.2 que $w_0^{D^n}$ se trouve dans l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), x}$ engendré par les germes en x des fonctions $w \mapsto \tilde{P}_j(w)$, une fois ces fonctions transcrites en coordonnées locales sur la variété analytique complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ au voisinage du point x de l'hyperplan à l'infini¹. On déduit de tout cela

1. Du point de vue algébrique, l'hyperplan « à l'infini » de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est un hyperplan comme un autre (explicitement : $\{w_0 = 0\}$). Du point de vue de l'analyse au contraire, la notion d'« infini » prend un tout autre sens, bien plus explicite ; tendre vers l'infini est une notion qui présente une signification très concrète et explicite. C'est là probablement l'une des raisons qui expliquent l'écart de presque cent ans entre le résultat de Hilbert (1893) et celui de D. Brownawell (1987).

(puisque p_1, \dots, p_M n'ont, eux, aucun zéro commun dans $\mathbb{C}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \{w_0 = 0\}$) que le polynôme homogène $W_0^{nD^n}$ est dans l'idéal engendré dans $\mathbb{C}[W_0, \dots, W_n]$ par les $n + M$ polynômes $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m, P_1, \dots, P_M$ (si P_1, \dots, P_m désignent les homogénéisés des polynômes originaux p_1, \dots, p_m). Comme tous les polynômes en jeu sont ici homogènes, il existe des polynômes homogènes $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n$ de degrés $nD^n - D$, des polynômes Φ_1, \dots, Φ_M homogènes de degrés respectifs $nD^n - d_j$, $j = 1, \dots, M$, tels que

$$W_0^{nD^n} = \sum_{j=1}^n \tilde{p}_j(W) \tilde{Q}_j(W) + \sum_{j=1}^M P_j(W) \Phi_j(W).$$

En déshomogénéisant (c'est-à-dire en substituant $W_0 = 1, W_1 = X_1, \dots, W_n = X_n$ dans cette identité polynomiale dans $\mathbb{C}[W_0, \dots, W_n]$), on obtient l'identité $1 = \sum_{j=1}^M p_j q_j$ voulue dans $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, ce avec les estimations de degré requises. \square

En relation avec le concept de régularité introduit lors de la définition des anneaux locaux réguliers, nous allons introduire dans un anneau commutatif les concepts de *suite régulière* et de *suite quasi-régulière*. Nous illustrerons ensuite ces concepts dans le cadre des anneaux $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ (\mathbb{K} corps commutatif), puis $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$.

DÉFINITION 1.3 (suite régulière dans un anneau commutatif). Soit \mathbb{A} un anneau commutatif et (a_1, \dots, a_M) une suite d'éléments de \mathbb{A} . La suite (a_1, \dots, a_M) (l'ordre est ici important, voir la remarque 1.4) est dite *régulière* dans l'anneau \mathbb{A} si et seulement si :

- l'idéal $(a_1, \dots, a_M) \subset \mathbb{A}$ est distinct de l'anneau \mathbb{A} tout entier ;
- $a_1 \neq 0$;
- pour tout $j = 1, \dots, M - 1$, a_{j+1} n'est pas diviseur de 0 dans l'anneau quotient $\mathbb{A}/(a_1, \dots, a_j)$, ce qui signifie :

$$\left(a_{j+1} u \equiv 0 \text{ modulo } (a_1, \dots, a_j) \right) \implies u \in (a_1, \dots, a_j).$$

Remarque 1.4. Une suite (a_1, \dots, a_M) d'éléments d'un anneau peut fort bien être régulière lorsqu'elle est prise dans un certain ordre, mais pas dans un autre : par exemple la suite $(X_1 X_3, X_2 X_3, X_3 + 1)$ d'éléments de $\mathbb{K}[X_1, X_2, X_3]$ (\mathbb{K} corps commutatif) n'est pas régulière dans $\mathbb{K}[X_1, X_2, X_3]$ ($X_2 X_3$ est diviseur de 0 dans $\mathbb{K}[X_1, X_2, X_3]/(X_1 X_3)$ car $(X_2 X_3) X_1 \in (X_1 X_3)$ alors que $X_1 \notin (X_1 X_3)$); elle le devient par contre lorsqu'elle est prise dans l'ordre $(X_3 + 1, X_1 X_3, X_2 X_3)$.

Exemple 1.7. Si \mathbb{A} est un anneau local régulier de dimension n et que $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ est une base du $k_{\mathbb{A}}$ -espace vectoriel $\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}/(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})^2$ ($\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}$ désignant l'idéal maximal, $k_{\mathbb{A}}$ le corps résiduel), toute suite x_1, \dots, x_n obtenue en prenant des représentants dans $\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}$ des classes \bar{x}_j , $j = 1, \dots, n$, est régulière.

Dans un anneau commutatif local, toute suite (a_1, \dots, a_M) régulière lorsque prise dans un ordre donné le reste quand on la lit dans un ordre arbitraire. Ceci est en revanche faux lorsque l'anneau n'est plus local (voir la remarque 1.4). Si l'on souhaite un concept de régularité pour une suite donnée non conditionné à un ordre privilégié, il faut introduire une notion différente, celle de *suite quasi-régulière*.

DÉFINITION 1.4 (suite quasi-régulière). Une suite (a_1, \dots, a_M) d'éléments d'un anneau commutatif \mathbb{A} est dite *quasi-régulière* si et seulement

$$(1.11) \quad \begin{aligned} & \forall k \in \mathbb{N}^*, \left(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^M \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_M = k}} u_{k,\alpha} a_1^{\alpha_1} \dots a_M^{\alpha_M} \in (a_1, \dots, a_M)^{k+1} \quad (\text{où } u_{k,\alpha} \in \mathbb{A}) \right) \\ & \implies \left(\forall \alpha \in \mathbb{N}^M, u_{k,\alpha} \in (a_1, \dots, a_M) \right). \end{aligned}$$

Exercice 1.1. Si (a_1, \dots, a_M) est une suite d'éléments pris dans un anneau commutatif \mathbb{A} , on constate que si $k \in \mathbb{N}^*$ et $h \in (a_1, \dots, a_M)^k$, c'est-à-dire

$$h = \prod_{j=1}^k \left(\sum_{\ell=1}^M u_{j,\ell} a_\ell \right) \quad (u_{j,\ell} \in \mathbb{A}),$$

alors

$$\forall \alpha \in (\mathbb{N}^*)^M \quad \text{tel que } \alpha_1 + \dots + \alpha_M = k + M - 1, \quad h \in (a_1^{\alpha_1}, \dots, a_M^{\alpha_M})$$

(vous pouvez le vérifier en exercice, c'est ici facile). On a donc la chaîne d'inclusions

$$(1.12) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, (a_1, \dots, a_M)^k \subset \bigcap_{\substack{\alpha \in (\mathbb{N}^*)^M \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_M = k + M - 1}} (a_1^{\alpha_1}, \dots, a_M^{\alpha_M}),$$

ce quelque soit la suite (a_1, \dots, a_M) d'éléments de l'anneau commutatif \mathbb{A} . Lorsque cette suite se trouve de plus être quasi-régulière, il se trouve que chaque inclusion (1.12) devient une égalité et que l'on a donc en fait la chaîne d'égalités ensemblistes :

$$(1.13) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, (a_1, \dots, a_M)^k = \bigcap_{\substack{\alpha \in (\mathbb{N}^*)^M \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_M = k + M - 1}} (a_1^{\alpha_1}, \dots, a_M^{\alpha_M}).$$

On peut démontrer les égalités (1.13) par récurrence sur k (le cas $k = 1$, pour initier la récurrence, correspond juste à l'égalité $(a_1, \dots, a_M) = (a_1, \dots, a_M)$). Ce qu'il faut établir pour prouver

$$(\mathcal{P}_{k+1}) \quad (a_1, \dots, a_M)^{k+1} = \bigcap_{\substack{\alpha \in (\mathbb{N}^*)^M \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_M = k + M}} (a_1^{\alpha_1}, \dots, a_M^{\alpha_M})$$

après avoir admis

$$(\mathcal{P}_k) \quad (a_1, \dots, a_M)^k = \bigcap_{\substack{\alpha \in (\mathbb{N}^*)^M \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_M = k + M - 1}} (a_1^{\alpha_1}, \dots, a_M^{\alpha_M}),$$

est l'assertion suivante : si $u \in \mathbb{A}$ est tel que

$$u a_1^{\alpha_1} \dots a_M^{\alpha_M} \in (a_1^{\alpha_1+1}, \dots, a_M^{\alpha_M+1}),$$

pour un α dans $(\mathbb{N}^*)^M$, alors $u \in (a_1, \dots, a_M)$.

- Pourquoi prouver cette assertion suffit-il pour prouver \mathcal{P}_{k+1} lorsque l'on admet \mathcal{P}_k ?
- Prouvez cette assertion lorsque la suite (a_1, \dots, a_M) est régulière (vous pouvez trouver la réponse dans la section 3 de [LT]).
- Prouvez la aussi lorsque la suite (a_1, \dots, a_M) est quasi-régulière.

Cet exercice est en fait inspiré d'un argument de M. Hobster [LT], section 3. On se doute, à la lecture de la chaîne d'inclusions (1.8) figurant dans la formulation du théorème 1.2 qu'il y a des liens étroits entre cette chaîne d'inclusions et la chaîne d'égalités (1.13) que l'on demande dans cet exercice d'établir.

La clause de quasi-régularité (1.11) se révèle lourde à écrire. On va observer dans la section suivante que, dans le cadre d'anneaux tels que $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ou $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$, le recours aux idées issues de la géométrie en fournit une version bien plus maniable.

1.3. Sous-ensembles algébriques, germes d'ensembles analytiques

Soit \mathbb{K} un corps algébriquement clos (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ qui sera notre exemple de référence dans cette section). Le théorème des zéros de Hilbert (théorème 1.1) assure, on l'a observé à la fin de la section 1.1, une correspondance bijective entre les idéaux radicaux de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ($I = \sqrt{I}$) et les sous-ensembles de \mathbb{K}^n définis par un nombre fini d'équations polynomiales. Nous allons dans cette section étudier plus en détail de tels ensembles, préparant ainsi le terrain à une étude plus détaillée qui sera conduite au chapitre 2.

DÉFINITION 1.5 (sous-ensembles algébriques). Soit \mathbb{K} un corps algébriquement clos; un sous-ensemble algébrique de \mathbb{K}^n est par définition un sous-ensemble de la forme

$$V = \{x \in \mathbb{K}^n; p_1(x) = \dots = p_M(x) = 0\}, \quad p_1, \dots, p_M \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n].$$

Si $I(V)$ est l'idéal radical

$$I(V) = \{q \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]; q(x) = 0 \quad \forall x \in V\},$$

on a aussi bien sûr :

$$V = \{x \in \mathbb{K}^n; q(x) = 0 \quad \forall q \in I(V)\}.$$

Prouvons d'abord le premier résultat suivant :

PROPOSITION 1.1 (idéaux premiers et irréductibilité). *Si \mathbb{K} est un corps algébriquement clos et que V est un sous-ensemble algébrique de \mathbb{K}^n tel que l'idéal radical $I(V)$ soit premier, V est irréductible au sens suivant : la seule manière d'exprimer le sous-ensemble V comme union $V_1 \cup V_2$ de deux sous-ensembles algébriques de \mathbb{K}^n est $V = \emptyset \cup V = V \cup \emptyset$. Réciproquement, si V est irréductible, $I(V)$ est premier.*

DÉMONSTRATION. Supposons $I(V)$ premier et $V = V_1 \cup V_2$. Si V_1 était strictement inclus dans V , il existerait un élément $q_1 \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ tel que $(q_1)|_{V_1} \equiv 0$ et $(q_1)|_V \not\equiv 0$. Idem si V_2 était strictement inclus dans V : il existerait $q_2 \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ tel que $(q_2)|_{V_2} \equiv 0$ et $(q_2)|_V \not\equiv 0$; on aurait $q_1 q_2 \in I(V)$, d'où $q_1 \in I(V)$ ou $q_2 \in I(V)$ puisque $I(V)$ est supposé premier, ce qui est exclus. Si V est irréductible et que fg s'annule sur V , on a, comme $V = V((I(V), f)) \cup V((I(V), g))$, nécessairement $V = V((I(V), f))$ ou $V = V((I(V), g))$, donc $f \in I(V)$ ou $g \in I(V)$; l'idéal $I(V)$ est donc premier dans ce cas. \square

On admet ici que tout idéal radical de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ s'écrit comme une intersection finie d'idéaux premiers distincts :

$$I = \mathfrak{P}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{P}_{K'}.$$

On reviendra sur cette finitude au chapitre 2 (elle résulte du fait que $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I$ est $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ module de type fini, où $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est un anneau noëthérien, c'est-à-dire un anneau dans lequel toute suite croissante d'idéaux est stationnaire ou encore, ce qui est équivalent, tout idéal est de type fini).

Ces idéaux premiers $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_{K'}$ peuvent être organisés en chaînes croissantes pour la relation d'ordre fournie par l'inclusion. En fait, il suffit de retenir dans la liste $\{\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_{K'}\}$ les éléments minimaux dans ces chaînes croissantes et l'on peut représenter l'idéal radical I sous la forme

$$I = \mathfrak{P}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{P}_K \quad (K \leq K'),$$

où cette fois il n'y a aucune relation d'inclusion entre deux \mathfrak{P}_{j_1} et \mathfrak{P}_{j_2} lorsque $j_1 \neq j_2$ et $1 \leq j_1, j_2 \leq K$. Une telle décomposition est minimale¹ et conduit à une décomposition

$$V(I) = V(\mathfrak{P}_1) \cup \dots \cup V(\mathfrak{P}_K)$$

qui est la décomposition de $V(I)$ en sous-ensembles algébriques irréductibles.

Exemple 1.8 (hypersurfaces algébriques). Si $p \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, p admet une décomposition en puissances de polynômes irréductibles p_j :

$$p(X) = \prod_{j=1}^K p_j^{\mu_j} ;$$

les p_j et les entiers μ_j sont, comme dans le cadre de l'arithmétique (décomposition en facteurs premiers $n = p_1^{\mu_1} \dots p_K^{\mu_K}$ d'un entier strictement positif), déterminés de manière unique (à un élément multiplicatif de \mathbb{K}^* près en ce qui concerne les p_j). Dans ce cas

$$\sqrt{(p)} = \bigcap_{j=1}^K (p_j) = (p_1 \dots p_K).$$

Le polynôme $p_1 \dots p_K$, générateur de l'idéal principal $\sqrt{(p)}$ est dit *polynôme réduit* de p . Le sous-ensemble algébrique de \mathbb{K}^n défini comme le lieu des zéros d'un tel polynôme p (ou, ce qui revient au même, de son polynôme réduit p_{red}) est appelé *hypersurface algébrique* de \mathbb{K}^n . La décomposition de $p^{-1}(0)$ en sous-ensembles algébriques irréductibles est alors $p^{-1}(0) = \bigcup_{j=1}^K p_j^{-1}(0)$. Lorsque le polynôme p_{red} définissant l'hypersurface $p_{\text{red}}^{-1}(0)$ est de degré 1, on dit que l'hypersurface est un \mathbb{K} -*hyperplan* de \mathbb{K}^n .

Armés de ces préliminaires, on peut définir la *dimension* et le *degré* d'un sous-ensemble algébrique de \mathbb{K}^n .

DÉFINITION 1.6 (dimension d'un sous-ensemble algébrique de \mathbb{K}^n lorsque \mathbb{K} est un corps algébriquement clos). Soit V un sous-ensemble algébrique de \mathbb{K}^n et

$$I(V) = \{q \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] ; q|_V \equiv 0\}$$

son idéal radical. Soit

$$I(V) = \bigcap_{j=1}^K \mathfrak{P}_j$$

1. Au sens où les \mathfrak{P}_j sont distincts et aucun d'eux ne contient l'intersection de tous les autres.

la décomposition « minimale » de $I(V)$ correspondant à sa décomposition en sous-ensembles algébriques irréductibles $V = \bigcup_{j=1}^K V(\mathfrak{P}_j)$. On appelle *dimension (au sens algébrique)* de V le maximum des dimensions des idéaux \mathfrak{P}_j , $j = 1, \dots, K$, c'est-à-dire le maximum des dimensions de Krull des anneaux quotient $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{P}_j$, $j = 1, \dots, K$. On dit que V est *de dimension pure* si tous les anneaux $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{P}_j$, $j = 1, \dots, K$, associés aux composantes irréductibles $V_1 = V(\mathfrak{P}_1), \dots, V_K = V(\mathfrak{P}_K)$ de V ont même dimension de Krull.

Exemple 1.9 (dimension des hypersurfaces). La dimension de Krull d'un anneau de la forme $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{P}$, où $\mathfrak{P} = (p)$ avec p irréductible dans $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, est égale à $n - 1$; ce nombre est la longueur de la plus longue chaîne croissante (pour l'inclusion) d'idéaux premiers distincts contenant tous l'idéal principal (p) . La dimension d'une hypersurface algébrique de \mathbb{K}^n est donc égale à $n - 1$. Il s'agit d'une dimension pure car toutes les composantes irréductibles de l'hypersurface algébrique V sont elles-mêmes des hypersurfaces, donc sont toutes de dimension $n - 1$.

La généralisation naturelle des hypersurfaces est celle d'*intersection complète*; cette notion géométrique consiste en la traduction exacte dans le contexte de l'anneau $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ de la notion de quasi-régularité (définition 1.4) :

DÉFINITION 1.7 (intersection complète algébrique dans \mathbb{K}^n , \mathbb{K} algébriquement clos). Un sous-ensemble algébrique V de \mathbb{K}^n (\mathbb{K} est toujours ici un corps commutatif algébriquement clos) est dit *intersection complète algébrique dans \mathbb{K}^n* si et seulement si :

- V est de dimension pure $n - M$, avec $M \in \{1, \dots, n\}$;
- il existe une suite p_1, \dots, p_M d'éléments de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ telle que

$$V = \{x \in \mathbb{K}^n ; p_1(x) = \dots = p_M(x) = 0\}.$$

Autrement dit, les intersections complètes algébriques de \mathbb{K}^n sont les sous-ensembles algébriques de dimension pure de \mathbb{K}^n dont la codimension $n - \dim(V)$ est exactement égale au nombre d'équations algébriques définissant V .

Exemple 1.10. Les polynômes $X_1X_3, X_2X_3, X_3 + 1$, qui ne définissent pas une suite régulière dans $\mathbb{K}[X_1, X_2, X_3]$, sont tels que le lieu de leurs zéro commun soit le point $(0, 0, -1)$, donc une variété algébrique de dimension 0. Comme nous avons ici trois équations, les trois polynômes correspondant $X_1X_3, X_2X_3, X_3 + 1$, définissent bien une intersection complète.

Le lien entre la notion d'intersection complète et celle de quasi-régularité est assuré par la proposition suivante :

PROPOSITION 1.2 (intersection complète et quasi-régularité). *Si (p_1, \dots, p_M) est une suite quasi-régulière dans $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ telle que l'idéal (p_1, \dots, p_M) soit distinct de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, on a $M \in \{1, \dots, n\}$ et l'ensemble*

$$\{x \in \mathbb{K}^n ; p_1(x) = \dots = p_M(x) = 0\}$$

est une intersection complète algébrique. Réciproquement, si

$$V = \{x \in \mathbb{K}^n ; p_1(x) = \dots = p_M(x) = 0\}$$

est une intersection complète algébrique dans \mathbb{K}^n , la suite (p_1, \dots, p_M) est quasi-régulière dans $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.

Avec cette définition, que pour l'instant on admettra, on voit que le recours à la géométrie permet de traduire de manière nettement moins lourde le fait qu'une suite de polynômes dans $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ définisse une suite quasi-régulière. Il convient de voir les intersections complètes algébriques comme la généralisation naturelle des hypersurfaces algébriques, la dimension prenant cette fois ses valeurs entre 0 et $n - 2$. Une hypersurface algébrique est bien sûr une intersection complète de dimension $n - 1$.

Remarque 1.5 (dimension algébrique et dimension géométrique, le cas de \mathbb{C}). Si p est un polynôme irréductible de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et $V = p^{-1}(0)$, l'ensemble algébrique

$$W = \left\{ z \in \mathbb{C}^n ; p(z) = \frac{\partial p}{\partial z_1}(z) = \dots = \frac{\partial p}{\partial z_n}(z) = 0 \right\} \subset V$$

est de dimension strictement inférieure à $n - 1$; le sous-ensemble $V \setminus W$ de V est un sous-ensemble ouvert de V que l'on peut considérer comme une variété analytique complexe de dimension complexe $n - 1$ ¹, que l'on note V^{reg} (tandis que W est noté V^{sing}). L'ensemble algébrique $W = V^{\text{sing}}$ étant de dimension strictement inférieure à $n - 1$, l'ouvert V^{reg} de V est dense dans V ; on retrouve bien la compatibilité entre le fait que la dimension algébrique de V vaille $n - 1$ et le fait que la \mathbb{C} -dimension (au sens de la géométrie différentielle) de la variété analytique complexe V^{reg} vaille aussi $n - 1$ ($2(n - 1)$ pour ce qui est de la variété différentielle réelle sous-jacente). De manière similaire, si \mathfrak{P} est un idéal premier de dimension $k \in \{1, \dots, n - 2\}$, engendré par p_1, \dots, p_M , tous les mineurs (ℓ, ℓ) avec $\ell > n - k$ sont identiquement nuls sur $V(\mathfrak{P})$ et le sous-ensemble algébrique

$$[V(\mathfrak{P})]^{\text{sing}} = \left\{ x \in \mathbb{K}^n ; p_1(x) = \dots = p_M(x) = \text{mineurs de rang } n - k \text{ de } \left[\frac{\partial p_{\ell_1}}{\partial z_{\ell_2}} \right]_{\ell_1, \ell_2} (x) = 0 \right\}$$

(inclus dans $V(\mathfrak{P})$) est donc de dimension strictement inférieure à k ; l'ensemble

$$[V(\mathfrak{P})]^{\text{reg}} = V(\mathfrak{P}) \setminus [V(\mathfrak{P})]^{\text{sing}}$$

(qui est dense dans $V(\mathfrak{P})$) porte une structure de variété analytique complexe de dimension complexe k (la variété différentielle réelle sous-jacente étant de dimension réelle $2k$). Si $V = V(\mathfrak{P}_1) \cup \dots \cup V(\mathfrak{P}_K)$ est la décomposition en composantes

1. Ce qui signifie que la variété différentielle réelle sous-jacente est une variété différentielle (au sens réel) de dimension $2(n - 1)$; attention en effet : une équation (complexe) en les variables complexes z_1, \dots, z_n correspond à deux équations réelles en les $2n$ variables réelles $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ ($z_j = x_j + iy_j$ pour $j = 1, \dots, n$). Toutefois, lorsque l'on travaille en géométrie complexe, on a tout intérêt à exploiter plutôt (au lieu des $2n$ coordonnées réelles indépendantes $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$) les $2n$ variables complexes $z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$, quand bien même elles ne sont plus des paramètres indépendants (\bar{z}_j est le conjugué de z_j en effet !). Les variables z_1, \dots, z_n sont les « vraies » variables (ou encore aussi *coordonnées locales, système régulier de paramètres*, etc.) ; les « variables » $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ jouent le rôle neutre en quelque sorte de « fantômes » car elles sont traitées comme des constantes par les champs de vecteurs algébriques (ou encore « holomorphes ») $\partial/\partial z_j$, $j = 1, \dots, n$, dans la mesure où $\partial \bar{z}_k / \partial z_j \equiv 0$; sans ces fantômes cependant, on ne saurait récupérer la positivité souvent essentielle : $\|z\|^2 = z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_n \bar{z}_n$ par exemple. Pour une familiarisation avec l'analyse complexe en dimension 1, on pourra se reporter à [Y1] ; pour ce qui concerne la géométrie différentielle en n variables complexes, voir par exemple le cours [Y2].

irréductibles d'un sous-ensemble algébrique de dimension algébrique k , l'ensemble

$$V^{\text{sing}} = \left(\bigcup_{j=1}^K [V(\mathfrak{P}_j)]^{\text{sing}} \right) \cup \bigcup_{\ell_1 \neq \ell_2} (V(\mathfrak{P}_{\ell_1}) \cap V(\mathfrak{P}_{\ell_2}))$$

est un sous-ensemble algébrique de dimension strictement inférieure à k ; l'ouvert $V^{\text{reg}} = V \setminus V^{\text{sing}}$ est un ouvert dense de V portant une structure de variété analytique complexe de dimension (complexe) k . Les notions de dimension algébrique et de dimension géométrique se rejoignent donc pour un sous-ensemble algébrique V de dimension pure k de \mathbb{C}^n car

$$\dim_{\text{alg}} V = \dim_{\text{geom}} V^{\text{reg}}.$$

Il y a cohérence entre ces deux notions de dimension, l'une algébrique, l'autre géométrique.

Tout ce que nous avons dit jusque là dans cette section se transpose au cadre de l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ ou $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, x}$, où \mathcal{X} est une variété analytique complexe de dimension n . On remplace les polynômes par les germes de fonctions holomorphes, la notion de sous-ensemble algébrique par celle de germe de sous-ensemble analytique. La décomposition en un nombre fini de germes de sous-ensembles analytiques irréductibles, la notion de dimension, celle de germe d'hypersurface, de germe d'intersection complète, la cohérence entre point de vue algébrique et point de vue analytique, restent valables ici.

Outre la dimension, on introduit un autre indicateur de nature géométrique pour les sous-ensembles algébriques de \mathbb{K}^n , la notion de *degré*.

DÉFINITION 1.8 (*degré d'un sous-ensemble algébrique de dimension pure k*). Soit V un sous-ensemble algébrique de \mathbb{K}^n (\mathbb{K} corps algébriquement clos) de dimension pure $k \in \{1, \dots, n\}$. Le *degré* de V est le cardinal du sous-ensemble algébrique de dimension 0 (donc fini) défini comme l'intersection

$$V \cap \bigcap_{j=1}^k H_{j,u}, \quad H_{j,u} = \{x \in \mathbb{K}^n; u_{j,0} + \sum_{\ell=1}^n u_{j,\ell} x_\ell\}, \quad j = 1, \dots, k,$$

où les coefficients $u_{j,\ell}$, $j = 1, \dots, k$, $\ell = 0, \dots, n$, sont des éléments de \mathbb{K} choisis de manière générique. Ce cardinal ne dépend pas du choix des $H_{j,u}$ (pourvu que ce choix soit générique), ce qui justifie la définition. Si $\dim V = 0$, on pose $\deg V = \text{card}(V)$.

Remarque 1.6. On note que si $V = \mathbb{K}^n$ ($\dim V = n$), alors $\deg V = 1$.

Exemple 1.11. Soit V le sous-ensemble algébrique irréductible de dimension 1 de \mathbb{K}^2 défini par $V = \{x \in \mathbb{K}^2; x_1^2 - x_2^3 = 0\}$. Si (x_1, x_2) vérifie

$$x_1^2 - x_2^3 = u + vx_1 + wx_2 = 0,$$

on a

$$\left(\frac{u + wx_2}{v} \right)^2 - x_2^3 = 0, \quad x_1 = -\frac{u + wx_2}{v}.$$

On obtient lorsque les coefficients u, v, w sont génériques trois points d'intersection entre V et $H_{u,v,w} = \{x \in \mathbb{K}^2; u + vx_1 + wx_2 = 0\}$. On a bien $\deg V = 3$. Si V est une hypersurface, le degré de V est toujours égal au degré de l'unique polynôme réduit

p_{red} tel que $V = p_{\text{red}}^{-1}(0)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $n = 2$, les hypersurfaces de degré 1 sont les droites complexes, les hypersurfaces de degré 2 sont les coniques, celles de degré trois sont les cubiques ; suivent les quartiques, les quintiques, les sextiques, etc.

On verra ultérieurement comment définir aussi le degré (local), dit aussi *nombre de Lelong* ou *multiplicité* d'un germe de sous-ensemble analytique (de \mathbb{C}^n en l'origine) de dimension pure égale à k . Lorsque $k = n - 1$ et que le germe est défini par un germe de fonction holomorphe irréductible, ce degré local est égal au degré de la composante de plus bas degré dans l'écriture

$$f(z_1, \dots, z_n) = p_\nu(z_1, \dots, z_n) + \sum_{k=\nu+1}^{\infty} p_k(z_1, \dots, z_n) \quad \deg p_k = k,$$

du développement de Taylor de f à l'origine. Par exemple, le degré local du germe du *cusp* $\{z_1^2 - z_2^3 = 0\}$ de \mathbb{C}^2 en 0 vaut 2.

1.4. Un théorème d'Oskar Perron

On se donne un corps \mathbb{K} , de clôture algébrique $\overline{\mathbb{K}}$. Dans l'espace affine

$$A_N(\overline{\mathbb{K}}) = \overline{\mathbb{K}}^N \quad (N \in \mathbb{N}^*),$$

on considère un sous-ensemble algébrique V de dimension pure n défini sur \mathbb{K} , c'est-à-dire de la forme

$$V = \{x \in \overline{\mathbb{K}}^N ; \phi_1(x) = \dots = \phi_M(x) = 0\} \quad (\text{où } \phi_j \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_N], j = 1, \dots, M).$$

Lorsque $N = n$, on prend $V = \overline{\mathbb{K}}^N$.

On se donne parallèlement une famille $\{p_1, \dots, p_{n+1}\}$ de $n+1$ éléments de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, tels que l'application polynomiale $p : V \rightarrow \overline{\mathbb{K}}^{n+1}$ soit génériquement finie au dessus de son image, ce qui signifie que, pour tout y générique dans l'image, la fibre $p^{-1}(\{y\})$ est soit vide, soit de dimension 0, ce qui équivaut à dire qu'il s'agit d'un sous-ensemble algébrique de dimension inférieure ou égale à 0 de $\overline{\mathbb{K}}^N$.

Comme V est de dimension $n < n + 1$, il existe nécessairement un polynôme Φ à coefficients en $n + 1$ variables à coefficients dans \mathbb{K} ($\Phi \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_{n+1}]$) tel que

$$\Phi(p_1, \dots, p_{n+1}) \equiv 0 \quad \text{sur } V.$$

On sait attacher au sous-ensemble algébrique V un degré (voir la définition 1.8). Ce que précise le résultat que nous allons énoncer (sous les hypothèses faites ici, à savoir que p est génériquement finie au dessus de son image) est une quantification de la complexité de Φ , ici estimée en termes précisément de degré puisque l'on adopte un point de vue exclusivement géométrique.

On a alors le résultat suivant, dû à Oskar Perron en 1927 (Satz 57 dans [Perr], p.129) dans le cas particulier où $N = n$ et $V = \overline{\mathbb{K}}^n$; le résultat énoncé ici est dû à A. Ploski et Z. Jelonek [Jel].

THEORÈME 1.4 (théorème de Perron revisité [Jel]). *Sous les hypothèses faites ici, il existe au moins une relation de dépendance algébrique*

$$\Phi_{\text{opt}}(p_1(x), \dots, p_{n+1}(x)) = 0 \quad \forall x \in V$$

avec $\Phi_{\text{opt}} \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_{n+1}]$ et

$$\deg_T(\Phi(T_1^{d_1}, \dots, T_{n+1}^{d_{n+1}})) \leq \deg V \prod_{j=1}^{n+1} d_j \quad (d_j = \deg(p_j), j = 1, \dots, n+1).$$

Remarque 1.7. Le résultat originel de Perron concerne le cas $N = n$, $V = \mathbb{K}^n$. L'argument que Perron exploitait était un simple argument d'algèbre linéaire. On introduit le \mathbb{K} -espace vectoriel des polynômes Φ en $n+1$ variables T_1, \dots, T_{n+1} tels précisément que

$$\deg(\Phi(T_1^{d_1}, \dots, T_n^{d_n})) \leq d_1 \cdots d_{n+1}.$$

Il s'agit d'un \mathbb{K} -espace de dimension finie¹; notons cette dimension $N(n, d)$. Chercher Φ dans ce \mathbb{K} -espace vectoriel tel que

$$(1.14) \quad \Phi(p_1, \dots, p_{n+1}) = 0$$

revient à résoudre un système linéaire homogène (c'est-à-dire sans second membre). Pour connaître le nombre d'équations de ce système, il suffit d'évaluer le degré *a priori* du polynôme $\Phi(p_1, \dots, p_{n+1})$ figurant au membre de droite (il s'agit cette fois d'un polynôme en n variables X_1, \dots, X_n et non plus cette fois en $n+1$ variables T_1, \dots, T_{n+1}). Ce degré total est précisément $d_1 \cdots d_{n+1}$ et le nombre d'équations du système linéaire homogène équivalent à (1.14) est donc égal à $M(n, d) = \binom{n+d_1 \cdots d_{n+1}}{n}$. Il suffit de s'assurer que $N(n, d) > M(n, d)$ (ce qui est le cas) pour pouvoir affirmer que le système linéaire homogène traduisant l'identité polynomiale (1.14) admet au moins une solution non triviale. C'était là l'argument de Perron, directement en prise avec l'algèbre linéaire. Cet argument n'est toutefois plus exploitable dans notre contexte géométrique plus général (V à la place de \mathbb{K}^n) et nous allons traduire cette preuve reposant sur l'algèbre linéaire sur une preuve cette fois géométrique reposant sur un suivi des degrés des applications polynomiales en jeu.

DÉMONSTRATION. Comme V est de dimension n et que \mathbb{K}^{n+1} est de dimension $n+1 > n$, l'image $\text{Im}(p|_V)$ ne saurait être \mathbb{K}^{n+1} tout entier (pour des raisons de dimension). L'image $p(V)$ est donc un sous-ensemble algébrique propre de \mathbb{K}^{n+1} nécessairement inclus dans une hypersurface algébrique H de \mathbb{K}^{n+1} que l'on peut supposer définie comme le lieu des zéros d'un polynôme réduit $\Phi \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_{n+1}]$ (dont on ne sait pour l'instant en ce moment rien du degré). On a donc

$$\Phi(p_1, \dots, p_{M+1}) \equiv 0 \text{ sur } V.$$

On introduit le sous-ensemble algébrique \tilde{V} de $\mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^{n+1} = \mathbb{K}^{N+n+1}$ défini ainsi :

$$\tilde{V} := \{(x, w) \in \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^{n+1} = \mathbb{K}^{N+n+1}; w^{d_j} + w_j = p_j(x) \quad \forall j = 1, \dots, n+1\}$$

(si $d_j = 1$, on prend juste l'équation $w_j = p_j(x)$ au lieu de $w^{d_j} + w_j = p_j(x)$). Ce sous-ensemble algébrique est clairement de dimension pure n : la submersion

$$\pi_0 : (x, w) \in \tilde{V} \mapsto x \in V$$

1. La dimension du \mathbb{K} -espace vectoriel des polynômes de degré total D en ν variables est, on le rappelle, $\binom{\nu+D}{\nu}$, tandis que celle du \mathbb{K} -sous-espace vectoriel de degré exactement D est $\binom{\nu+D-1}{\nu-1}$.

est en effet un revêtement à $d_1 \cdots d_{n+1}$ feuillet. C'est grâce à une autre approche de la notion de degré que nous allons prouver que $\deg \tilde{V} = \deg V \times d_1 \cdots \times d_{n+1}$. Précisons cette approche ici pour être complet :

Remarque 1.8 (une autre approche de la notion de degré d'un sous-ensemble algébrique de dimension pure ν dans \mathbb{K}^μ , utile ici). Si p est un élément de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_\mu]$ réduit de degré total d , pour toute transformation linéaire générique $T : \mathbb{K}^\mu \rightarrow \mathbb{K}^\mu$, on peut exprimer (voir le début de la preuve du théorème 1.1) $p(T(X))$ sous la forme *distinguée*

$$\begin{aligned} p(T(X)) &= \\ &= a_0 X_1^d + \sum_{k=1}^d a_k(X_2, \dots, X_n) X_1^{d-k} \quad (a_0 \in \mathbb{K}^*, a_k \in \mathbb{K}[X_2, \dots, X_\mu], \deg a_k \leq k). \end{aligned}$$

Ceci signifie ici en fait que, dans les nouvelles coordonnées (x_1, \dots, x_μ) (après le changement de variables $x \mapsto T(x)$), l'application

$$(x_1, \dots, x_\mu) \in p^{-1}(0) \longmapsto x'' = (x_2, \dots, x_\mu) \in \mathbb{K}^{\mu-1}$$

devient une submersion à $d = \deg(\{p = 0\})$ feuillet. Ceci fournit une autre incarnation du degré de l'hypersurface algébrique $p^{-1}(0)$. Ceci se généralise au cas des sous-ensembles algébriques de dimension pure. En suivant l'algorithme de Greta Hermann, on montre que si $\mathcal{V} \subset \mathbb{K}^\mu$ est un sous-ensemble algébrique de dimension pure ν de \mathbb{K}^μ et si $\pi_u : x = (x', x'') \in \mathbb{K}^\mu \longrightarrow x'' \in \mathbb{K}^\nu$ est une projection linéaire générique, alors $\pi_u|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{K}^\nu$ est un revêtement fini¹ dont le nombre de feuillet est égal au degré de \mathcal{V} . Les points de \mathcal{V} où passent plus de deux feuillet distincts de ce revêtement (on parle de *ramification*) forment la variété singulière $\mathcal{V}^{\text{sing}}$ de \mathcal{V} ; l'image $\pi_u(\mathcal{V}^{\text{sing}}) \subset \mathbb{K}^\nu$ est un sous-ensemble algébrique propre de \mathbb{K}^ν , dit *lieu discriminant*; si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, au voisinage d'un point x de \mathcal{V} dont la projection $x'' \in \mathbb{C}^\nu$ n'appartient pas au lieu discriminant (ce qui équivaut à dire que $x \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}^{\text{sing}}$), \mathcal{V} possède (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) une structure de variété analytique complexe de dimension (complexe) ν . Si l'on revient au cadre général d'un corps commutatif algébriquement clos \mathbb{K} arbitraire, le degré de \mathcal{V} est alors simplement le nombre de feuillet de la submersion π_u . Cette présentation de l'ensemble algébrique de dimension pure ν s'appelle *préparation de Noether de l'ensemble algébrique* \mathcal{V} et fournit, lorsque \mathcal{V} est de dimension pure ν , le calcul du degré de \mathcal{V} (introduit différemment à la définition 1.8) : ce degré $\deg(\mathcal{V})$ est le nombre de feuillet de la submersion générique π_u . C'est en utilisant cette approche du degré (avec un dessin, contentez vous de vérifier heuristiquement que ces deux définitions, celle proposée à la définition 1.8 du degré et celle ci, coïncident) que l'on vérifie dans notre cas que

$$\deg \tilde{V} \leq \deg V \times d_1 \cdots d_{n+1}$$

(une fois que l'on a projeté ainsi convenablement V sur \mathbb{K}^n en utilisant une transformation linéaire en les variables x_1, \dots, x_N); on observe en effet qu'à un point de V correspondent $d_1 \cdots d_{n+1}$ préimages dans la projection de \tilde{V} sur le sous-espace

1. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cette application continue est topologiquement propre, au sens suivant : l'image réciproque d'un compact est un compact.

$\mathbb{K}_{x_1'', \dots, x_n''}^n$, une fois que l'on a relevé dans un premier temps $x'' \in \mathbb{K}_{x_1'', \dots, x_n''}^n$ en un élément $x = (x', x'')$ de \widetilde{V} .

On introduit également l'hypersurface de \mathbb{K}^{n+1} définie par

$$\widetilde{W} = \{w \in \mathbb{K}^{n+1}; \Phi(w_1^{d_1} + w_1, \dots, w_{n+1}^{d_{n+1}} + w_{n+1}) = 0\}.$$

Cette hypersurface est définie ainsi de manière réduite. En effet, dire que Φ est réduit signifie que le gradient $\vec{\nabla}\Phi = (\partial\Phi/\partial w_1, \dots, \partial\Phi/\partial w_{n+1})$ de $w \mapsto \Phi(w_1, \dots, w_{n+1})$ ne s'annule identiquement sur aucune des composantes irréductibles de $\Phi^{-1}(0)$, chacune de ces composantes étant définie comme le lieu des zéros d'un facteur premier de Φ dans $\mathbb{K}[T_1, \dots, T_{n+1}]$ (on pourra faire cela en exercice). Le gradient du polynôme composé

$$\Phi(T_1^{d_1} + T_1, \dots, T_{n+1}^{d_{n+1}} + T_{n+1})$$

(d'après la règle de Leibniz) a pour composantes

$$(d_j T_j^{d_j-1} + 1) \frac{\partial\Phi}{\partial T_j} (T_1^{d_1} + T_1, \dots, T_{n+1}^{d_{n+1}} + T_{n+1}), \quad j = 1, \dots, n+1.$$

Il ne saurait s'annuler identiquement sur aucune composante irréductible du polynôme $\Phi(T_1^{d_1} + T_1, T_{n+1}^{d_{n+1}} + T_{n+1})$, sauf si une telle éventuelle composante se trouvait incluse dans $\{w; d_j w_j^{d_j-1} + 1\}$ (mais qui est, elle, une hypersurface réduite¹) pour un certain $j \in \{1, \dots, n+1\}$. L'hypersurface \widetilde{W} est ainsi donnée sous forme réduite et son degré est par conséquent

$$(1.15) \quad \deg \widetilde{W} = \deg_T (\Phi(T_1^{d_1} + T_1, \dots, T_{n+1}^{d_{n+1}} + T_{n+1})) = \deg_T \Phi(T_1^{d_1}, \dots, T_{n+1}^{d_{n+1}}).$$

Considérons l'application

$$\pi : (x, w) \in \widetilde{V} \mapsto w \in \widetilde{W}.$$

D'après les hypothèses faites sur p , il s'agit d'une application génériquement finie entre deux variétés algébriques de même dimension. De plus, il est aisé d'observer que l'image est dense. Pour une telle application, le cardinal des fibres $\pi^{-1}(\{w\})$ reste génériquement constant, égal à un entier strictement positif, dit *degré* de l'application. De plus, on dispose naturellement de l'inégalité (compte tenu des définitions des degrés de \widetilde{V} et \widetilde{W})² :

$$\deg \widetilde{W} \times \deg(\pi) \leq \deg \widetilde{V}.$$

Comme $\deg(\pi) \geq 1$, on a bien

$$\deg(\widetilde{W}) \leq \deg V \times \prod_{j=1}^{n+1} d_j.$$

Compte-tenu de (1.15), le théorème de Perron est démontré. \square

1. C'est ici la raison pour laquelle nous avons introduit $T^{d_j} + T_j$ et non simplement T^{d_j} dans le changement de variables effectué sur le polynôme Φ .

2. Pour se convaincre de cette inégalité, il est important de relire l'énoncé du *théorème du degré* en géométrie différentielle classique (voir par exemple [HY], page 149).

Remarque 1.9 (le théorème géométrique de Bézout omniprésent derrière cette preuve). Au cours de cette preuve, nous avons utilisé sans le dire un résultat très important sur lequel nous reviendrons, le *théorème géométrique de Bézout* : si V_1 et V_2 sont deux sous-ensembles algébriques de dimension pure de \mathbb{K}^μ (\mathbb{K} étant toujours ici algébriquement clos) et si $V_1 \cap V_2$ est aussi de dimension pure avec

$$\mu - \dim(V_1 \cap V_2) = (\mu - \dim V_1) + (\mu - \dim V_2)$$

(la codimension de l'intersection est la somme des codimensions¹), alors

$$\deg(V_1 \cap V_2) = \deg(V_1) \times \deg(V_2).$$

Dans notre démonstration, le recours à ce théorème ne s'avèrait pas nécessaire car les choses pouvaient se faire « à la main » au vu de la description des sous-ensembles V_1 et V_2 en jeu, mais c'est tout de même ce théorème de Bézout que nous avons exploité. Le principe de la multiplication des degrés est le moteur de la théorie de l'intersection géométrique (lorsque toutefois celle-ci s'avère propre²).

1.5. L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$: confrontation de points de vue

L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ joue un rôle essentiel au carrefour de l'Algèbre Commutative (souvent polynomiale) et de la Géométrie Complexe. Nous présenterons ici plusieurs éclairages autour de diverses présentations de cet objet.

Classiquement $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est défini comme un quotient géométrique : celui de l'ouvert affine $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ quotienté par l'action du groupe \mathbb{C}^* :

$$\lambda \bullet (z_0, \dots, z_n) = (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n).$$

On note en abrégé

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) := \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}}{\mathbb{C}^*}.$$

Pareille construction peut être conduite lorsque \mathbb{C} est remplacé par un corps commutatif quelconque, et l'on a :

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := \frac{\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}}{\mathbb{K}^*}$$

de manière tout-à-fait similaire.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ hérite d'une structure de variété différentielle de dimension réelle n (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou d'une structure de variété analytique complexe de dimension complexe n (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), la variété différentielle sous-jacente étant dans ce second cas de dimension réelle $2n$. Dans les deux cas, il s'agit de variétés compactes. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est une variété compacte orientable (car une structure de variété analytique complexe est cohérente du point de vue de l'orientabilité des morphismes de changement de cartes du fait qu'une application holomorphe préserve les orientations. En revanche $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ n'est pas en général orientable : par exemple $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ s'interprète comme la surface obtenue en recollant bord-à-bord une sphère « décalottée » et un ruban de Möbius (voir par exemple [HY]). Alors que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (droite projective complexe) a pour variété réelle sous-jacente la sphère $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$,

-
1. On dit alors que l'intersection est *propre*.
 2. Si ce n'est pas le cas, il faut, on verra comment plus tard, savoir contourner cette difficulté.

orientable comme sous-variété différentielle de dimension 2 (surface) de \mathbb{R}^3 . Dans ce cours, on privilégiera $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Reprenons la description de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Les variables sur l'ouvert affine $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ sont notées en général (z_0, \dots, z_n) et la classe de cet élément modulo l'action du groupe \mathbb{C}^* est notée $[z_0 : z_1 : \dots : z_n]$. L'ouvert $z_0 \neq 0$ est classiquement identifié au \mathbb{C}^n « fini » *via* la correspondance

$$\pi_0 : [z_0 : z_1 : \dots : z_n] = \left[1 : \frac{z_1}{z_0} : \dots : \frac{z_n}{z_0} \right] \longrightarrow (\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \left(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0} \right)$$

(réalisant un homéomorphisme entre U_0 et \mathbb{C}^n). L'hyperplan $\{z_0 = 0\}$ est alors « l'hyperplan à l'infini » H_∞ . On a

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n \cup H_\infty = \mathbb{C}^n \cup \{z_0 = 0\}.$$

La variété analytique complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ se voit souvent comme le « monde à l'infini » dans $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$. On a ainsi

$$\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1} \cup \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

(l'union est ici disjointe) et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ devient l' *hyperplan à l'infini* de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$; dans cette vision (qui est celle de la perspective depuis la renaissance italienne), l'orbite du point (z_0, \dots, z_n) sous l'action du groupe \mathbb{C}^* « perce » l'hyperplan à l'infini (incarné par $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$) en un point qui se trouve être exactement le point $[z_0 : \dots : z_n]$.

La variété analytique complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ s'obtient en recollant $n + 1$ copies de \mathbb{C}^n , en correspondance avec les $n + 1$ ouverts $U_j = \{[z_0 : z_1 : \dots : z_n] ; z_j \neq 0\}$, $j = 0, \dots, n$. Chacun de ces ouverts est un ouvert de carte; par exemple, en respectant une structure cyclique¹, les $n + 1$ applications

$$(1.16) \quad \begin{aligned} \pi_j : [z_0 : \dots : z_n] &= \left[\frac{z_0}{z_j} : \dots : \frac{z_{j-1}}{z_j} : 1 : \frac{z_{j+1}}{z_j} : \dots : \frac{z_n}{z_j} \right] \\ &\longmapsto \left(\frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j}, \frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j} \right) \in \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

sont des homéomorphismes respectivement entre U_j et \mathbb{C}^n .

Exemple 1.12 (le plan projectif complexe et la réalisation torique de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$). Dans le cas $n = 2$, on dispose de trois ouverts de cartes (et cartes π_j) :

$$\begin{aligned} \pi_0 : [z_0 : z_1 : z_2] &\longmapsto \left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0} \right) \\ \pi_1 : [z_0 : z_1 : z_2] &\longmapsto \left(\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_0}{z_1} \right) \\ \pi_2 : [z_0 : z_1 : z_2] &\longmapsto \left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) \end{aligned}$$

Les applications de changement de cartes sont monomiales; en effet :

$$\begin{aligned} \pi_1 * \pi_0^{-1} : (\zeta_1, \zeta_2) &\longmapsto [1 : \zeta_1 : \zeta_2] \longmapsto (\zeta_2 \zeta_1^{-1}, \zeta_1^{-1}) \\ \pi_2 * \pi_0^{-1} : (\zeta_1, \zeta_2) &\longmapsto [1 : \zeta_1 : \zeta_2] \longmapsto (\zeta_2^{-1}, \zeta_1 \zeta_2^{-1}) \\ \pi_2 * \pi_1^{-1} : (\zeta_1, \zeta_2) &\longmapsto [\zeta_2 : 1 : \zeta_1] \longmapsto (\zeta_2 \zeta_1^{-1}, \zeta_1^{-1}) \end{aligned}$$

1. Ceci est commode ici, pour lire les correspondance avec la géométrie torique que nous ferons à l'occasion de l'exemple 1.12 traité plus loin; ce n'est en rien indispensable.

Considérons maintenant le partitionnement du plan \mathbb{R}^2 en l'union des trois cônes rationnels :

$$\sigma_0 := \mathbb{R}^+ \vec{e}_1 + \mathbb{R}^+ \vec{e}_2, \quad \sigma_1 := \mathbb{R}^+ \vec{e}_1 - \mathbb{R}^+ (\vec{e}_1 + \vec{e}_2), \quad \sigma_2 := \mathbb{R}^+ \vec{e}_2 - \mathbb{R}^+ (\vec{e}_1 + \vec{e}_2).$$

À chacun de ces cônes, associons la matrice dont les entrées sont, en colonne, les vecteurs primitifs (c'est-à-dire de coordonnées premières entre elles) dirigeant les arêtes de ces trois cônes ; ces trois matrices sont respectivement (en veillant à garder les bases directes) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

On remarque que les transformations monoidales $\pi_1 \circ \pi_0^{-1}$ et $\pi_2 \circ \pi_0^{-1}$ correspondent respectivement à σ_1 et σ_2 . On peut ainsi mettre en correspondance U_0 et le cône σ_0 , U_1 et le cône σ_1 , U_2 et le cône σ_2 . Cette partition en cônes correspond de fait à partitionnement de l'espace affine \mathbb{R}^2 en les classes d'équivalence suivant la relation d'équivalence (Δ_2 étant le simplexe fondamental de \mathbb{R}^2 , le triangle de sommets l'origine et les extrémités des vecteurs de la base canonique) :

$$x\mathcal{R}_{\Delta_2}y \iff \{u \in \mathbb{R}^2; \langle u, x \rangle = \min_{v \in \Delta_2} \langle v, x \rangle\} = \{u \in \mathbb{R}^2; \langle u, x \rangle = \min_{v \in \Delta_2} \langle v, x \rangle\}.$$

Les classes d'équivalence pour cette relation partitionnent \mathbb{R}^2 en cônes : trois cônes ouverts de dimension 2 (les intérieurs de $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$), trois cônes ouverts de dimension 1 (les demi-droites $\mathbb{R}^{+*} \vec{e}_1, \mathbb{R}^{+*} \vec{e}_2, -\mathbb{R}^{+*} (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$), un cône enfin fermé de dimension 0, le cône $\{0\}$. La collection des adhérences de ces cônes est dite *éventail* de \mathbb{R}^2 : toute face d'un cône de l'éventail doit être un cône de l'éventail et l'intersection de deux cônes de l'éventail doit être une face commune de ces deux cônes (pensez ici à ce qu'est dans la vie courante un éventail !). La même structure combinatoire vaut pour $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (avec le simplexe Δ_n de \mathbb{R}^n à la place de Δ_2). D'autres variétés analytiques complexes du même type que le plan projectif complexe $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ou $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ peuvent être construites sur ce principe : il suffit de se donner un polytope convexe Δ de \mathbb{R}^n dont chaque sommet est intersection d'exactly n arêtes et dont les cônes duaux des sommets ont leurs arêtes engendrées par des vecteurs primitifs formant une base de \mathbb{Z}^n . La variété analytique complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est construite sur ce principe, avec $\Delta = [-1, 1]^2$; il y a quatre cônes de dimension 2, engendrés respectivement par les paires de vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2), (\vec{e}_2, -\vec{e}_1), (-\vec{e}_1, -\vec{e}_2), (-\vec{e}_2, \vec{e}_1)$, donc cette fois quatre copies de \mathbb{C}^2 à recoller *via* des applications monoidales inversibles¹. Les variétés analytiques complexes compactes construites sur ce principe sont dite *variétés toriques complètes* associés à un polytope Δ à sommets entiers de \mathbb{R}^n *absolument simple*.

Les espaces $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ou $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sont des espaces métriques ; voici comment en effet on définit la distance de deux points dans ces espaces projectifs : si $[x_0 : \dots : x_n]$ et $[y_0 : \dots : y_n]$ sont des systèmes de coordonnées homogènes repérant ces deux points (à multiplication par un élément de \mathbb{R}^* ou de \mathbb{C}^* près), on calcul le produit

$$(1.17) \quad \left(\sum_{j=0}^n x_j e_j \right) \wedge \left(\sum_{j=0}^n y_j e_j \right)$$

1. Il y a d'ailleurs dans ce cas quatre coordonnées homogènes $[z_0 : z_1], [w_0 : w_1]$ (deux pour chaque $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ facteur du produit).

dans l'algèbre extérieure

$$\bigoplus \bigwedge^k \mathbb{K}^{n+1} = \bigoplus \bigwedge^k (\mathbb{K}\vec{e}_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}\vec{e}_n) \quad (\text{ici } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$$

où $(\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n)$ désigne la base canonique de \mathbb{K}^{n+1} . On rappelle que les règles du calcul extérieur sont $\vec{e}_j \wedge \vec{e}_j = \vec{0}$ et $\vec{e}_{j_1} \wedge \vec{e}_{j_2} = -\vec{e}_{j_2} \wedge \vec{e}_{j_1}$ lorsque $0 \leq j_1 < j_2 \leq n$. Le produit (1.17) de deux éléments de \mathbb{K}^{n+1} est un élément de $\bigwedge^2 \mathbb{K}^{n+1}$ qui est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $\binom{n+1}{2} = n(n+1)/2$ (le \mathbb{K} -espace vectoriel $\bigwedge^k \mathbb{K}^{n+1}$ est, on le rappelle, de dimension $\binom{n+1}{k}$ pour $1 \leq k \leq n+1$). Si $\|\cdot\|$ désigne (par exemple) la norme euclidienne (sur \mathbb{K}^{n+1} et sur $\bigwedge^2 \mathbb{K}^{n+1} \simeq \mathbb{K}^{\binom{n+1}{2}}$), la distance d_{proj} sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est définie par

(1.18)

$$d_{\text{proj}}([x_0 : \cdots : x_n], [y_0 : \cdots : y_n]) := \frac{\|\vec{x} \wedge \vec{y}\|}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}, \quad \vec{x} = (x_0, \dots, x_n), \quad \vec{y} = (y_0, \dots, y_n).$$

Cette distance permet d'équiper $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) d'une topologie métrique. Plus généralement, étant donné un corps commutatif, on peut toujours choisir une valeur absolue sur \mathbb{K} : par exemple, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on prendra la valeur absolue usuelle, si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$ ou \mathbb{C}_p la valeur absolue induite par la valeur absolue $|\cdot|_p$ sur \mathbb{Q} (passée au complété \mathbb{Q}_p , puis à sa clôture intégrale \mathbb{C}_p), si \mathbb{K} est un corps fini on prendra $|x| = 1$ si $x \neq 0$ et $|0| = 0$ (c'est alors le seul choix). Une fois choisie une valeur absolue sur le corps \mathbb{K} , la construction conduite ici dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ conduit à la construction d'une distance, donc d'une topologie métrisable, tant sur l'espace affine $A_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$ que sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

La construction de l'atlas (U_j, π_j) réalisé pour équiper $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ d'une structure de variété analytique complexe de dimension complexe (on aurait tout aussi bien pu équiper de la même manière $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ d'une structure de variété différentielle de dimension réelle n) peut être reprise mot pour mot lorsque \mathbb{C} est remplacé par un corps commutatif. Les applications π_j définies exactement comme dans (1.16), mais avec \mathbb{K} à la place de \mathbb{C} , sont alors des homéomorphismes lorsque $\mathbb{K}^n = A_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sont rapportés à ces topologies métrisables. Les applications de changement de cartes sont des applications rationnelles (même en fait ici monomiales).

Nous supposons maintenant \mathbb{K} algébriquement clos pour simplifier les choses (nous serions sinon amenés à travailler dans le sur-corps $\overline{\mathbb{K}}$, la clôture intégrale de \mathbb{K}) et profiter de la correspondance bijective entre sous-ensembles algébriques et idéaux radicaux de l'anneau noëthérien $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Il existe une autre topologie sur $A_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$, celle pour laquelle les sous-ensembles fermés sont les sous-ensembles algébriques (voir la définition 1.5). Cette topologie est dite *topologie de Zariski*¹ et nous l'exploiterons aussi.

Dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ (\mathbb{K} supposé toujours ici pour simplifier algébriquement clos), on définit également la notion de *sous-ensemble algébrique* :

1. Si \mathbb{K} n'est pas algébriquement clos, la topologie de Zariski se définit de manière identique : notons toutefois que par exemple $\{x \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ est le sous-ensemble algébrique vide, tandis que $\{z \in \mathbb{C}^2; z_1^2 + z_2^2 + 1 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ est une conique affine, hypersurface algébrique de dimension 1 et de degré 2.

DÉFINITION 1.9 (sous-ensembles algébriques de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$). On appelle *sous-ensemble algébrique de l'espace projectif* $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ (\mathbb{K} corps commutatif ici supposé algébriquement clos) tout sous-ensemble de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ défini comme le lieu des zéros communs d'une collection $\{P_1, \dots, P_M\}$ de polynômes homogènes en $n + 1$ variables X_0, \dots, X_n . La topologie sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ pour laquelle les fermés sont les sous-ensembles algébriques est dite *topologie de Zariski* sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ cette fois.

Les applications $\pi_j : U_j \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$ sont encore des homéomorphismes pour la topologie de Zariski (U_j est un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ car c'est le complémentaire de l'hyperplan projectif $\{x_j = 0\}$, en coordonnées homogènes). Chaque application de changement de cartes $\pi_{j_2} \circ \pi_{j_1}^{-1}$ est une application birationnelle entre les deux ouverts affines $\pi_{j_1}(U_{j_1})$ et $\pi_{j_2}(U_{j_2})$ (c'est même mieux qu'une application birationnelle puisque l'on a vu qu'il s'agissait d'une transformation monomiale, c'est-à-dire d'une transformation birationnelle dont les entrées sont des applications monomiales). L'espace $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, équipé de cet atlas, est une *variété algébrique (lisse ou non-singulière) de dimension n* obtenue en recollant des ouverts affines (ici en fait $n + 1$ copies de $A_n(\mathbb{K})$) suivant des applications de transition (on dit aussi de « changement de carte » dans le langage de la géométrie différentielle) qui sont des applications rationnelles, c'est-à-dire des applications dont les entrées appartiennent au corps $\mathbb{K}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$. La donnée de la topologie de Zariski sur chaque carte affine induit une topologie sur une telle variété algébrique non singulière. Dans le cas particulier de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, cette topologie est la topologie de Zariski introduite à la définition 1.9. On peut aussi considérer sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ la topologie métrisable définie par la distance d_{proj} associée par (1.18) au choix d'une norme arbitraire sur le corps \mathbb{K} (induisant une norme sur $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^{n+1}, \mathbb{K}^{\binom{n+1}{2}}$).

Soit V un sous-ensemble algébrique de $A_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$ (on suppose toujours \mathbb{K} algébriquement clos), défini comme le lieu des zéros communs d'un nombre fini de polynômes p_1, \dots, p_M :

$$V = \{x \in \mathbb{K}^n ; p_1(x) = \dots = p_M(x) = 0\}.$$

On peut considérer dans $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ les *homogénéisés* de p_1, \dots, p_M , c'est-à-dire, on l'a vu, les polynômes

$${}^h p_j(X_0, \dots, X_n) = P_j(X_0, \dots, X_n) = X_0^{\deg P_j} P_j\left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right), \quad j = 1, \dots, M.$$

Ces polynômes P_1, \dots, P_m engendrent un idéal (P_1, \dots, P_M) dans $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$, dit *homogénéisé de l'idéal I* ; un tel idéal $\mathbb{I} := (P_1, \dots, P_M)$ de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ est en effet dit *homogène* au sens où il est engendré par un nombre fini de générateurs qui ont la particularité d'être tous homogènes (mais sans être toutefois de même degré). Ces homogénéisés définissent un sous-ensemble algébrique \mathbb{V} de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

On peut naturellement se poser la question suivante : que peut-on dire de l'adhérence \overline{V} de V dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ (pour la topologie de Zariski ou pour la topologie définie par la distance d_{proj} une fois une norme choisie sur \mathbb{K}) par rapport au sous-ensemble algébrique \mathbb{V} ? La réponse est malheureusement « rien en général », hormis juste le fait que \overline{V} est tout de même un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire

$$\overline{V} = \{[x_0 : \dots : x_n] ; Q_1(x) = \dots = Q_{M'}(x) = 0\}$$

mais en général \neq $\mathbb{V} := \{[x_0 : \dots : x_n] ; P_1(x) = \dots = P_M(x) = 0\},$

où $Q_1, \dots, Q_{M'}$ sont des polynômes homogènes en $n + 1$ variables, mais qui n'ont à priori plus rien à voir avec les polynômes de la liste $\{P_1, \dots, P_M\} = \{^h p_1, \dots, ^h p_j\}$ des homogénéisés des polynômes p_j définissant V dans $A_n(\mathbb{K})$.

Remarque 1.10 (le cas particulier des hypersurfaces). Il est toutefois un cas particulier où l'on a $\bar{V} = \mathbb{V}$. C'est celui où V est une hypersurface algébrique, définie comme le lieu des zéros dans \mathbb{K}^n d'un polynôme réduit p_{red} . Dans ce cas, le sous-ensemble $\{[x_0 : \dots : x_n]; ^h p_{\text{red}} = 0\}$ de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est l'hypersurface de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ obtenue en prenant l'adhérence (pour la topologie de Zariski ou pour la topologie définie par la distance d_{proj} de l'hypersurface algébrique affine $\{x \in \mathbb{K}^n; p_{\text{red}}(x)\}$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Par exemple, si $V = \{x \in \mathbb{K}^2; x_1^2 - x_2^3 = 0\}$ est le *cusp* singulier en $(0, 0)$, le sous-ensemble $\mathbb{V} = \{[x_0 : \dots : x_n]; x_0 x_1^2 - x_2^3 = 0\}$ est l'union de ce *cusp* et du « point à l'infini » $[0 : 1 : 0]$. Le tracé du *cusp* dans le champ réel (rebroussement vertical de long de la demi-droite $\mathbb{R}^+ \vec{e}_2$) montre l'existence de deux branches paraboliques dans les directions $x_1 \rightarrow +\infty$ et $x_1 \rightarrow -\infty$, ce qui conforte le fait que l'unique point à l'infini soit $[0 : 1 : 0]$.

De fait, le radical $\sqrt{\mathbb{I}}$ se présente (on le verra plus loin, mais on a déjà admis ce résultat dans la section 1.3 dans le cadre de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ au lieu de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$) comme une intersection finie d'idéaux premiers $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_K$ de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ qui ont de plus ici la particularité d'être tous homogènes, c'est-à-dire que l'on peut engendrer chacun d'eux avec un système de polynômes homogènes. Comme dans la section 1.3, on peut supposer que la représentation

$$(1.19) \quad \sqrt{\mathbb{I}} = \mathfrak{P}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{P}_K$$

est minimale et que par conséquent que

$$(1.20) \quad \mathbb{V} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{P}_j \neq (X_0, \dots, X_n)}}^K V(\mathfrak{P}_j)$$

est la décomposition de $\mathbb{V} = V(\mathbb{I})$ en sous-ensembles algébriques homogènes irréductibles (la proposition 1.1 reste valable dans le contexte des sous-ensembles algébriques de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, il convient simplement d'y remplacer la notion d'idéal par celle d'*idéal homogène*). À la lecture de la décomposition (1.19), on classe les idéaux premiers \mathfrak{P}_j , $j = 1, \dots, K$ en deux classes :

- ceux $(\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_\kappa)$ tels que le sous-ensemble algébrique $V(\mathfrak{P}_j)$, $j = 1, \dots, \kappa$, n'est pas entièrement inclus dans l'hyperplan à l'infini

$$\{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}); x_0 = 0\};$$

- ceux $(\mathfrak{P}_{\kappa+1}, \dots, \mathfrak{P}_K)$ tels que

$$V(\mathfrak{P}_j) \subset \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}); x_0 = 0\}, \quad j = \kappa + 1, \dots, K.$$

On observe alors que

$$\bar{\mathbb{V}} = \bigcup_{j=1}^{\kappa} V(\mathfrak{P}_j)$$

est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ en général strictement inclus dans

$$V({}^h p_1, \dots, {}^h p_M) = V(P_1, \dots, P_M),$$

où les P_j sont les homogénéisés des polynômes p_1, \dots, p_M définissant V comme sous-ensemble algébrique de l'espace affine $A_n(\mathbb{K})$. Trouver des générateurs de l'idéal radical

$$\bigcap_{j=1}^{\kappa} \mathfrak{P}_j$$

dont le sous-ensemble algébrique \overline{V} est l'ensemble des zéros dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ n'est pas une chose facile, car cela passe par la recherche d'une représentation minimale en termes d'intersection finie d'idéaux homogènes premiers distincts de (X_0, \dots, X_n) .

Exemple 1.13 (un exemple troublant). Considérons dans $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ les trois polynômes

$$\begin{aligned} p_1(X) &= X_1 X_2 X_3 \\ p_2(X) &= (X_1 + 1)(X_2 + 1)(X_3 + 1) \\ p_3(X) &= (X_1 + 2)(X_2 + 2)(X_3 + 2). \end{aligned}$$

Ces trois polynômes définissent un lieu de zéros de dimension 0 (un ensemble fini de points) dans \mathbb{C}^3 . La suite (p_1, p_2, p_3) est donc quasi-régulière dans $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$. Les homogénéisés de ces trois polynômes sont :

$$\begin{aligned} P_1(X) &= X_1 X_2 X_3 \\ P_2(X) &= (X_1 + X_0)(X_2 + X_0)(X_3 + X_0) \\ P_3(X) &= (X_1 + 2X_0)(X_2 + 2X_0)(X_3 + 2X_0). \end{aligned}$$

L'ensemble \mathbb{V} est constitué de l'union de l'ensemble fini V (ici fermé et égal à son adhérence \overline{V} dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$) et de l'union des trois droites

$$\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}); x_0 = x_1 x_2 x_3 = 0\},$$

toutes les trois incluses dans l'hyperplan à l'infini. L'ensemble algébrique \mathbb{V} contient ici trois droites à l'infini. Et pourtant, on observe (vous pouvez le vérifier par l'absurde en exercice) qu'il existe $C > 0$ et $\kappa > 0$ tels que :

$$(1.21) \quad (\|z\| \geq C) \implies |p_1(z)| + |p_2(z)| + |p_3(z)| \geq \kappa \|z\|.$$

L'application (p_1, p_2, p_3) est topologiquement propre (l'image réciproque d'un compact est un compact) sur \mathbb{C}^3 ; alors pourtant qu'il existe trois droites de zéros communs à l'infini. On voit ici la différence de traitement de l'« infini » suivant que l'on se place du point de vue algébrique (l'hyperplan à l'infini est juste un hyperplan comme un autre de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$) ou analytique (où la notion de propreté topologique prend un sens) et où rendre compte du « comportement à l'infini » d'une fonction polynomiale sur \mathbb{C}^n se quantifie par une *inégalité de Lojasiewicz*¹ du type (1.10) ou, comme ici, (1.21).

1. Une *inégalité de Lojasiewicz* en analyse ou en géométrie analytique (réelle ou complexe) est une inégalité de la forme

$$\|f(x)\| \geq \kappa \min(1, d(x, f^{-1}(\{0\})))^\nu, \quad \kappa > 0, \nu \in \mathbb{N}^*,$$

Les sous-ensembles algébriques de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sont appelés *sous-ensembles algébriques projectifs* de la variété algébrique projective $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$; les sous-ensembles algébriques de l'espace affine $A_n(\mathbb{K})$ sont appelés *sous-ensembles algébriques affines* de la variété algébrique affine $A_n(\mathbb{K})$.

On suppose toujours ici \mathbb{K} -algébriquement clos. Pour définir la *dimension* d'un sous-ensemble algébrique projectif \mathbb{V} , on procède comme dans le contexte des sous-ensembles algébriques affines; en utilisant une représentation minimale de l'idéal homogène radical

$$\mathbb{I}(\mathbb{V}) = \{P \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]; P(x) = 0 \forall x = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{V}\}$$

de manière à ce que l'on ait la représentation minimale (1.20) de \mathbb{V} , on pose

$$\dim \mathbb{V} := \max_{\{j=1, \dots, K; \mathfrak{P}_j \neq (X_0, \dots, X_n)\}} (\dim(\mathfrak{P}_j) - 1),$$

où $\dim(\mathfrak{P}_j)$ désigne, on le rappelle, la dimension de Krull de l'anneau quotient $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathfrak{P}_j$. Le sous-ensemble algébrique projectif \mathbb{V} est dit *de dimension pure* si et seulement si toutes les dimensions $\dim(\mathfrak{P}_j)$ ($j = 1, \dots, K$ et $\mathfrak{P}_j \neq (X_0, \dots, X_n)$) sont égales à un même nombre entier $k + 1 \geq 1$; on dit alors que \mathbb{V} est de dimension pure égale à k . Si tel est le cas avec $k = 0$, \mathbb{V} est alors un sous-ensemble fini de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Si tel est encore le cas avec cette fois $k \in \{1, \dots, n - 1\}$, on dispose, comme dans le contexte affine des sous-ensembles algébriques de $A_n(\mathbb{K})$, voir la remarque 1.8) de la *présentation de Næther* d'un tel sous-ensemble algébrique \mathbb{V} , cette fois comme sous-ensemble algébrique projectif de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$: si

$$\mathbf{T} : [x_0 : \dots : x_n] \rightarrow \left[\sum_{j=0}^n t_{0,j} x_j : \dots : \sum_{j=0}^n t_{n,j} x_j \right],$$

est une transformation affine générique définie sur \mathbb{K} (les coefficients $t_{j,k}$ sont génériques en tant qu'éléments de \mathbb{K}), l'ensemble algébrique $\mathbf{T}^{-1}(\mathbb{V})$ est inclus (mais en général non égal) dans un sous-ensemble algébrique de dimension k se présentant

où $f = (f_1, \dots, f_k)$ est une application polynomiale ou bien analytique (réelle ou complexe). Introduites par S. Lojasiewicz à propos du problème de la division des distributions, pareilles inégalités jouent un rôle important dans la géométrie analytique moderne.

ainsi :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{T}^{-1}(\mathbb{V})} &:= \{[x_0 : \cdots : x_{n-k-1} : x_{n-k} : \cdots : x_n] = \\
&= [x_0 : \cdots : x_{n-k-1} : x''] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \text{ tels que} \\
&\quad x_{n-k-1}^{\delta_{n-k-1}} + \sum_{j=1}^{\delta_{n-k-1}} a_{n-k-1,j}^{\mathbf{T}}(x'') x_{n-k-1}^{\delta_{n-k-1}-j} = 0 \\
(1.22) \quad &\quad x_{n-k-2}^{\delta_{n-k-2}} + \sum_{j=1}^{\delta_{n-k-2}} a_{n-k-2,j}^{\mathbf{T}}(x_{n-k-1}, x'') x_{n-k-2}^{\delta_{n-k-2}-j} = 0 \\
&\quad \vdots \\
&\quad x_0^{\delta_0} + \sum_{j=1}^{\delta_0} a_{0,j}^{\mathbf{T}}(x_1, \dots, x_n) x_0^{\delta_0-j} = 0 \},
\end{aligned}$$

où $\delta_{n-k+1}, \dots, \delta_0$ sont des entiers strictement positifs et les $n-k$ polynômes impliqués dans la définition de l'ensemble sont homogènes de degrés respectifs $\delta_{n-k+1}, \dots, \delta_0$. Notons qu'un tel sous-ensemble algébrique projectif de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est défini comme une intersection complète de dimension k ; en effet, le nombre d'équations algébriques impliquées dans sa définition est égal exactement à $n-k$, c'est-à-dire à la codimension de ce sous-ensemble dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. La projection

$$\pi_{\mathbf{T}} : [x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{V} \longmapsto [x_{n-k} : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^k(\mathbb{K})$$

est alors telle que ses fibres $\pi_{\mathbf{T}}^{-1}(\{x''\})$, où $x'' = [x_{n-k} : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^k(\mathbb{K})$ restent génériquement de même cardinal, à savoir le nombre de « feuilles » du revêtement

$$\widetilde{\pi}_{\mathbf{T}} : [x_0 : \cdots : x_n] \in \widetilde{\mathbf{T}^{-1}(\mathbb{V})} \longmapsto [x_{n-k} : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^k(\mathbb{K})$$

qui sont incluses dans le sous-ensemble algébrique projectif $\mathbf{T}^{-1}(\mathbb{V})$ (toutes les feuilles du revêtement $\widetilde{\pi}_{\mathbf{T}}$ ne sont pas incluses dans \mathbb{V} , il convient donc d'en éliminer certaines). Cette approche nous conduit à une première définition du *degré* du sous-ensemble algébrique \mathbb{V} de dimension pure k .

DÉFINITION 1.10 (degré d'un sous-ensemble algébrique projectif $\mathbb{V} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, \mathbb{K} corps commutatif algébriquement clos). Soit $\mathbb{V} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ un sous-ensemble algébrique projectif de dimension pure égale à $k \in \{0, \dots, n-1\}$ (\mathbb{K} étant un corps commutatif algébriquement clos). Si \mathbf{T} est une application linéaire générique inversible de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ (définie sur \mathbb{K} , c'est-à-dire dont les composantes sont des formes linéaires de \mathbb{K}^{n+1}), le nombre de feuillets du revêtement $\pi_{\mathbf{T}} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{K})$ (qui est inférieur à $\delta_{n-k+1} \cdots \delta_0$, nombre de feuillets du revêtement $\widetilde{\pi}_{\mathbf{T}} : \widetilde{\mathbf{T}^{-1}(\mathbb{V})} \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{K})$) ne dépend pas de \mathbf{T} , pourvu toutefois que \mathbf{T} soit générique; on appelle ce nombre de feuillets le *degré* du sous-ensemble algébrique projectif \mathbb{V} .

Nous allons maintenant voir comment les notions de *dimension* (pour un sous-ensemble algébrique projectif de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$) et de *degré* (pour un sous-ensemble algébrique projectif de dimension pure de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$) que nous venons d'introduire se trouvent (avec bien d'autres invariants relatifs au sous-ensemble \mathbb{V} considéré comme plongé dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$) encodés au sein d'un seul et même objet algébrique, le *polynôme de Hilbert*

du $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ -module gradué (en fait de type fini) $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\sqrt{(P_1, \dots, P_M)}$, ce lorsque $\mathbb{V} := \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}); P_1(x) = \dots = P_M(x) = 0\}$, P_1, \dots, P_M désignant M polynômes homogènes (de degrés respectifs a priori distincts) dont V se trouve être l'ensemble des zéros communs dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Pour cela, nous aurons besoin d'observer les faits suivants :

PROPOSITION 1.3 (module quotient de type fini attaché à un idéal homogène). *Soit \mathbb{I} un idéal homogène (c'est-à-dire engendré par un nombre fini de polynômes homogènes) de l'anneau noëthérien $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$. L'anneau quotient $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}$ est alors un $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ -module de type fini.*

DÉMONSTRATION. Prouvons ce résultat dans un premier temps lorsque l'ensemble \mathbb{V} des zéros communs à tous les éléments de \mathbb{I} est de dimension pure k entre 0 et $n - 1$. Si l'on utilise la présentation de Noëther (1.22) pour l'ensemble \mathbb{V} et le fait que $(I(\mathbb{V}))^q = (\sqrt{I})^q \subset \mathbb{I}$ pour un certain $q \in \mathbb{N}^*$, on voit que nécessairement $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}$ est de type fini comme $\mathbb{K}[X_0 : \dots : X_n]$ -module : en effet, il existe un changement de variables linéaire de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ dans lui-même tel que, pour chaque variable x_{n-k-1}, \dots, x_0 , on ait

$$\left(x_\ell^{\delta_\ell} - \sum_{j=1}^{\delta_\ell} a_{\ell,j}(x_\ell, \dots, x_{n-k-1}, x_{n-k}, \dots, x_n) x_\ell^{\delta_\ell-j}\right)^q \in \mathbb{I}.$$

Si \mathbb{V} n'est plus de dimension pure, on choisit des coordonnées dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ de manière à se que les divers sous-ensembles algébriques de dimension pure (ces diverses dimensions étant toutefois différentes entre elles) $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_{K'}$ dont l'union constitue \mathbb{V} se présentent en position de Noëther (1.22) de manière simultanée (c'est-à dire après un même changement de variables \mathbf{T}). \square

L'anneau $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ se présente comme un anneau *gradué par le degré*, ce qui signifie que

$$(1.23) \quad \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n] = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} (\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n])_j,$$

où $(\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n])_j$ désigne le \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $\binom{n+1+j}{j}$ des polynômes homogènes de degré j en $n + 1$ variables (X_0, \dots, X_n) . On a en effet

$$(\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n])_{j_1} \cdot (\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n])_{j_2} \subset (\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n])_{j_1+j_2} \quad \forall j_1, j_2 \in \mathbb{N}.$$

Un $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ -module \mathcal{M} est dit *gradué au dessus de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$* , la *graduation sur cet anneau étant la graduation par le degré* (1.23) *ci-dessus*, si et seulement si l'on a une décomposition en groupes abéliens

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}_j,$$

avec

$$(\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n])_{j_1} \cdot \mathcal{M}_{j_2} \subset \mathcal{M}_{j_1+j_2} \quad \forall j_1, j_2 \in \mathbb{N}.$$

Si \mathcal{M} est un $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ module de type fini de la forme $\mathcal{M} = \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}$, où \mathbb{I} désigne un idéal homogène de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$, il existe une telle graduation et l'on peut

même dire plus ; on peut en effet écrire :

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}_j,$$

où

$$(1.24) \quad \mathcal{M}_j = \frac{(\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n])_j + \mathbb{I}}{\mathbb{I}}.$$

Le fait que le module $\mathcal{M} = \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}$ soit de type fini implique que chaque groupe abélien \mathcal{M}_j (1.24) est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie¹, de dimension finie $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_j$.

On dispose alors du résultat suivant :

THEOREME 1.5 (théorème de Hilbert). *Soit \mathbb{I} un idéal homogène de l'algèbre polynomiale $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ en $n+1$ variables et \mathcal{M} le $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ -module de dimension finie $\mathcal{M} = \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}$, la $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ -gradation étant donnée par*

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}_j = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n])_j + \mathbb{I}}{\mathbb{I}}.$$

Il existe un unique polynôme $P_{\mathcal{M}}$ à coefficients rationnels, de degré $k \in \{0, \dots, n\}$, tel que la valeur en $j \in \mathbb{N}$ de la fonction de Hilbert

$$j \mapsto H_{\mathcal{M}}(j) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_j = \dim_{\mathbb{K}} \frac{(\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n])_j + \mathbb{I}}{\mathbb{I}}$$

coincide avec $P_{\mathcal{M}}(j)$ lorsque l'entier j est suffisamment grand.

Remarque 1.11. La preuve que nous allons donner ici ne précise pas à partir de quel seuil j_0 l'égalité des valeurs en $j \geq j_0$ de la fonction de Hilbert $H_{\mathcal{M}}$ et du polynôme de Hilbert $P_{\mathcal{M}}$ reste valable. C'est là un problème important dans les questions d'effectivité en algèbre commutative. Le polynôme de Hilbert encode des informations géométriques (dimension et degré) au travers de son monôme dominant, mais les autres coefficients encodent, eux, une information cohomologique. Lorsque $\mathbb{I} = \mathbb{I}(\mathbb{V})$ est un idéal radical, tous les invariants relatifs au sous-ensemble algébrique projectif $\mathbb{V}(\mathbb{I}) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sont donc encodés dans la connaissance de ce polynôme $P_{\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}(\mathbb{V})}$.

DÉMONSTRATION. En fait, on montre le résultat pour tout $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ -module \mathcal{M} de type fini admettant une gradation

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}_j$$

avec

$$(\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n])_{j_1} \cdot \mathcal{M}_{j_2} \subset \mathcal{M}_{j_1+j_2} \quad \forall j_1, j_2 \in \mathbb{N}.$$

1. Qu'il s'agisse d'un \mathbb{K} -espace vectoriel est immédiat du fait de la définition ; qu'il soit de dimension finie résulte du fait que, si tel n'était pas le cas, $\bigoplus_{\ell \geq j} \mathcal{M}_{\ell}$ serait un sous-module de \mathcal{M} qui ne serait pas finiment engendré, ce qui contredirait le fait que $\mathcal{M} = \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}$ est, comme $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$, un $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ -module noethérien (tout sous-module de \mathcal{M} est finiment engendré) en tant que $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ -module de type fini.

Le cas $\mathcal{M} = \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}$ sera juste alors un cas particulier.

La preuve se fait par récurrence sur le nombre de variables x_0, \dots, x_n , en partant du cas initial où cet ensemble de variables est vide et où par conséquent \mathcal{M} se trouve être juste un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, auquel cas bien sûr tous les \mathcal{M}_j sont nuls pour j assez grand; on peut décider de prendre dans ce cas trivial comme polynôme $P_{\mathcal{M}}$ dans le polynôme identiquement nul, dont on décide arbitrairement que le degré vaut -1 .

Supposons le résultat acquis lorsque le nombre de variables de l'anneau de polynômes est $r-1$ et considérons une variable supplémentaire X_r . Le module quotient $\mathcal{M}/(X_r\mathcal{M})$ est un $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_{r-1}]$ -module de type fini, héritant de part le fait que \mathcal{M} a une graduation, lui aussi d'une graduation

$$\frac{\mathcal{M}}{X_r\mathcal{M}_r} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \frac{\mathcal{M}_j}{X_r\mathcal{M}_{j-1}}$$

(avec la convention $\mathcal{M}_{-1} = 0$). On note $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ le noyau de la multiplication par X_r (de \mathcal{M} dans lui-même). Ce noyau \mathcal{K} hérite lui aussi d'une graduation

$$\mathcal{K} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{K}_j$$

et l'on peut considérer la suite exacte de \mathbb{K} -espaces vectoriels gradués :

$$(1.25) \quad 0 \longrightarrow \bigoplus_{j \geq 1} \mathcal{K}_{j-1} \longrightarrow \bigoplus_{j \geq 1} \mathcal{M}_{j-1} \xrightarrow{\times X_r} \mathcal{M} \longrightarrow \frac{\mathcal{M}}{X_r\mathcal{M}_r} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \frac{\mathcal{M}_j}{X_r\mathcal{M}_{j-1}} \longrightarrow 0$$

Toutes les applications linéaires ici sont de degré 0 (du fait des décalages effectués au niveau des graduations de \mathcal{K} devenu le $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_{r-1}]$ -module gradué $\mathcal{K}(-1) = \bigoplus_{j \geq 1} \mathcal{K}_{j-1}$ et de \mathcal{M} devenu $\mathcal{M}(-1) = \bigoplus_{j \geq 1} \mathcal{M}_{j-1}$), c'est-à-dire préservent ainsi le degré des éléments). Le fait que la suite courte (1.25) soit exacte (l'image d'une flèche est exactement le noyau de la suivante) implique au niveau des fonctions de Hilbert l'égalité

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{M}}(j) - H_{\mathcal{M}(-1)}(j) &= H_{\mathcal{M}}(j) - H_{\mathcal{M}}(j-1) = \\ H_{\mathcal{M}/(X_r\mathcal{M})}(j) - H_{\mathcal{K}(-1)}(j) &= H_{\mathcal{M}/(X_r\mathcal{M})}(j) - H_{\mathcal{K}}(j-1). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, la différence des fonctions de Hilbert

$$j \mapsto H_{\mathcal{M}/(X_r\mathcal{M})}(j) - H_{\mathcal{K}}(j-1)$$

coincide avec une fonction polynomiale de degré au plus égal à $r-1$ pour j assez grand. Il existe donc $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $j \geq j_0$, on ait

$$H_{\mathcal{M}}(j) - H_{\mathcal{M}}(j-1) = p(j)$$

où p est une fonction polynomiale à coefficients rationnels de degré au plus $r-1$. Posons

$$P_{\mathcal{M}}(j) = \begin{cases} H_{\mathcal{M}}(j) & \text{si } j \geq j_0 \\ H_{\mathcal{M}}(j_0) - \sum_{\ell=j+1}^{j_0} p(\ell) & \text{si } j < j_0. \end{cases}$$

Cette fonction $P_{\mathcal{M}}$ vérifie ainsi

$$P_{\mathcal{M}}(j) - P_{\mathcal{M}}(j-1) = p(j) \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

où p est une fonction polynomiale à coefficients rationnels de degré au plus $r-1$. On peut alors écrire

$$P_{\mathcal{M}}(j) = P_{\mathcal{M}}(0) + \sum_{\ell=0}^{j-1} p(\ell).$$

En exprimant¹ $p|_{\mathbb{N}}$ comme une combinaison linéaire à coefficients rationnels des

$$\ell \mapsto \binom{r-1}{\ell}$$

(fonction polynomiale en ℓ de degré k , $k = 0, \dots, r-1$), on voit que $P_{\mathcal{M}}$ prend les mêmes valeurs aux entiers j qu'une fonction polynomiale à coefficients rationnels de degré au plus $(r-1) + 1 = r$. La fonction $H_{\mathcal{M}}$ coïncide avec ce polynôme $P_{\mathcal{M}}$ aux entiers supérieurs ou égaux à j_0 et le théorème de Hilbert est ainsi prouvé. \square

En fait, on peut obtenir un résultat plus précis dans le cas où \mathbb{I} est l'idéal radical associé à un sous-ensemble algébrique projectif de dimension $k \in \{0, \dots, n\}$. On peut exprimer pour $j \geq j_0$ la fonction de Hilbert $H_{\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}}$ ainsi :

$$H_{\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}(\mathbb{V})}(j) = c_0 \binom{j}{\dim \mathbb{V}} + c_1 \binom{j}{\dim \mathbb{V} - 1} + \dots + c_{\dim \mathbb{V}},$$

où $c_0 > 0, c_1, \dots, c_{\dim \mathbb{V}}$ sont des entiers (voir par exemple la preuve plus détaillée dans [Clad]). Ceci signifie que le polynôme de Hilbert est de degré exactement $\dim \mathbb{V}$ et que son coefficient dominant est de la forme $c/(\dim \mathbb{V})!$, où c est un entier strictement positif. Cet entier $c = c(\mathbb{V}, \mathbb{P}^n(\mathbb{K}))$ est en fait le degré du sous-ensemble algébrique projectif de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ constitué de l'union des composantes irréductibles de \mathbb{V} de dimension exactement $\dim \mathbb{V}$. On dispose donc là d'une autre incarnation du degré d'un sous-ensemble algébrique projectif de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

1.6. Les résultats relatifs à la décomposition des idéaux

L'objectif dans cette section est, dans un premier temps, de justifier le fait que tout sous-ensemble algébrique affine de $A_n(\mathbb{K})$, ou tout sous-ensemble algébrique projectif de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ (lorsque \mathbb{K} est un corps commutatif algébriquement clos) se décompose comme union finie de sous-ensembles algébriques (affines ou projectifs suivant le cadre où l'on se place) de $A_n(\mathbb{K})$ (ou de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ si l'on se place dans le cadre projectif). Dans un second temps, nous envisagerons comment une telle décomposition se répercute sur la complexité du problème de la décidabilité de l'appartenance d'un élément q donné dans $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ à un idéal $I = (p_1, \dots, p_M) \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ donné, lui, en termes de ses générateurs (ou de l'appartenance d'un polynôme homogène $Q \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ à un idéal homogène $\mathbb{I} = (P_1, \dots, P_M) \subset \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ donné également en termes de ses générateurs).

Nous avons déjà introduit la notion d'*irréductibilité* pour un sous-ensemble algébrique affine $V \subset A_n(\mathbb{K})$. C'était l'objet de la proposition 1.1, où nous avons prouvé que le fait

1. Je vous conseille ici l'exercice 1.21 (avec ses indications) de [Eis]. Les exercices 1.16, 1.17, 1.18 de ce même ouvrage (pages 53-54) sont aussi enrichissants.

qu'un sous-ensemble algébrique affine $V \subset A_n(\mathbb{K})$ était irréductible était équivalent au fait que l'idéal radical

$$I(V) = \{q \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]; q = 0 \text{ sur } V\}$$

était un idéal premier. De manière analogue, nous pouvons introduire le concept d'irréductibilité pour un sous-ensemble algébrique projectif $\mathbb{V} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$:

DÉFINITION 1.11 (sous-ensembles algébriques projectifs de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$). Un sous-ensemble algébrique projectif $\mathbb{V} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est dit *irréductible* si les seules décompositions de \mathbb{V} sous la forme $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2$, où \mathbb{V}_1 et \mathbb{V}_2 sont des sous-ensembles algébriques projectifs de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, sont les décompositions triviales $\mathbb{V} = \emptyset \cup \mathbb{V}$ ou $\mathbb{V} = \mathbb{V} \cup \emptyset$.

Exactement comme nous avons prouvé la proposition 1.1, nous pouvons établir le résultat suivant concernant les sous-ensembles algébriques projectifs de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 1.4 (irréductibilité dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ et idéaux homogènes premiers). *Soit \mathbb{K} un corps algébriquement clos. Un sous-ensemble algébrique projectif $\mathbb{V} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est irréductible au sens de la définition 1.11 si et seulement si l'idéal homogène radical $\mathbb{I}(\mathbb{V})$ qui est engendré par les polynômes homogènes $Q \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ tels que $Q(x_0, \dots, x_n) = 0$ pour tout $x = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{V}$ est un idéal homogène premier de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ (bien sûr différent de l'idéal (X_0, \dots, X_n)).*

DÉMONSTRATION. La preuve est rigoureusement identique à celle de la proposition 1.1 (qui elle concernait le contexte affine et non projectif). \square

Voici comment la noëthériannité de l'anneau $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ou $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ se repercuta au niveau de la finitude de la décomposition d'un sous-ensemble algébrique en sous-ensembles algébriques irréductibles (que l'on soit dans le cadre affine de $A_n(\mathbb{K})$ ou dans le cadre projectif de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$) :

PROPOSITION 1.5 (finitude de la décomposition d'un sous-ensemble algébrique affine ou projectif en composantes irréductibles). *Soit \mathbb{K} un corps commutatif¹. Tout sous-ensemble algébrique affine V de $A_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique² comme une union finie de sous-ensembles algébriques affines irréductibles distincts de $A_n(\mathbb{K})$. De même, tout sous-ensemble algébrique projectif \mathbb{V} de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique comme une union finie de sous-ensembles algébriques projectifs irréductibles distincts de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.*

DÉMONSTRATION. On fera le raisonnement dans le cadre projectif, par l'absurde. Supposons que \mathbb{V} soit un sous-ensemble algébrique projectif de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ne s'écrivant pas comme une union finie de sous-ensembles algébriques projectifs irréductibles. Alors \mathbb{V} ne saurait être lui-même irréductible ; \mathbb{V} se décompose donc sous la forme $\mathbb{V} = \mathbb{V}' \cup \mathbb{V}''$, où \mathbb{V}' et \mathbb{V}'' sont strictement inclus dans \mathbb{V} et sont tous deux des sous-ensembles algébriques projectifs. L'un de ces deux sous-ensembles (on le notera $\mathbb{V}^{(1)}$) ne saurait être union finie de sous-ensembles algébriques irréductibles (sinon l'union des deux sous-ensembles algébriques irréductibles \mathbb{V}' et \mathbb{V}'' le serait). On peut donc recommencer avec $\mathbb{V}^{(1)}$ ce que l'on a fait avec \mathbb{V} : le sous-ensemble algébrique projectif $\mathbb{V}^{(1)}$ est forcément réductible, se décompose de manière non triviale $\mathbb{V}^{(1)} = (\mathbb{V}^{(1)})' \cup (\mathbb{V}^{(1)})''$,

1. Algébriquement clos n'est pas nécessaire ici.

2. Bien sûr à l'ordre des termes près ; cela vaut dans les deux cas.

l'un des deux sous-ensembles algébriques $(\mathbb{V}^{(1)})'$ ou $(\mathbb{V}^{(1)})''$ ne saurait être union finie de sous-ensembles algébriques projectifs irréductibles, etc. En continuant de la sorte, on construit une suite de sous-ensembles algébriques projectifs tous distincts :

$$(1.26) \quad \mathbb{V}^{(0)} = \mathbb{V} \supset \mathbb{V}^{(1)} \supset \mathbb{V}^{(2)} \supset \dots \supset \mathbb{V}^{(k)} \supset \mathbb{V}^{(k+1)} \supset \dots .$$

On a donc la chaîne d'idéaux homogènes radicaux distincts :

$$(1.27) \quad \mathbb{I}(\mathbb{V}^{(0)}) = \mathbb{I}(\mathbb{V}) \subset \mathbb{I}(\mathbb{V}^{(1)}) \subset \mathbb{I}(\mathbb{V}^{(2)}) \subset \dots \subset \mathbb{I}(\mathbb{V}^{(k)}) \subset \mathbb{I}(\mathbb{V}^{(k+1)}) \subset \dots .$$

Or, dans un anneau noethérien (c'est le cas de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$), toute suite croissante d'idéaux est forcément stationnaire ; l'existence d'une telle suite d'idéaux (1.27) (donc d'une telle suite de sous-ensembles algébriques distincts (1.26)) est impossible. L'hypothèse faite ici, selon laquelle \mathbb{V} ne pouvait être union finie de sous-ensembles algébriques projectifs irréductibles, est donc absurde. La proposition est ainsi démontrée. \square

Si \mathbb{K} est de plus algébriquement clos et que l'on utilise la correspondance bijective réalisée par le théorème des zéros de Hilbert (théorème 1.1) entre idéaux radicaux propres (c'est-à-dire distincts de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$) de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ et sous-ensembles algébriques affines non vides de $A_n(\mathbb{K})$ (ou entre idéaux radicaux homogènes de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ ne contenant pas (X_0, \dots, X_n) et sous-ensembles algébriques projectifs non vides de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$), on voit que :

- tout idéal radical propre I de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ se représente de manière unique (à l'ordre des termes près) sous la forme

$$(1.28) \quad I = \bigcap_{j=1}^K \mathfrak{P}_j,$$

où les idéaux \mathfrak{P}_j , $j = 1, \dots, K$, sont des idéaux premiers de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ tels que $\mathfrak{P}_{j_1} \not\subset \mathfrak{P}_{j_2}$ pour tout $1 \leq j_1 \neq j_2 \leq K$.

- tout idéal homogène radical \mathbb{I} de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ ne contenant pas (X_0, \dots, X_n) se représente de manière unique (à l'ordre des termes près) sous la forme

$$(1.29) \quad \mathbb{I} = \bigcap_{j=1}^K \mathfrak{P}_j,$$

où les idéaux \mathfrak{P}_j , $j = 1, \dots, K$, sont des idéaux homogènes premiers de l'anneau $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$, tous distincts de (X_0, \dots, X_n) , tels que $\mathfrak{P}_{j_1} \not\subset \mathfrak{P}_{j_2}$ pour tout $1 \leq j_1 \neq j_2 \leq K$.

Nous allons maintenant introduire la notion d'*idéal irréductible* dans $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ou d'*idéal homogène irréductible* dans $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ aux fins non plus de décomposer les sous-ensembles algébriques affines ou projectifs, mais cette fois de représenter les idéaux de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ou les idéaux homogènes de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$.

DÉFINITION 1.12 (irréductibilité des idéaux). Soit \mathbb{K} un corps commutatif (non nécessairement algébriquement clos). Un idéal I de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est dit *irréductible* (dans $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$) si et seulement si les seules possibilités pour écrire $I = I_1 \cap I_2$, où I_1 et I_2 sont deux idéaux de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ sont $I = I_1 \cap I$ avec $I \subset I_1$ ou bien $I = I \cap I_2$ avec $I \subset I_2$. Un idéal homogène \mathbb{I} de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ est dit *irréductible* (en tant qu'idéal homogène de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$) si et seulement si les seules possibilités

pour écrire $\mathbb{I} = \mathbb{I}_1 \cap \mathbb{I}_2$, où \mathbb{I}_1 et \mathbb{I}_2 sont deux idéaux homogènes de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ sont $\mathbb{I} = \mathbb{I}_1 \cap \mathbb{I}$ avec $\mathbb{I} \subset \mathbb{I}_1$ ou bien $\mathbb{I} = \mathbb{I} \cap \mathbb{I}_2$ avec $\mathbb{I} \subset \mathbb{I}_2$, \mathbb{I}_1 et \mathbb{I}_2 étant ici aussi homogènes.

Une fois cette définition établie, on peut reprendre le principe de la preuve de la proposition 1.5 et démontrer (dans le contexte affine ou bien dans le contexte projectif) le résultat suivant :

PROPOSITION 1.6 (finitude de la représentation d'un idéal comme intersection d'idéaux irréductibles). *Soit \mathbb{K} un corps commutatif (non nécessairement algébriquement clos). Tout idéal I de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ se représente (non nécessairement de manière unique, même à l'ordre des facteurs près) comme l'intersection d'un nombre au plus fini d'idéaux I_1, \dots, I_K irréductibles de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Tout idéal homogène \mathbb{I} de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ se représente (non nécessairement de manière unique, même à l'ordre des facteurs près) comme l'intersection d'au plus un nombre au plus fini d'idéaux homogènes $\mathbb{I}_1, \dots, \mathbb{I}_K$ irréductibles en tant qu'idéaux homogènes de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$.*

DÉMONSTRATION. On fait la preuve par l'absurde (dans les deux cas), comme celle de la proposition 1.5. Dans le cas projectif, si l'on part par exemple d'un idéal homogène \mathbb{I} de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ ne pouvant se représenter comme une intersection au plus finie d'idéaux homogènes irréductibles de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$, on construit de proche en proche une suite d'idéaux homogènes distincts avec

$$\mathbb{I}^{(0)} = \mathbb{I} \subset \mathbb{I}^{(1)} \subset \mathbb{I}^{(2)} \subset \dots \subset \mathbb{I}^{(k)} \subset \mathbb{I}^{(k+1)} \subset \dots$$

Mais l'existence d'une telle suite contredirait encore le fait que toute suite croissante d'idéaux homogènes de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ se doit d'être stationnaire (puisque $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ est noethérien). L'hypothèse faite ici (à savoir que \mathbb{I} ne s'écrit pas comme intersection finie d'idéaux homogènes irréductibles) est donc absurde. \square

Avant d'aller plus loin, faisons une remarque liée à l'arithmétique :

Remarque 1.12 (idéaux irréductibles de \mathbb{Z}). Les idéaux premiers de \mathbb{Z} sont les idéaux $p\mathbb{Z}$, où p est un nombre premier. Les idéaux irréductibles de \mathbb{Z} sont, outre \mathbb{Z} lui-même, les idéaux $p^q\mathbb{Z}$ avec p premier et $q \in \mathbb{N}^*$. En effet, dire que $p^q\mathbb{Z} = n_1\mathbb{Z} \cap n_2\mathbb{Z}$ implique que n_1 et n_2 divisent p^q , donc sont de la forme p^{q_1} et p^{q_2} ; on a nécessairement $q_1 = q$ et $q_2 = 0$ ou $q_1 = 0$ et $q_2 = q$; en revanche, si n admet deux facteurs premiers distincts p_1 et p_2 , c'est-à-dire $n = up_1^{q_1}p_2^{q_2}$, on voit que $n\mathbb{Z} = up_1^{q_1}\mathbb{Z} \cap up_2^{q_2}\mathbb{Z}$ grâce au lemme de Gauß, donc que $n\mathbb{Z}$ n'est pas irréductible. Les idéaux irréductibles de \mathbb{Z} sont donc, outre \mathbb{Z} , les idéaux $p^r\mathbb{Z}$ avec p premier, c'est-à-dire ceux dont le radical est premier.

La remarque ci-dessus nous conduit à introduire la notion d'*idéal primaire* dans un anneau commutatif unitaire \mathbb{A} .

DÉFINITION 1.13 (idéaux primaires d'un anneau commutatif¹). Un idéal d'un anneau commutatif unitaire \mathbb{A} est dit *primaire* si et seulement, pour tout a_1, a_2 dans \mathbb{A} tels que $a_1a_2 \in I$, on a soit $a_1 \in I$, soit $a_2^m \in I$ pour un certain entier $m \geq 0$.

PROPOSITION 1.7. *Soit I un idéal primaire d'un anneau commutatif unitaire. Soit $I = \mathbb{A}$, soit le radical de I est un idéal premier.*

1. Corrigez ici la définition donnée en cours ; j'avais fait ici une confusion : ce ne sont pas les idéaux dont le radical est premier.

DÉMONSTRATION. Si I est primaire et propre, $1 \notin I$. Dire que I est primaire revient dans ce cas à dire que, pour tout $a_1, a_2 \in \mathbb{A}$ tels que $a_1 a_2 \in I$, on a $a_1 \in I$ ou $a_2^m \in I$ pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$. Si l'on suppose que b_1 et b_2 sont tels que $b_1 b_2 \in \sqrt{I}$, on a $b_1^{m_0} b_2^{m_0} \in I$ pour un certain $m_0 \in \mathbb{N}^*$; si $b_1^{m_0} \notin I$, on a donc $b_2^{m_0 m} \in I$ pour un certain entier $m \in \mathbb{N}^*$; cela montre que soit b_1 , soit b_2 , est dans \sqrt{I} . L'idéal \sqrt{I} est premier. \square

Remarque 1.13 (attention!). Dans un anneau commutatif général, un idéal $I \subset \mathbb{A}$ dont le radical est premier n'est pas toujours primaire! Par exemple, dans $\mathbb{K}[X_1, X_2, X_3]/(X_1 X_2 - X_3^2)$, l'idéal $I = (\bar{X}_1, \bar{X}_3)^2$ est de radical (\bar{X}_1, \bar{X}_3) premier, mais on a $\bar{X}_1 \bar{X}_2 = \bar{X}_3^2 \in I$, alors que $\bar{X}_1 \notin I$ et que $\bar{X}_2^m \notin I$ pour aucun $m \in \mathbb{N}^*$. L'idéal I n'est donc pas primaire!

Nous allons montrer plus loin que, dans $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, tout idéal irréductible est primaire et que, dans $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$, tout idéal homogène \mathbb{I} irréductible (en tant qu'idéal homogène de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$) est homogène primaire. Mais nous aurons auparavant besoin pour cela d'introduire la notion de *transporteur d'un idéal dans un autre* (dans un anneau commutatif).

DÉFINITION 1.14 (transporteur d'un idéal dans un autre (dans un anneau commutatif)). Soient I et J deux idéaux d'un anneau commutatif \mathbb{A} . Le *transporteur de J dans I* est par définition l'idéal de \mathbb{A} défini comme

$$[I : J] := \{u \in \mathbb{A}; u \cdot J \subset I\}.$$

C'est un idéal de \mathbb{A} contenant évidemment l'idéal I . Si $J \subset I$, on a $[I : J] = \mathbb{A}$.

Remarque 1.14. Le transporteur d'un idéal J dans un idéal I est vraiment l'idéal qui « transporte » l'idéal J dans l'idéal I , à savoir l'idéal constitué des éléments de l'anneau \mathbb{A} par lesquels il contient de multiplier les éléments de J pour « arriver » dans I . Le nom d'*idéal transporteur* est donc bien choisi.

PROPOSITION 1.8 (irréductible implique primaire¹). Dans $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, tout idéal irréductible est primaire; si cet idéal est de plus propre, son radical est un idéal premier. Dans $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$, tout idéal homogène irréductible est primaire; si de plus l'idéal est propre, son radical est un idéal homogène premier de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$.

DÉMONSTRATION. On fait le raisonnement dans le cadre projectif de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ (il est identique dans le cadre affine de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$). Soit \mathbb{I} un idéal homogène de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$, supposé irréductible, et P, Q deux polynômes (on peut les supposer homogènes) tels que $PQ \in \mathbb{I}$ et $P \notin \mathbb{I}$. On introduit la suite des idéaux $[\mathbb{I} : (Q^k)]$, $k = 1, 2, \dots$. Il s'agit d'une suite croissante d'idéaux car il est immédiat de vérifier que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad [\mathbb{I} : (Q^k)] \subset [\mathbb{I} : (Q^{k+1})].$$

Comme $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ est noethérien, la suite croissante d'idéaux homogènes

$$[\mathbb{I} : (Q)] \subset [\mathbb{I} : (Q^2)] \subset \dots \subset [\mathbb{I} : (Q^k)] \subset [\mathbb{I} : (Q^{k+1})] \subset \dots$$

est stationnaire. Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$[\mathbb{I} : (Q^N)] = [\mathbb{I} : (Q^{N+1})].$$

1. Il n'y a pas équivalence! Là encore, je me suis mal exprimé en cours. Corrigez sur vos notes.

Montrons que ceci implique l'égalité entre idéaux homogènes :

$$(1.30) \quad \mathbb{I} = (\mathbb{I} + (P)) \cap (\mathbb{I} + (Q^N)).$$

Évidemment on a déjà l'inclusion

$$\mathbb{I} \subset (\mathbb{I} + (P)) \cap (\mathbb{I} + (Q^N)).$$

Il faut prouver l'autre inclusion. Soit $y \in \mathbb{I} + (P)$ tel que l'on ait aussi $y \in \mathbb{I} + (Q^N)$; on a alors

$$y = x + Pz = x' + Q^N z' \quad (x, x' \in I);$$

On a $Qy = Qx + QPz \in \mathbb{I}$ (car $PQ \in \mathbb{I}$ et $x \in \mathbb{I}$) et $Qy = Qx' + Q^{N+1}z'$, d'où il résulte que $Q^{N+1}z' \in \mathbb{I}$; mais, comme $[\mathbb{I} : (Q^N)] = [\mathbb{I} : (Q^{N+1})]$, on a aussi $Q^N z' \in \mathbb{I}$; comme $y = x' + Q^N z'$ et que $x' \in \mathbb{I}$, on a $y \in \mathbb{I}$; on vient donc d'établir l'égalité (1.30). Comme \mathbb{I} est supposé irréductible, le fait que l'on ait (1.30) et que $\mathbb{I} + (P)$ soit un idéal contenant strictement \mathbb{I} implique que $\mathbb{I} = \mathbb{I} + (Q^N)$, donc que $Q^N \in \mathbb{I}$. On vient ainsi de prouver que \mathbb{I} est primaire. Les autres assertions de la proposition résultent de la proposition 1.7. \square

En combinant les propositions 1.6 et 1.8, on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 1.9 (version préliminaire du théorème de Noether-Lasker). *Soit \mathbb{K} un corps commutatif. Tout idéal I de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ se représente comme intersection d'au plus un nombre fini d'idéaux primaires. Tout idéal homogène \mathbb{I} de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ se représente comme intersection d'au plus un nombre fini d'idéaux primaires homogènes de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$.*

Si dans un anneau commutatif I_1 et I_2 sont deux idéaux primaires de même radical l'idéal premier \mathfrak{P} , l'idéal $I_1 \cap I_2$ est encore primaire. Cette remarque permet de rendre « minimales » les représentations

$$I = \bigcap_{j=1}^K \mathfrak{Q}_j \quad \text{ou} \quad \mathbb{I} = \bigcap_{j=1}^K \mathfrak{Q}_j$$

données par la proposition 1.9.

THEORÈME 1.6 (théorème de Noether-Lasker). *Soit \mathbb{K} un corps commutatif. Tout idéal I de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ se représente comme une intersection*

$$(1.31) \quad I = \bigcap_{j=1}^K \mathfrak{Q}_j,$$

où les idéaux \mathfrak{Q}_j sont des idéaux primaires de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ et

$$\bigcap_{\substack{1 \leq \ell \leq K \\ \ell \neq j}} \mathfrak{Q}_\ell \not\subset \mathfrak{Q}_j \quad (j = 1, \dots, K).$$

Tout idéal homogène \mathbb{I} de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ se représente comme intersection

$$(1.32) \quad \mathbb{I} = \bigcap_{j=1}^K \mathfrak{Q}_j,$$

où les idéaux \mathfrak{Q}_j sont des idéaux primaires homogènes de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ et

$$\bigcap_{\substack{1 \leq \ell \leq K \\ \ell \neq j}} \mathfrak{Q}_\ell \not\subset \mathfrak{Q}_j \quad (j = 1, \dots, K).$$

DÉMONSTRATION. Le principe de la preuve consiste à regrouper dans la représentation donnée par la proposition 1.9 tous les idéaux primaires partageant le même radical premier. On réduit ensuite la représentation en omettant un idéal primaire dès qu'il contient l'intersection de tous les autres. \square

Pour conclure enfin, nous allons définir la notion de famille d'idéaux premiers associés à un $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ module de la forme $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I$ et la famille d'idéaux premiers associés à un $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ -module de la forme $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}$, où \mathbb{I} est un idéal homogène de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$.

DÉFINITION 1.15 (idéaux associés¹). Si I est un idéal de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, un idéal premier \mathfrak{P} de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est dit *associé* au $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ -module $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I$ (on dit aussi par abus de langage « associé à l'idéal I ») s'il existe un élément x de $\mathcal{M} = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I$ tel que $\mathfrak{P} \cdot x = 0$. Si \mathbb{I} est un idéal homogène de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$, un idéal homogène premier \mathfrak{P} de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ est dit *associé* au $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ -module $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}$ (on dit aussi par abus de langage « associé à l'idéal \mathbb{I} ») s'il existe un élément $\mathbf{x} \in \mathcal{M} = \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}$ tel que $\mathfrak{P} \cdot \mathbf{x} = 0$.

Lorsque le module \mathcal{M} est de type fini sur un anneau noëthérien (comme ici les modules quotient $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I$ ou $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}$), le module \mathcal{M} est noëthérien², ce qui implique que l'ensemble des idéaux premiers formant $\text{Ass}(\mathcal{M})$ est fini. On omet ici la preuve de ce résultat³. Dans ce cas cet ensemble se scinde en deux sous-ensembles :

- Les idéaux associés qui se trouvent être en bout gauche de chaînes lorsque l'on range les éléments (distincts) de $\text{Ass}(\mathcal{M})$ en chaînes croissantes

$$\mathfrak{P}_{j_1} \subset \mathfrak{P}_{j_2} \subset \dots$$

pour la relation d'inclusion; cette relation induit un ordre partiel et il y a un nombre fini de telles chaînes; ces idéaux sont dits *associés minimaux* ou encore *associés isolés* du module noëthérien \mathcal{M} (c'est le cas ici par exemple de \mathfrak{P}_{j_1}).

- Les autres, dits non isolés ou aussi « plongés » (« *embedded*⁴ » dans la terminologie anglo-saxonne).

Le théorème de Noëther-Lasker 1.6 se complète ainsi :

1. Cette définition est de fait plus générale : si \mathcal{M} est un $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_\nu]$ -module, un idéal premier \mathfrak{P} de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_\nu]$ est dit *associé* au $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_\nu]$ -module \mathcal{M} s'il existe $x \in \mathcal{M}$ tel que $\mathfrak{P} \cdot x = 0$.

2. Ce qui signifie que toute chaîne croissante de sous-modules est stationnaire.

3. Voir par exemple le théorème 3.1 (a) (justifié par la proposition 3.7 dans la même référence) dans [Eis]; toujours l'argument sur la stationnarité des suites croissantes de sous-modules.

4. Cette terminologie se justifie ainsi : si \mathbb{K} est algébriquement clos, le sous-ensemble algébrique des zéros dans \mathbb{K}^n ou $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ d'un idéal premier « plongé » se trouve inclus (en ayant une dimension strictement plus petite) dans l'ensemble des zéros d'un idéal associé isolé; il est donc géométriquement « invisible », car caché dans un sous-ensemble algébrique « visible » de dimension strictement plus grande que lui.

PROPOSITION 1.10 (unicité de la liste des radicaux des idéaux primaires dans une représentation minimale). *Dans une représentation minimale (1.31) ou (1.32), la liste des radicaux des idéaux primaires impliqués est exactement toute la liste des idéaux premiers associés du module $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I$ ou des idéaux homogènes premiers associés du module $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}$.*

DÉMONSTRATION. On admet ici ce résultat. Voir par exemple le théorème 6 (chapitre 4, section 6) et le théorème 9 (chapitre 4, section 7) de [CLO1], ainsi que les exercices 8-9-10 de cette même section 7. Tous les exercices de cette section 7 (page 209-210 de [CLO1]) sont d'ailleurs ici intéressants ; je vous les conseille, comme les exercices 1 à 4, 6 à 9 de la section 6, page 206, encore de [CLO1]. \square

Remarque 1.15. Il résulte de la proposition 1.10 que le radical de I (ou de \mathbb{I}) est exactement l'intersection de tous les idéaux premiers associés isolés (homogènes dans le second cas) du module $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I$ ou $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}$. Ceci précise les représentations (1.28) et (1.29).

1.7. La complexité de la décidabilité de l'appartenance à un idéal

Soit $I \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ un idéal engendré par un nombre fini de polynômes p_1, \dots, p_M ou \mathbb{I} un idéal homogène de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$, lui aussi donné par un nombre fini de générateurs, les polynômes homogènes P_1, \dots, P_M . Si q est un élément de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ (ou Q un polynôme homogène de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$), être à même de décider si $q \in (p_1, \dots, p_M)$ ou $Q \in (P_1, \dots, P_M)$ n'est pas en général chose facile.

Dans le cas affine par exemple, il faut se souvenir que, d'après le théorème de Noether-Lasker (théorème 1.6), l'idéal $I = (p_1, \dots, p_M)$ admet une représentation primaire minimale

$$I = \bigcap_{j=1}^K \mathfrak{Q}_j,$$

où $\bigcap_{\ell \neq j} \mathfrak{Q}_\ell \not\subset \mathfrak{Q}_j$ pour tout $j = 1, \dots, M$. La liste des radicaux des idéaux primaires \mathfrak{Q}_j , $j = 1, \dots, K$, est exactement la liste de tous les idéaux associés de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I$, idéaux associés isolés autant que idéaux associés « plongés » (proposition 1.10). Pour tester si $q \in I = (p_1, \dots, p_M)$, il convient par conséquent de tester si $q \in \mathfrak{Q}_j$ pour $j = 1, \dots, K$. Lorsque \mathfrak{Q}_j est un idéal premier isolé de $\text{Ass}(\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I)$, on peut espérer que pareil test puisse se faire de manière purement géométrique ; il n'en est en revanche pas de même lorsque \mathfrak{Q}_j est un idéal associé « plongé » ; en effet le sous-ensemble algébrique affine $V(\mathfrak{P}_j)$ se trouve dans ce cas plongé dans un sous-ensemble algébrique $V(\mathfrak{P})$ (où \mathfrak{P} est cette fois un idéal associé isolé de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I$), tout en étant de dimension strictement inférieure ; il est donc « géométriquement invisible », car ne saurait être apparent que le sous-ensemble algébrique « visible » $V(\mathfrak{P})$. Les mêmes considérations valent pour le test de l'appartenance d'un polynôme homogène P à un idéal homogène \mathbb{I} donné de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ se présentant comme représenté en

$$\mathbb{I} = \bigcap_{j=1}^K \mathfrak{P}_j,$$

où les \mathfrak{Q}_j sont des idéaux homogènes primaires tels que $\bigcap_{\ell \neq j} \mathfrak{Q}_\ell \not\subset \mathfrak{Q}_j$ pour tout $j = 1, \dots, K$. Ici encore, tous les idéaux homogènes associés (isolés autant que plongés) de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}$ sont à prendre en compte comme radicaux potentiels des idéaux primaires $\mathfrak{Q}_1, \dots, \mathfrak{Q}_K$.

1.7.1. La « tour » de Mayr-Meyer

C'est en 1982 que E. Mayr et A. Meyer ont construit dans [MayMey] (voir aussi [Swan]) une « tour » d'idéaux $(p_{D,1}, \dots, p_{D,10k+1}) \subset \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_{10k}]$ ($D, k \in \mathbb{N}$) de générateurs des binômes (c'est-à-dire des différences de deux monômes) suivant ce principe : pour chaque $D \in \mathbb{N}$ avec $D \geq 5$, pour chaque $k \geq 1$, $p_{D,k,1}, \dots, p_{D,k,10k+1}$ sont $10k+1$ binômes de degrés D en $10k$ variables X_1, \dots, X_{10k} tels que X_1 appartienne à l'idéal $(p_{D,k,1}, \dots, p_{D,k,10k+1})$, mais que toute représentation

$$X_1 = \sum_{j=1}^{10k+1} q_j(X_1, \dots, X_n) p_{D,k,j}(X_1, \dots, X_n)$$

nécessite au minimum

$$\max_{1 \leq j \leq 10k+1} \deg q_j \geq (D-2)^{2^{k-1}}.$$

Les bornes requises par l'explicitation de l'appartenance du polynôme X_1 à l'idéal $(p_{D,k,1}, \dots, p_{D,k,10k+1})$ (pourtant vraie) nécessitent des bornes inférieures doublement exponentielles (comme celles de l'algorithme de G. Hermann, voir (1.5)). Ce ne sont pas les bornes que l'on pourrait attendre si ce problème pouvait se gérer de manière géométrique et non purement algébrique.

C'est d'ailleurs l'exemple de Mayr-Meyer qui a retardé les résultats comme le résultat de D. Brownawell (théorème 1.3) à propos non plus de l'explicitation du test d'appartenance à l'idéal, mais cette fois de l'explicitation d'un problème de nature purement « géométrique », le théorème des zéros de Hilbert (théorème 1.1), où les bornes sont cette fois simplement et non plus doublement exponentielles (D^n au lieu de $D^{2^{n/10-1}}$). Quoi que l'on fasse, le problème de la décidabilité de l'appartenance d'un polynôme donné à un idéal de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ explicité en termes de ses générateurs nécessitera de telles bornes de degré lorsqu'il s'agira d'expliciter les formules. Ce sont évidemment les idéaux premiers associés « plongés » qui sont ici responsables de cet état de fait.

1.7.2. Le théorème d'Ehrenpreis-Palamodov, l'algèbre de Weyl et les opérateurs noëthériens

Si p est un polynôme en une variable

$$p(X) = a_0 X^d + a_1 X^{d-1} + \dots + a_d$$

à coefficients dans un corps \mathbb{K} de caractéristique 0, dire qu'un polynôme $q \in \mathbb{K}[X]$ est dans l'idéal principal (p^m) équivaut à dire que

$$\forall x \in \overline{\mathbb{K}}, (p(x) = 0) \implies \frac{d^\ell}{dX^\ell} [p](x) = 0 \quad (\ell = 0, \dots, m-1).$$

Le recours aux opérateurs différentiels fournit (lorsque \mathbb{K} est de caractéristique nulle) le moyen de tester l'appartenance d'un polynôme donné $q \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ à un idéal

(p_1, \dots, p_M) de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ donné, à condition bien sûr que l'on dispose de la connaissance des sous-ensembles de zéros $V(\mathfrak{P}_j)$ ($j = 1, \dots, K$) dans $\overline{\mathbb{K}}^n$ de tous les idéaux associés de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/(p_1, \dots, p_M)$ (idéaux associés isolés, mais aussi malheureusement idéaux associés « plongés »).

On introduit ici une algèbre graduée non commutative, l'*algèbre de Weyl*

$$\mathbb{K}\langle X_1, \dots, X_n, \partial/\partial X_1, \dots, \partial/\partial X_n \rangle.$$

DÉFINITION 1.16 (algèbre de Weyl). L'algèbre de Weyl

$$\mathbb{K}\langle X_1, \dots, X_n, \partial/\partial X_1, \dots, \partial/\partial X_n \rangle$$

sur un corps commutatif \mathbb{K} est l'algèbre non-commutative dont les éléments sont les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux

$$\Phi(X, \partial/\partial X) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq N}} a_\alpha(X_1, \dots, X_n) \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial X_1^{\alpha_1} \dots \partial X_n^{\alpha_n}}, \quad a_\alpha \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n].$$

Les X_j commutent entre eux, comme les $\partial/\partial X_k$, mais par contre, on a les règles

$$[\partial/\partial X_j, X_j] = -1, \quad [\partial/\partial X_j, X_\ell] = 0 \quad \text{si } \ell \neq j.$$

Remarque 1.16 (un outil important tant en algèbre qu'en géométrie différentielle). On retrouvera l'algèbre de Weyl plus loin dans ce cours : on peut la graduer de diverses manières (degré total en les X_j et les $\partial/\partial X_k$, bi-degrés en ces deux blocs de générateurs, etc.). En géométrie différentielle (géométrie de Lie par exemple) comme en analyse algébrique (théorie des \mathcal{D} -modules), cette algèbre de Weyl joue un rôle central. Bien que non-commutative, elle a, on le verra, sa place dans un cours d'Algèbre Commutative.

L'appartenance d'un polynôme q à un idéal p_1, \dots, p_M peut se faire suivant le test suivant, ce qui généralise ici l'exemple proposé en début de sous-section :

THEORÈME 1.7 (théorème d'Ehrenpreis-Palamodov [**Pal**]). *Soit \mathbb{K} un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Soit I un idéal de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. À chaque idéal primaire Ω_j (de radical un idéal premier associé \mathfrak{P}_j du module $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I$, tous les idéaux premiers associés de ce module étant balayés) d'une représentation minimale*

$$I = \bigcap_{j=1}^K \Omega_j$$

(théorème 1.10), on sait attacher une liste finie

$$\mathcal{L}_j := \{\Phi_{j,1}, \dots, \Phi_{j,\ell_j}\}$$

d'éléments de l'algèbre de Weyl $\mathbb{K}\langle X_1, \dots, X_n, \partial/\partial X_1, \dots, \partial/\partial X_n \rangle$ de manière à ce que

$$(1.33) \quad q \in I \iff \left(\forall j = 1, \dots, K, \forall \Phi \in \mathcal{L}_j, (\Phi[q])|_{V(\sqrt{\Omega_j})} \equiv 0 \right).$$

La liste concaténée des listes \mathcal{L}_j , $j = 1, \dots, K$, est dite liste d'opérateurs nœthériens attachés à l'idéal I .

DÉMONSTRATION. La démonstration de ce résultat repose sur l'algorithme de *préparation* (ou encore de *normalisation*) d'E. Noëther déjà exploité dans ce cours lors de la démarche guidant l'algorithme de Greta Hermann, puis lors de la *présentation* des sous-ensembles algébriques sous formes de revêtements (explicitation du degré d'un sous-ensemble algébrique affine ou projectif en termes du nombre de feuillets précisément de ce revêtement). On trouvera une preuve particulièrement didactique dans [Bjo], chapitre 8. Elle y est accompagnée du résultat qui l'accompagne, à savoir la représentation comme un « empilement » d'« exponentielle-polynômes solutions » des solutions C^∞ d'un système d'opérateurs différentiels à coefficients constants¹. \square

1.7.3. La notion de « syzigie » pour le $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ -module $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}$; le cas favorable « Cohen-Macaulay »

Si \mathbb{I} est un idéal homogène de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$, la recherche des relations entre des générateurs de \mathbb{I} se trouve totalement explicitée (au moins théoriquement) par l'existence d'une *résolution exacte* de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}$ en termes de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ module libre. L'ensemble de l'information ainsi fournit (aux divers crans de la suite exacte introduite) constitue les *syzygies* du module $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]/\mathbb{I}$. Nous allons dans cette section énoncer ce résultat important avant de l'illustrer par l'exemple de la *résolution de Koszul* dans la sous-section suivante.

On note ici \mathbf{R} le module gradué $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$, \mathbb{K} étant un corps commutatif. On note $\mathbf{R}(-d)$ (lorsque $d \in \mathbb{N}$) le module gradué isomorphe à \mathbf{R} et tel que $[\mathbf{R}(-d)]_j = \mathbf{R}_{j-d}$ pour $j \in \mathbb{Z}$ (rappelons que $\mathbf{R}_j = [\mathbf{R}(0)]_j$ désigne le \mathbb{K} -espace vectoriel des polynômes homogènes de degré j lorsque $j \geq 0$ et vaut 0 si $j < 0$).

Le *théorème des Syzygies* (Hilbert) assure qu'il est toujours possible de trouver une suite *exacte*² de \mathbf{R} -modules libres de longueur $L \leq n + 1$ de la forme suivante :

$$(1.34) \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{\ell=1}^{r_L} \mathbf{R}(-d_L^\ell) \xrightarrow{\varphi_L} \bigoplus_{\ell=1}^{r_{L-1}} \mathbf{R}(-d_{L-1}^\ell) \xrightarrow{\varphi_{L-1}} \dots \xrightarrow{\varphi_2} \bigoplus_{\ell=1}^{r_1} \mathbf{R}(-d_1^\ell) \xrightarrow{\varphi_1} \mathbf{R} \xrightarrow{\pi_{\mathbb{I}}} \frac{\mathbf{R}}{\mathbb{I}} \rightarrow 0.$$

Ici r_1, \dots, r_L sont des entiers, comme les d_j^ℓ et les applications φ_j sont des applications (polynomiales) de degré 0 entre modules gradués (les éléments homogènes de degré donné dans l'algèbre graduée source sont transformés en éléments homogènes de même degré dans l'algèbre graduée but). Une telle résolution est dite *minimale* lorsque l'image $\varphi_k(G_k)$ est incluse dans $(X_0, \dots, X_n)G_{k-1}$ lorsque l'on pose

$$G_k := \bigoplus_{\ell=1}^{r_k} \mathbf{R}(-d_k^\ell).$$

La longueur L d'une telle résolution est toujours supérieure ou égale à la co-dimension de $\mathbb{V}(\mathbb{I})$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ (soit $n - \dim(\mathbb{V}(\mathbb{I}))$). Lorsqu'il est possible de trouver une telle résolution de longueur précisément cette codimension, on dit que le module \mathbf{R}/\mathbb{I} est *Cohen-Macaulay*. Les modules *Cohen-Macaulay* sont essentiellement les seuls pour lesquels on puisse espérer que la résolution exacte soit « exploitable » par des outils

1. C'est la généralisation du célèbre *principe d'Euler* pour les solutions des EDO à coefficients constants dans le cadre $n = 1$.

2. L'image d'une flèche est égale au noyau de la flèche suivante.

géométriques ou analytiques¹. On en verra un exemple très important dans la sous-section suivante.

En théorie du moins, la connaissance d'une telle résolution permet d'expliciter en termes d'algèbre linéaire la décidabilité de l'appartenance d'un polynôme homogène Q à l'idéal \mathbb{I} , de calculer le polynôme de Hilbert du module gradué de type fini \mathbf{R}/\mathbb{I} , lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ de construire un courant T (forme différentielle à coefficients distributions) sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (à valeurs dans un fibré) tel que $Q \in \mathbb{I} \iff Q \cdot T = 0$ (on verra plus loin ce que cela signifie), etc. Mais seulement en théorie, car expliciter une telle résolution (1.34) s'avère dans bien des cas hors de portée.

1.7.4. Idéaux homogènes de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ engendrés par une suite régulière et complexe de Koszul

Si $m \leq n$ et que P_1, \dots, P_m désignent m polynômes homogènes de $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$, on construit un complexe ainsi. On pose

$$G_1 = \bigoplus_{j=1}^m \mathbf{R}(-\deg P_j) \vec{e}_j$$

($\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$ désigne une base formelle) et l'on considère ainsi G_1 comme un \mathbf{R} -module libre gradué. On définit un morphisme de \mathbf{R} -modules gradués (de degré 0) de G_1 dans \mathbf{R} en posant :

$$\varphi_1 = \jmath_P^{(1)} : r_1 \vec{e}_1 + \dots + r_m \vec{e}_m \mapsto r_1 P_1 + \dots + r_m P_m.$$

On pose $G_k = \bigwedge^k G_1$ et l'on définit de proche en proche une suite de morphismes $\varphi_k = \jmath_P^{(k)} : G_k \rightarrow G_{k-1}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \jmath_P^{(k+1)} \left(\left(\sum_{j=1}^m r_j \vec{e}_j \right) \wedge e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k} \right) &= \\ &= \left(\sum_{j=1}^m r_j P_j \right) e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k} - \sum_{j=1}^m r_j \vec{e}_j \wedge \jmath_P^{(k)}(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}). \end{aligned}$$

Si (P_1, \dots, P_m) définissent une intersection complète dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, ce qui signifie que la dimension du sous-ensemble algébrique projectif $\mathbb{V}((P_1, \dots, P_m))$ est exactement égale à $n - m$, le complexe

$$0 \rightarrow G_m \xrightarrow{\jmath_P^{(m)}} G_{m-1} \xrightarrow{\jmath_P^{(m-1)}} G_{m-2} \rightarrow \dots \xrightarrow{\jmath_P^{(2)}} G_1 \xrightarrow{\jmath_P^{(1)}} \mathbf{R} \rightarrow \frac{\mathbf{R}}{(P_1, \dots, P_m)} \rightarrow 0$$

est exact. On appelle ce complexe le *complexe de Koszul*.

Exemple 1.14 (les cas $n = 2$ et $n = 3$). On traitera ici à titre d'exemple les cas $m = 2$ et $m = 3$ (le cas général $m \leq n$ dans $\mathbf{R} = \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ s'en déduit suivant la même démarche). Si P_1 et P_2 sont deux polynômes homogènes tels que $\{x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}); P_1(x) = P_2(x) = 0\}$ soit de dimension $n - 2$, la suite (P_1, P_2) est régulière dans l'anneau local $\mathbb{A} : \mathbb{K}[X_0, \dots, X_{n+1}]_{(X_0, \dots, X_n)}$ (on localise sur l'idéal

1. Lorsque \mathbf{R}/\mathbb{I} est Cohen-Macaulay, tous les idéaux premiers associés sont isolés et la dimension de $\mathbb{V}(\mathbb{I})$ est pure. C'est le cas par exemple si $\mathbb{V}(\mathbb{I})$ est de dimension 0.

premier homogène (X_0, \dots, X_n) , ce qui signifie que P_2 n'est pas diviseur de 0 dans $\mathbb{A}/(P_1)$. Si

$$r_1 P_1 + r_2 P_2 = 0 \quad (r_1 \in \mathbf{R}, r_2 \in \mathbf{R})$$

dans \mathbf{R} , on a $\bar{r}_2 \bar{P}_2 = 0$ dans $\mathbb{A}/(\bar{P}_1)$ et par conséquent $\bar{r}_2 = 0$, soit $r_2 = u P_1$ avec $u \in \mathbf{R}$; on a donc

$$(r_1, r_2) = (-u P_2, u P_1)$$

pour un certain $u \in \mathbf{R}$. Or l'application $u \mapsto -u P_2 \bar{e}_1 + u P_1 \bar{e}_2$ est exactement la flèche $\mathbb{J}_P^{(2)}$ (qui est bien sûr injective). Pour le cas $m = 3$, on raisonne de manière identique. Si (P_1, P_2, P_3) définissent un sous-ensemble projectif de dimension $n - 3$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, la suite (P_1, P_2, P_3) est régulière dans l'anneau \mathbb{A} , par conséquent \bar{P}_3 n'est pas diviseur de 0 dans l'anneau quotient $\mathbb{A}/(P_1, P_2)$. Si

$$(1.35) \quad r_1 P_1 + r_2 P_2 + r_3 P_3 = 0$$

on a donc $\bar{r}_3 \bar{P}_3 = 0$, ce qui entraîne que $\bar{r}_3 = 0$, donc qu'il existe $r_{3,1}$ et $r_{3,2}$ dans \mathbf{R} tels que

$$r_3 = r_{3,1} P_1 + r_{3,2} P_2.$$

On a donc, en reportant dans (1.35) :

$$(r_2 + r_{3,2} P_3) P_2 = -(r_1 + r_{3,1} P_3) P_1.$$

Comme \bar{P}_2 n'est pas diviseur de 0 dans $\mathbb{A}/(P_1)$, on a $\bar{r}_2 + \bar{r}_{3,2} = 0$ modulo P_1 , ce qui implique qu'il existe $v \in \mathbf{R}$ tel que

$$r_1 = -r_{3,1} P_3 - v P_2, \quad r_2 = -r_{3,2} P_3 + v P_1, \quad r_3 = r_{3,1} P_1 + r_{3,2} P_2.$$

L'espace G_2 est justement de dimension $\binom{3}{2} = 3$ et l'on observe ici que ceci équivaut à dire que $r_1 \bar{e}_1 + r_2 \bar{e}_2 + r_3 \bar{e}_3$ est dans l'image de $\mathbb{J}_P^{(2)}$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_P^{(2)}(\alpha \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2) + \beta \bar{e}_2 \wedge \bar{e}_3 + \gamma \bar{e}_3 \wedge \bar{e}_1) &= \\ &= (\gamma P_3 - \alpha P_2) \bar{e}_1 + (\alpha P_1 - \beta P_3) \bar{e}_2 + (\beta P_2 - \gamma P_1) \bar{e}_3. \end{aligned}$$

(pendre $\alpha = v, \beta = r_{3,2}, \gamma = -r_{3,1}$). Le noyau de $\mathbb{J}_P^{(2)}$ s'obtient en résolvant

$$\gamma P_3 = \alpha P_2, \quad \alpha P_1 = \beta P_3, \quad \beta P_2 = \gamma P_1.$$

En utilisant le fait que \bar{P}_3 n'est pas un diviseur de 0 dans $\mathbb{A}/(P_2)$, que P_1 n'est pas un diviseur de 0 dans $\mathbb{A}/(P_3)$, que P_2 n'est pas un diviseur de 0 dans $\mathbb{A}/(P_1)$ (dans un anneau local une suite régulière pour un ordre l'est pour n'importe quel ordre), on obtient $\gamma = \lambda P_2, \alpha = \lambda P_3, \beta = \lambda P_1$. Or

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_P^{(3)}(\lambda \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 \wedge \bar{e}_3) &= \\ &= \lambda P_1 \bar{e}_2 \wedge \bar{e}_3 - \lambda \mathbb{J}_P^{(2)}[\bar{e}_2 \wedge \bar{e}_3] \\ &= \lambda P_1 \bar{e}_2 \wedge \bar{e}_3 - \lambda \bar{e}_1 \wedge (P_2 \bar{e}_3 - P_3 \bar{e}_2) \\ &= \lambda (P_3 \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 + P_1 \bar{e}_2 \wedge \bar{e}_3 + P_2 \bar{e}_3 \wedge \bar{e}_1). \end{aligned}$$

On retrouve bien le fait que l'image de $\mathbb{J}_P^{(3)}$ est le noyau de $\mathbb{J}_P^{(2)}$.

Le complexe de Koszul construit à partir d'une famille arbitraire de m polynômes homogènes lorsque $m > n + 1$ se termine toujours à gauche au pire en $n + 1$ puisque $m > n + 1$ polynômes homogènes en $n + 1$ variables sont automatiquement liés par une relation $\Phi(P_1, \dots, P_m) \equiv 0$, où $\Phi \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_m]$ (voir la section consacrée au théorème de Perron). La longueur de ce complexe ne saurait donc excéder $n + 1$. Ce complexe par contre n'est réellement intéressant et exploitable que lorsqu'il est exact, ce qui ne se produit que si $m \leq n + 1$ et que la suite (P_1, \dots, P_m) définit l'ensemble vide dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ (cas $m = n + 1$) ou un sous-ensemble algébrique projectif de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ de dimension $n - m$ (cas $1 \leq m \leq n$). Un tel complexe joue également un rôle important dans la théorie de Lie en géométrie différentielle.

CHAPITRE 2

Quelques éléments de géométrie pluri-complexe

2.1. Ouverts de \mathbb{C}^n , fonctions holomorphes et méromorphes

Dans cette section, U désigne un ouvert de $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$. Les coordonnées réelles $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ sont organisées en deux blocs en d'une part les coordonnées complexes $z_j = x_j + iy_j$ ($j = 1, \dots, n$), d'autre part leurs conjuguées $\bar{z}_j = x_j - iy_j$ ($j = 1, \dots, n$). Si les $2n$ coordonnées réelles sont bien « indépendantes », ce n'est pas le cas des $2n$ « fausses coordonnées » $z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ (\bar{z}_j est la conjuguée de z_j). Pourtant, les $2n$ « fausses coordonnées », $z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ joueront un rôle similaire à celui dévolu à de vraies coordonnées indépendantes ; il convient de voir $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ comme des « doubles » des z_j ($j = 1, \dots, n$) (on pourrait presque dire des « fantômes » car ces « doubles » seront traités comme des constantes dans les calculs de nature algébrique impliquant les champs de vecteurs $\partial/\partial z_j$ ($j = 1, \dots, n$)). Les champs de vecteurs sur \mathbb{C}^n appelés à jouer un rôle sont les n champs de vecteurs dits « holomorphes » :

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad j = 1, \dots, n,$$

et les n -champs de vecteurs complexes dits « antiholomorphes » :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad j = 1, \dots, n.$$

La pseudo-indépendance entre les z_j et leurs conjuguées mentionnée plus haut tient au fait que

$$\frac{\partial z_j}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial z_j} \equiv 0$$

dans un ouvert U de \mathbb{C}^n donné. Le vecteur

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \right)$$

est dit *vecteur des champs de Cauchy-Riemann*. Une place importante sera donnée dans ce qui suit au rôle des *distributions* dans les ouverts de $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

DÉFINITION 2.1 (fonction holomorphe). Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *holomorphe* dans U si et seulement si la fonction f est une fonction localement intégrable telle que la distribution T_f

$$T_f : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n) = C_{\text{support compact}}^\infty(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}) \longmapsto \int_{\mathbb{C}^n} f(\zeta) dx dy$$

vérifie

$$\frac{\partial T_f}{\partial \bar{z}} = 0$$

en tant que distribution dans U . Une telle fonction admet un représentant C^∞ (modulo les fonctions nulles $dxdy$ presque partout dans U) que l'on choisira bien sûr comme représentant de la fonction f . Toute distribution sur U telle que $\partial T/\partial \bar{z} = 0$ dans U en tant que distribution s'exprime d'ailleurs sous la forme $T = T_f$, où f est une fonction holomorphe (donc C^∞) au sens précédent.

Une formule capitale, de nature, on le verra, algébrique, gouverne la « rigidité » des fonctions holomorphes (au contraire de la « souplesse » des fonctions C^∞ (se prêtant par exemple au partitionnement de l'unité, ce que ne sauraient faire les fonctions holomorphes).

THEORÈME 2.1 (la formule de Cauchy). *Soit f une fonction holomorphe dans $D(0, r_1) \times \cdots \times D(0, r_n)$ ($r_j > 0$ pour $j = 1, \dots, n$), continue dans le produit de disques (polydisque) $\overline{D(0, 1)} \times \cdots \times \overline{D(0, r_n)}$. On a*

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \forall z \in D(0, r_1) \times \cdots \times D(0, r_n), \\ f(z) &= \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\{|\zeta_1|=r_1\} \times \cdots \times \{|\zeta_n|=r_n\}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{[0, 2\pi]^n} \frac{f(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n}) r_1 e^{i\theta_1} \cdots r_n e^{i\theta_n}}{(r_1 e^{i\theta_1} - z_1) \cdots (r_n e^{i\theta_n} - z_n)} d\theta_1 \cdots d\theta_n. \end{aligned}$$

C'est la formule de Cauchy, lorsque l'on utilise sous la représentation intégrale (2.1) les développements en série géométrique

$$\frac{1}{\zeta_j - z_j} = \frac{1}{\zeta_j} \frac{1}{1 - z_j/\zeta_j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_j^k}{\zeta_j^{k+1}} \quad (j = 1, \dots, n, |z_j| < |\zeta_j|)$$

qui permet d'identifier la classe des fonctions holomorphes dans U avec celle des fonctions analytiques complexes dans U .

DÉFINITION 2.2 (fonction analytique complexe dans un ouvert U de \mathbb{C}^n). Si U est un ouvert de \mathbb{C}^n , une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *analytique complexe* dans U si et seulement si, pour chaque $z_0 = (z_{0,1}, \dots, z_{0,n}) \in U$, il existe $r_{z_0,1} > 0, \dots, r_{z_0,n} > 0$ tels que :

- on ait $\Delta(z_0, \vec{r}_{z_0}) := D(z_0, r_{z_0,1}) \times \cdots \times D(z_0, r_{z_0,n}) \subset U$;
- on puisse écrire dans l'ouvert $\Delta(z_0, \vec{r}_{z_0})$

$$(2.2) \quad f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha(f, z_0) (z_1 - z_{0,1})^{\alpha_1} \cdots (z_n - z_{0,n})^{\alpha_n},$$

la série multiple ci-dessus étant normalement convergente sur tout compact de $\Delta(z_0, \vec{r}_{z_0})$.

Il est équivalent de dire que f est analytique complexe dans U et que f est holomorphe dans U ; de plus, on a alors

$$a_\alpha(f, z_0) = \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial \zeta_1^{\alpha_1} \cdots \partial \zeta_n^{\alpha_n}} [f](z_0),$$

le développement (2.2) étant appelé alors *développement de Taylor* de f au point z_0 .

C'est cette propriété d'*analyticité complexe* qui explique pourquoi la notion de fonction holomorphe relève presque de l'algèbre ; les séries entières représentant f au voisinage des points de U peuvent être considérées comme des fonctions polynomiales en les n variables $z_j - z_{0,j}$, mais cette fois de degré (total) infini et non plus fini comme l'est celui des polynômes en algèbre. Les contraintes de rigidité inhérentes à l'algèbre sont le plus souvent partagées par les fonctions holomorphes dans un ouvert de \mathbb{C}^n .

Une notion de *positivité* est étroitement liée à la notion d'holomorphie. Avec le fait que \mathbb{C} soit un corps algébriquement clos (au contraire de \mathbb{R}), le fait que \mathbb{C} et \mathbb{C}^n héritent de ce caractère de positivité constitue la raison pour laquelle la *géométrie complexe* s'avère souvent plus aisée que la *géométrie réelle* lorsqu'elle est exploitée en relation avec des questions d'algèbre commutative. En voici ici un avatar.

Soient f_1, \dots, f_n n fonctions holomorphes dans un ouvert de \mathbb{C}^n . Chaque f_j s'exprime sous la forme $f_j = \operatorname{Re} f_j + i \operatorname{Im} f_j$. Les $2n$ fonctions réelles $\operatorname{Re} f_1, \operatorname{Im} f_1, \dots, \operatorname{Re} f_n, \operatorname{Im} f_n$ sont des fonctions réelles C^∞ des $2n$ variables $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$. Le fait que $\partial f_j / \partial \bar{z} \equiv 0$ dans U pour $j = 1, \dots, n$ implique :

$$(2.3) \quad \det \left[\frac{\partial(\operatorname{Re} f_1, \operatorname{Im} f_1, \dots, \operatorname{Re} f_n, \operatorname{Im} f_n)}{\partial(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)} \right] = \left| \det \left[\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)} \right] \right|^2 \geq 0.$$

Cette positivité justifie par exemple (on l'exploite au niveau des morphismes de changement de cartes) qu'une variété analytique complexe de dimension n soit telle que la variété différentielle (réelle) de dimension $2n$ sous-jacente soit orientable ($\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ par exemple, ce pour tout n , alors que ce n'est pas le cas de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$).

Si U est un ouvert connexe de \mathbb{C}^n , l'anneau $\mathcal{H}(U)$ des fonctions holomorphes dans U est un anneau intègre. Les fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ qui s'expriment localement comme quotients de fonctions holomorphes sont dites *méromorphes*. Dans le cas $n = 1$, on sait que les fonctions méromorphes dans tout ouvert de \mathbb{C} constituent le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathcal{H}(U)$ (c'est le théorème de Weierstraß, voir par exemple [Y1], chapitre 3). Ceci n'est cependant plus vrai pour tous les ouverts de \mathbb{C}^n , mais seulement pour les ouverts dits *ouverts d'holomorphie* (\mathbb{C}^n , les produits de disques, entrent dans cette catégorie). Les ouverts d'holomorphie sont heuristiquement les ouverts dans lesquels vivent suffisamment de fonctions holomorphes¹ Si U est un ouvert connexe de \mathbb{C}^n , $\mathcal{M}(U)$ est bien un corps, mais c'est un corps en général plus gros que le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathcal{H}(U)$. Pour la notion d'ouvert d'holomorphie dans \mathbb{C}^n , consultez par exemple [Y2], chapitre 1.

2.2. Test de méromorphie et distributions

Les distributions fournissent un puissant outil pour tester si une fonction holomorphe dans le complémentaire d'une hypersurface d'un ouvert de \mathbb{C}^n peut ou non se prolonger en une fonction méromorphe dans cet ouvert.

1. Par exemple, en dimension $n > 1$, toute fonction holomorphe dans un ouvert U de la forme $U = V \setminus K$, où K est un compact inclus dans l'ouvert V , se prolonge grâce à la formule de Cauchy (on joue sur le fait qu'il y a au moins deux degrés de liberté) en une fonction holomorphe dans V tout entier ; il n'y a donc pas assez de fonctions holomorphes dans U , celles-ci se trouvant trop contraintes (c'est le phénomène de Hartogs, regardez par exemple l'exercice 3.59 de [Y1]).

Dans le cas $n = 1$, on sait qu'une fonction holomorphe f dans un ouvert privé d'une hypersurface (ici un ensemble de points isolés dans l'ouvert) se prolonge en une fonction méromorphe dans U si et seulement si les développements de Laurent de f en tous les points isolés en jeu sont tous tronqués à gauche, ce qui est équivalent à dire que $|f|$ reste bornée ou au pire tend vers $+\infty$ lorsque l'on s'approche d'un tel point. En revanche, si une fonction présente une singularité essentielle en l'un de ces points isolés (par exemple la fonction $z \mapsto \exp(1/z)$ en $z = 0$), il n'y a pas de prolongement méromorphe au voisinage d'un tel point. Dans \mathbb{C}^n , la situation est plus complexe, mais la théorie des distributions facilite le test de méromorphie.

PROPOSITION 2.1 (test de méromorphie via la boîte à outils « distributions »).
Soit h une fonction holomorphe dans un ouvert de \mathbb{C}^n et H le sous-ensemble fermé de U défini par¹

$$H := \{z \in U ; h(z) = 0\}.$$

Soit f une fonction holomorphe dans $U \setminus H$. On suppose qu'il existe une distribution T dans U telle que la restriction de T (au sens des distributions) à l'ouvert $U \setminus H$ soit égale à la distribution $[f]$ définie par f dans $U \setminus H$, ce qui signifie :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_U f(z) \varphi(z) dx dy \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(U \setminus H).$$

Alors la fonction f se prolonge en une fonction méromorphe dans U . Plus précisément, si $V \subset U$ est un ouvert de U relativement compact dans U , il existe une fonction g_V holomorphe dans V et un entier $N_V \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall z \in V, \quad f(z) = \frac{g_V(z)}{h^{N_V}(z)}.$$

DÉMONSTRATION. Comme f est holomorphe dans $U \setminus H$, le vecteur de distributions $\partial T / \partial \bar{z}$ (au sens des distributions dans U) est un vecteur de distributions dans U toutes nulles au sens des distributions dans l'ouvert $U \setminus H$. Les distributions composant ce vecteur sont toutes des distributions à support dans le sous-ensemble fermé $H = \{h = 0\}$ de U . Au voisinage d'un point quelconque z_0 de H , ces distributions ont un ordre fini majoré par $N(z_0)$ (leur évaluation sur une fonction test vivant près de z_0 n'implique pas de dérivation de la fonction test d'ordre strictement supérieur à $N(z_0)$). De plus, si V est un ouvert relativement compact de U , le fait que \bar{V} soit compact implique que $\sup_{z_0 \in \bar{V} \cap H} N(z_0) = N_V - 1 < +\infty$. On a donc, au sens des distributions dans V :

$$h^{N_V} \frac{\partial T}{\partial \bar{z}_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Ceci signifie :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(V), \quad \left\langle \frac{\partial T}{\partial \bar{z}_j}, h^{N_V} \varphi \right\rangle = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Comme

$$h^{N_V} \frac{\partial T}{\partial z_j} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} [h^{N_V} T] \quad (j = 1, \dots, n)$$

1. Un tel sous-ensemble est dit *hypersurface analytique de U* définie par une équation globale ; c'est un sous-ensemble fermé. On appelle plus généralement *hypersurface analytique de U* tout sous-ensemble fermé de U qui peut être au voisinage de chacun de ses points défini localement de la sorte.

(d'après la règle de Leibniz, puisque h est holomorphe), on en déduit que la distribution $h^{N_V}T$ est « tuée » par l'opérateur vectoriel de Cauchy-Riemann. Il en résulte (d'après la définition 2.1) que $h^{N_V}T$ est une distribution dans V définie par une fonction holomorphe g_V . La fonction f coïncide donc bien sur $V \setminus H$ avec la fonction g_V/h^{N_V} . Comme V est arbitraire, la fonction f s'écrit bien comme quotient de deux fonctions holomorphes au voisinage de tout point de U ; elle est donc bien méromorphe dans U . \square

C'est à un résultat d'algèbre commutative (basé sur un argument de noëthériannité : toute suite croissante de sous-modules dans un module noëthérien est stationnaire) que nous ferons appel pour prouver la réciproque de la proposition 2.1.

THEOREME 2.2 (théorème de I.N. Bernstein (1972) [**Bern**]). *Soit \mathbb{K} un corps commutatif de caractéristique nulle et $p \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Il existe un élément Φ de l'algèbre de Weyl $\mathbb{K}[T]\langle X_1, \dots, X_n, \partial/\partial X_1, \dots, \partial/\partial X_n \rangle$ et un polynôme b de $\mathbb{K}[T]$ tels que l'on ait, si λ désigne un paramètre formel transcendant sur \mathbb{K} , la relation algébrique formelle*

$$(2.4) \quad \Phi(\lambda, X)[p^{\lambda+1}] = b(\lambda)p^\lambda.$$

Plus généralement, si p_1, \dots, p_m sont m éléments de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, il existe m éléments Φ_1, \dots, Φ_m de l'algèbre de Weyl $\mathbb{K}[T_1, \dots, T_m]\langle X_1, \dots, X_n, \partial/\partial X_1, \dots, \partial/\partial X_n \rangle$, un élément b de $\mathbb{K}[T_1, \dots, T_m]$ tels que :

$$(2.5) \quad \Phi_j(\lambda_1, \dots, \lambda_m, X)[p_1^{\lambda_1} \dots p_j^{\lambda_j+1} \dots p_m^{\lambda_m}] = b(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \prod_{j=1}^m p_j^{\lambda_j}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Le générateur de l'idéal de $\mathbb{C}[T]$ constitué des polynômes b impliqués dans un jeu d'équations tel que (2.5) est dit polynôme de Bernstein-Sato de la famille de polynômes $\{p_1, \dots, p_m\}$. Le jeu d'identités (2.5) est dit jeu d'équations de Bernstein.

Ce théorème de Bernstein admet aussi, plus important encore, une version « locale » dans l'anneau local régulier $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ (de dimension n) des germes de fonctions holomorphes à l'origine. On note pour cela, si $T_1, \dots, T_m, z_1, \dots, z_n$ désignent $m+n$ variables, l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n, 0}[T_1, \dots, T_m]$ comme l'algèbre (non commutative) des germes en $(0, \dots, 0)$ d'opérateurs différentiels en z_1, \dots, z_n de la forme

$$\phi(T_1, \dots, T_m, z) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq N}} a_\alpha(T_1, \dots, T_m, z) \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}}$$

$$(a_\alpha \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_m]\{z_1, \dots, z_n\}),$$

où les a_α sont des polynômes en T_1, \dots, T_m à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$.

THEOREME 2.3 (théorème de J.E.Björk [**Bjo**], M. Kashiwara [**Ka**], C. Sabbah [**Sab**] et A. Gyoja [**Gyo**]). *Soient f_1, \dots, f_m m éléments de l'anneau local régulier $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$. Il existe m éléments ϕ_1, \dots, ϕ_m de l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n, 0}[T_1, \dots, T_m]$ et un polynôme*

$b \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_m]$ de la forme

$$b(T_1, \dots, T_m) = \prod_{j=1}^N (\alpha_{j,1} T_1 + \dots + \alpha_{j,n} T_n + \alpha_{j,0})$$

$$(\alpha_{j,0} \in \mathbb{N}^*, \alpha_{j,k} \in \mathbb{N} \text{ pour } k = 1, \dots, m)$$

tels que l'on ait formellement le jeu d'identités algébriques :

$$(2.6) \quad \phi_j(\lambda_1, \dots, \lambda_m, z)[f_1^{\lambda_1} \dots f_j^{\lambda_j+1} \dots f_m^{\lambda_m}] = b(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \prod_{j=1}^m f_j^{\lambda_j}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Le générateur de l'idéal de $\mathbb{C}[T_1, \dots, T_m]$ constitué des polynômes b impliqués dans un jeu d'équations tel que (2.6) est dit polynôme de Bernstein-Sato (pour m éléments) relatif à la donnée des (f_1, \dots, f_m) . Le jeu d'identités (2.6) est dit jeu d'équations de Bernstein.

Remarque 2.1 (aucune information sur la complexité algorithmique de la détermination des identités de Bernstein). La preuve des théorèmes 2.2 ou 2.3 repose sur un argument algébrique de noethériannité et n'est donc en rien (malheureusement) effective! La détermination du polynôme de Bernstein et des identités de Bernstein (2.5) ou (2.6) reste toujours aujourd'hui un challenge, même pour des polynômes ou des germes de fonctions analytiques à l'origine simples.

Remarque 2.2 (le cas des polynômes homogènes en $n+1$ variables X_0, \dots, X_n). Si P_0, \dots, P_m sont $m+1$ polynômes homogènes en X_0, \dots, X_n , l'existence d'un jeu d'équations de Bernstein de la forme (2.6) (lorsque l'on considère les germes à l'origine de \mathbb{C}^{n+1} des fonctions polynomiales homogènes $z \mapsto P_j(z_0, \dots, z_n)$) implique l'existence d'un jeu d'équations du type (2.6), mais cette fois avec

$$\Phi_j \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_m] \langle X_0, \dots, X_n, \partial/\partial X_0, \dots, \partial/\partial X_n \rangle$$

(les coefficients des Φ_j étant des polynômes en $T_1, \dots, T_m, X_0, \dots, X_n$ homogènes en (X_0, \dots, X_n)). Il suffit en effet d'isoler la partie homogène de degré convenable de la relation obtenue avec les opérateurs ϕ_j .

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la réciproque de la proposition 2.1 :

PROPOSITION 2.2 (inverses de polynômes ou de fonctions analytiques au sens des distributions). *Soit U un ouvert de \mathbb{C} et h une fonction holomorphe non identiquement nulle dans aucune des composantes connexes de U . Il existe une distribution $T_{1/h}$ dans U telle que $hT_{1/h} \equiv 1$ au sens des distributions dans U , ce qui implique que la restriction de toute fonction méromorphe f dans U au complémentaire de son lieu polaire¹ se prolonge (au sens des distributions) en une distribution T_f dans U tout entier. Si $U = \mathbb{C}^n$ et que h est une fonction polynomiale en z_1, \dots, z_n , la distribution $T_{1/h}$ ainsi construite est une distribution tempérée² dans \mathbb{R}^{2n} .*

1. Le sous-ensemble analytique fermé de U au voisinage des points duquel la fonction f n'est pas holomorphe.

2. On appelle *distribution tempérée sur \mathbb{R}^n* toute distribution qui, une fois relevée sur la sphère épointée $\mathbb{S}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ par la projection stéréographique inverse depuis le pôle nord $(0, \dots, 0, 1)$, se prolonge en une distribution sur la sphère \mathbb{S}^{n+1} toute entière. La transformation de Fourier réalise un isomorphisme de l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même. Cette construction

DÉMONSTRATION. On fait la preuve dans le cadre analytique. On introduit un paramètre complexe λ de partie réelle strictement supérieure à 1. On fixe $z_0 \in U$ et on note U_{z_0} un voisinage (arbitrairement petit) de z_0 . Si $\varphi \in \mathcal{D}(U_{z_0})$, la fonction

$$\lambda \mapsto \int_{U_{z_0}} |h(z)|^{2\lambda} \varphi(x, y) \, dx dy$$

est holomorphe dans $\{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$. On écrit formellement

$$\int_{U_{z_0}} |h(z)|^{2\lambda} \frac{\varphi(x, y)}{h(z)} \, dx dy = \int_{U_{z_0}} h^{\lambda-1} \bar{h}^\lambda \varphi(x, y) \, dx dy.$$

En utilisant la formule d'intégration par parties (on rappelle que la fonction test φ est à support compact, donc nulle hors d'un compact), on ré-exprime cette intégrale en exploitant l'identité de Bernstein (2.5) (écrite pour un seul germe, h , puis conjuguée) :

$$\begin{aligned} \int_{U_{z_0}} h^{\lambda-1} \bar{h}^\lambda \varphi(x, y) \, dx dy &= \frac{1}{b(\lambda)} \int_{U_{z_0}} h^{\lambda-1} \bar{h}^{\lambda+1} \bar{\phi}(\lambda, \bar{z}, -\partial/\partial\bar{z})[\varphi](x, y) \, dx dy = \\ &= \frac{1}{b(\lambda)} \int_{U_{z_0}} |h|^{2\lambda} \frac{\bar{h}}{h} \bar{\phi}(\lambda, \bar{z}, -\partial/\partial\bar{z})[\varphi](x, y) \, dx dy. \end{aligned}$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} \varphi \mapsto & \left[\frac{1}{b(\lambda)} \int_{U_{z_0}} |h|^{2\lambda} \frac{\bar{h}}{h} \bar{\phi}(\lambda, \bar{z}, -\partial/\partial\bar{z})[\varphi](x, y) \, dx dy \right]_{\lambda=0} \\ &= \frac{1}{b(0)} \int_{U_{z_0}} \frac{\bar{h}}{h} \bar{\phi}(0, \bar{z}, -\partial/\partial\bar{z})[\varphi](x, y) \, dx dy \end{aligned}$$

réalise une distribution $T_{1/h, z_0}$ dans U_{z_0} telle que $hT_{1/h, z_0} \equiv 1$ au sens des distributions dans U_{z_0} . Le principe du partitionnement de l'unité subordonné au recouvrement de U par les U_{z_0} ($z_0 \in U$), avec des fonctions C^∞ à support compact, permet de recoller les distributions $T_{1/h, z_0}$ obtenues localement en une distribution globale dans U tout entier. Cette distribution $T_{1/h}$ vérifie $hT_{1/h} \equiv 1$ dans U . Si $h = p$ ($U = \mathbb{C}^n$ alors) est une fonction polynomiale, on utilise l'identité algébrique (2.4) ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), après l'avoir conjugué ; il est possible que \bar{b} s'annule en 0, mais on calcule dans ce cas

$$\left[\frac{1}{\bar{b}(\lambda)} \int_{U_{z_0}} |p(z)|^{2\lambda} \frac{\overline{p(z)}}{p(z)} \bar{\Phi}(\lambda, \bar{z}, -\partial/\partial\bar{z})[\varphi](x, y) \, dx dy \right]_{\lambda=0}$$

comme le coefficient du terme λ^0 dans le développement de Laurent au voisinage de $\lambda = 0$ de la fonction dont on vient de prouver qu'elle se prolongeait en une fonction méromorphe dans un demi-plan $\operatorname{Re} \lambda > -\eta$:

$$\lambda \in \mathbb{C} \mapsto \int_{\mathbb{C}} |p(x, y)|^{2\lambda} \frac{\varphi(x, y)}{p(x, y)} \, dx dy.$$

Il s'agit d'une distribution tempérée sur $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. □

permet donc la construction d'une solution fondamentale tempérée $S(P(D)[F] = \delta_{(0, \dots, 0)})$ pour tout opérateur différentiel $P(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ à coefficients constants (agissant dans \mathbb{R}^n).

2.3. Formule de Cauchy et algorithme d'Euclide (en une variable)

Le but de cette section est de mettre en évidence que la formule de Cauchy (proposition 2.1) revêt un caractère *algébrique* autant qu'*analytique*. On l'interprètera ultérieurement comme une *formule de trace*.

Soient $p_1, p_2 \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes de degrés strictement positifs à coefficients complexes. Si $|z| \geq R$ (avec R assez grand), $p_1(z)p_2(z)$ ne s'annule pas et l'on a même $|p_1(z)p_2(z)| \simeq \kappa|z|^{d_1+d_2}$ ($d_1 = \deg p_1$, $d_2 = \deg p_2$) dans ce cas. On peut représenter la fonction constante $z \mapsto 1$ dans le disque $\{|z| < R\}$ grâce à la formule de Cauchy (2.1), puis transformer ainsi cette représentation (on note ici γ_R le chemin paramétré¹ $\theta \in [0, 1] \mapsto Re^{2i\pi\theta}$) :

(2.7)

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{p_1(\zeta)p_2(\zeta)}{p_1(\zeta)p_2(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{p_1(\zeta)p_2(\zeta) - p_1(z)p_2(z)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{p_1(\zeta)p_2(\zeta)} + \frac{p_1(z)p_2(z)}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{d\zeta}{p_1(\zeta)p_2(\zeta)(\zeta - z)}. \end{aligned}$$

À ce stade, nous allons utiliser la *formule des résidus*, elle aussi de nature à la fois algébrique et géométrique.

On rappelle tout d'abord ce qu'est le résidu en l'origine d'une 1-forme différentielle $f(z)dz$, où f désigne une fonction holomorphe dans $D(0, r) \setminus \{0\}$ pour un certain $r > 0$. D'après le théorème de Laurent (voir par exemple [Y1], chapitre 3), la fonction f admet dans le disque épointé $D(0, r) \setminus \{0\}$ un *développement de Laurent*

$$(2.8) \quad f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(f; 0) z^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f; 0) z^k$$

avec

$$a_k(f; 0) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta^{k+1}} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (0 < \rho < r, \gamma_\rho : \theta \in [0, 1] \mapsto \rho e^{2i\pi\theta}).$$

La première somme dans le membre de droite de (2.8) est convergente pour tout z tel que $|z| > 0$ (il y a d'ailleurs convergence normale sur toute couronne $\{|z| \geq \eta\}$ lorsque $\eta > 0$); on appelle sa somme $z \in \mathbb{C}^* \mapsto \sum_{k < 0} a_k(f; 0) z^k$ la *partie polaire* de f à l'origine. La deuxième somme dans le membre de droite de (2.8) est convergente pour tout $z \in D(0, r)$ (il y a d'ailleurs convergence normale sur tout disque fermé $\{|z| \leq \rho\}$ avec $0 < \rho < r$); on appelle sa somme $z \in D(0, r) \mapsto \sum_{k > 0} a_k(f; 0) z^k$ la *partie régulière* de f à l'origine. De tous les coefficients de Laurent $a_k(f; 0)$, le seul qui présente une robustesse géométrique² est le coefficient

$$a_{-1}(f; 0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho \circ \varphi^{-1}} f(\varphi(\zeta)) \varphi'(\zeta) d\zeta.$$

1. On dit encore 1-cycle du plan complexe affine $A_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

2. Au sens où il ne dépend que de la 1-forme $f(z)dz$ et reste inchangé si l'on remplace cette 1-forme par $f(\varphi(z))\varphi'(z)dz$, où φ est une transformation biholomorphe inversible telle que $\varphi(0) = 0$, c'est-à-dire en géométrie complexe un morphisme de changement de cartes.

Ce coefficient $a_{-1}(f; 0)$ ne dépendant que de la 1-forme $f(z)dz$ est noté

$$a_{-1}(f; 0) = \text{Res}_0[f(\zeta)d\zeta].$$

Outre son rôle *géométrique*, il joue un rôle majeur du point de vue *cohomologique* car il figure l'*obstruction à ce que la 1-forme fermée $f(z)dz$ soit une 1-forme exacte dans $D(0, r) \setminus \{0\}$* . En effet

$$f(z)dz = d\left[\sum_{k \leq -2} a_k(f; 0) \frac{z^{k+1}}{k+1} + \sum_{k \geq 0} a_k(f; 0) \frac{z^{k+1}}{k+1}\right] + \text{Res}_0[f(\zeta)d\zeta] \frac{dz}{z}$$

(on sait en effet que la forme dz/z , elle, n'est pas exacte dans $D(0, r) \setminus \{0\}$ car son intégrale sur le lacet γ_ρ lorsque $0 < \rho < r$ vaut $2\pi \neq 0$).

L'importance géométrique (et topologique) de la notion de *résidu* en géométrie complexe¹ est reflétée (par exemple) par la célèbre *formule des résidus*, dont on donne ici une *version topologique* : si $t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t)$ est un lacet continu à valeurs dans un ouvert *simplement connexe* U de \mathbb{C} (c'est-à-dire un ouvert dans lequel tout lacet continu peut être continument déformé en un lacet constant²) et si f est une fonction holomorphe dans $U \setminus \Lambda$, où Λ est un ensemble de points isolés dont aucun n'appartient à $\gamma([0, 1])$, alors

$$(2.9) \quad \int_\gamma f(\zeta) d\zeta = 2i\pi \sum_{\alpha \in \Lambda} \text{Res}_\alpha[f(\zeta)d\zeta] \times \text{Ind}(\gamma, \alpha).$$

L'indice $\text{Ind}(\gamma, \alpha)$ représente le nombre algébrique de tours que le lacet effectue autour de α et vaut $(1/2i\pi) \int_\gamma d\zeta/(\zeta - \alpha)$. Cet indice se calcule suivant une règle pratique simple (voir par exemple l'exercice 1.40 de [Y1] et son corrigé) : on « tire » une demi-droite depuis le point α et on examine les intersections de cette demi-droite avec $\gamma([0, 1])$: si le lacet γ (avec son sens de parcours) franchit la demi-droite dans le sens trigonométrique, on compte $+1$; sinon on compte -1 , puis on fait le bilan des ± 1 ainsi obtenus pour chaque point d'intersection de la demi-droite avec le support $\gamma([0, 1])$ du lacet. Dans le membre de droite de la formule (2.9), seul un nombre fini de points α de l'ensemble Λ sont à prendre en compte (seulement ceux pour lesquels $\text{Ind}(\gamma, \alpha) \neq 0$). Vous pouvez vous référer au chapitre 3 de [Y1] pour ces divers rappels concernant l'analyse complexe en une variable.

Reprenons maintenant notre formule (2.7). Si l'on utilise l'identité remarquable

$$A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \dots + AB^{k-2} + B^{k-1}) \quad (k \in \mathbb{N})$$

(qui demeure l'une des plus importantes de toute l'algèbre commutative, même s'il s'agit d'une identité immédiate), on observe que la fonction

$$(\zeta, z) \in \mathbb{C}^2 \mapsto \frac{p_1(\zeta)p_2(\zeta) - p_1(z)p_2(z)}{\zeta - z}$$

est en fait une fonction polynomiale en les deux variables ζ et z . En appliquant la formule des résidus avec le lacet γ_R , l'ouvert $U = \mathbb{C}$, l'ensemble $\Lambda = V(p_1) \cup V(p_2)$

1. C'est à Henri Poincaré que l'on doit sa mise en évidence.
2. Concrètement cela veut dire « un ouvert sans trous ».

union des zéros de p_1 et des zéros de p_2 , et la fonction

$$\zeta \in \mathbb{C} \setminus (V(p_1) \cup V(p_2)) \mapsto \frac{p_1(\zeta)p_2(\zeta) - p_1(z)p_2(z)}{\zeta - z} \frac{1}{p_1(\zeta)p_2(\zeta)},$$

(z est ici vue comme une constante complexe fixée), on trouve (on rappelle que l'on a supposé que $V(p_1) \cap V(p_2) = \emptyset$) :

$$\begin{aligned} (2.10) \quad & \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{p_1(\zeta)p_2(\zeta) - p_1(z)p_2(z)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{p_1(\zeta)p_2(\zeta)} = \\ & = \sum_{\alpha \in V(p_1) \cup V(p_2)} \operatorname{Res}_\alpha \left[\frac{p_1(\zeta)p_2(\zeta) - p_1(z)p_2(z)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{p_1(\zeta)p_2(\zeta)} \right] \\ & = \sum_{\alpha \in V(p_1)} \operatorname{Res}_\alpha \left[\frac{p_1(\zeta)p_2(\zeta) - p_1(z)p_2(z)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{p_1(\zeta)p_2(\zeta)} \right] \\ & \quad + \sum_{\alpha \in V(p_2)} \operatorname{Res}_\alpha \left[\frac{p_1(\zeta)p_2(\zeta) - p_1(z)p_2(z)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{p_1(\zeta)p_2(\zeta)} \right] \\ & = \sum_{\alpha \in V(p_1)} \operatorname{Res}_\alpha \left[\frac{p_1(z)p_2(z)}{z - \zeta} \frac{d\zeta}{p_1(\zeta)p_2(\zeta)} \right] + \sum_{\alpha \in V(p_2)} \operatorname{Res}_\alpha \left[\frac{p_1(z)p_2(z)}{z - \zeta} \frac{d\zeta}{p_1(\zeta)p_2(\zeta)} \right] \\ & = p_2(z) \sum_{\alpha \in V(p_1)} \operatorname{Res}_\alpha \left[\frac{p_1(z)}{z - \zeta} \frac{d\zeta}{p_1(\zeta)p_2(\zeta)} \right] + p_1(z) \sum_{\alpha \in V(p_2)} \operatorname{Res}_\alpha \left[\frac{p_2(z)}{z - \zeta} \frac{d\zeta}{p_1(\zeta)p_2(\zeta)} \right] \\ & = p_1(z) q_1(z) + p_2(z) q_2(z), \end{aligned}$$

où q_1 et q_2 sont des polynômes de degrés respectifs au plus $d_2 - 1 = \deg p_2 - 1$ et $d_1 - 1 = \deg p_1 - 1$. Si maintenant on fixe z et que l'on fait tendre R vers l'infini dans la formule de Cauchy transformée (2.7), on observe que

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{d\zeta}{p_1(\zeta)p_2(\zeta)(\zeta - z)} \right| \leq 2\pi R \times \frac{1}{\kappa R^{d_1+d_2}(R - |z|)} = o(1)$$

lorsque R tend vers l'infini. On déduit bien ainsi au final de la formule de représentation intégrale (2.7) (donc en fait de la formule de Cauchy utilisée ici pour la représentation de la fonction constante égale à 1) l'identité polynomiale

$$1 = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

que nous aurait aussi fourni l'algorithme d'Euclide « étendu » (celui qui non seulement donne le PGCD de p_1 et p_2 dans $\mathbb{C}[X]$, ici 1, mais aussi l'expression du PGCD dans l'idéal engendré par p_1 et p_2 dans $\mathbb{C}[X]$). On voit donc ici le rôle « algébrique » que vient de jouer une formule que l'on pensait être une formule d'analyse, à savoir la formule de Cauchy.

2.4. De la formule de Cauchy à celle de Cauchy-Weil (cadre local)

En 1935, André Weil a proposé dans [Weil] une variante de la formule de Cauchy (2.1) dans le cadre multi-variables ($n > 1$). C'est cette variante que nous allons introduire ici en soulignant le caractère avant tout « algébrique » (oubliant un instant l'analyse, on verra qu'il s'agira en fait de ce que l'on appelle en algèbre commutative

une *formule de trace*). Dans cette section, nous allons introduire une version locale de la formule de Cauchy-Weil, dans l'anneau local régulier $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ des germes de fonctions holomorphes à l'origine. Nous reviendrons plus tard sur une version globale de cette même formule (par exemple dans $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$).

2.4.1. Le cas particulier d'une variable complexe (cadre local)

Dans un premier temps, nous allons effectuer la transformation conduisant de la formule de Cauchy à la variante proposée par André Weil dans le cadre des fonctions d'une variable complexe ($n = 1$). On considère ici une fonction $f : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe dans le disque ouvert $D(0, R)$ et non identiquement nulle, mais s'annulant en 0. On peut donc écrire

$$f(z) = a_\nu z^\nu \times \left(1 + \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} z + \frac{a_{\nu+2}}{a_\nu} z^2 + \dots\right) = a_\nu z^\nu (1 + O(|z|)) \quad (a_\nu \in \mathbb{C}^*)$$

au voisinage de l'origine; l'entier $\nu \geq 1$ est par définition la *valuation* de f en 0 ou encore la *multiplicité* de 0 comme zéro isolé de f . Le sous-ensemble

$$\{z \in D(0, R); |f(z)| = r\}$$

se présente donc, lorsque r est suffisamment petit, comme une déformation du cercle $\{|z| = |a_\nu|^{1/\nu} r^{1/\nu}\}$. C'est d'ailleurs une sous-variété différentielle du plan de dimension 1 (une courbe sans point singulier) puisque f' ne s'annule pas sur $\{|f(z)| = r\}$ pourvu que $r > 0$ soit assez petit. Soit h une fonction holomorphe dans $D(0, R)$. D'après la formule de Cauchy (2.1), on a, pour tout r tel que $|a_\nu|^{1/\nu} r^{1/\nu} < R$, soit $r < R^\nu / |a_\nu|$,

$$h(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=|a_\nu|^{1/\nu} r^{1/\nu}} h(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Nous allons utiliser ici le fait que lorsque deux lacets continus $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ et $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ tracés dans un même ouvert de \mathbb{C} sont homotopes dans cet ouvert¹ et que ω est une 1-forme différentielle de classe C^1 fermée dans V (par exemple $\omega = g(z) dz$ avec g holomorphe dans V), alors

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

En utilisant ce résultat, on voit que, pourvu que $|z|$ soit suffisamment petit (en fonction de r) :

$$(2.11) \quad h(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=|a_\nu|^{1/\nu} r^{1/\nu}} h(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|f(\zeta)|=r} h(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

(ici le 1-cycle $\{|f| = r\}$ désigne le lacet de support² la courbe lisse fermée $\{|f| = r\}$ que l'on parcourt juste une seule fois dans le sens trigonométrique).

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat suivant :

1. Ceci signifie que l'on peut déformer continument le lacet γ_0 en le lacet γ_1 , tous les lacets intermédiaires γ_s ($s \in [0, 1]$ désignant ici le paramètre de déformation) restant tracés dans l'ouvert V ; vous pouvez par exemple consulter la section 1.4.2 de [Y1].

2. Le *support* d'un chemin $t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{C}$ est par définition le sous-ensemble $\gamma([0, 1])$ du plan complexe.

PROPOSITION 2.3 (formule de Cauchy-Weil locale en une variable). *Soit*

$$f : z \in D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$$

une fonction holomorphe s'annulant à l'origine. Pour $r \in]0, R[$ suffisamment petit, on peut représenter au voisinage de l'origine toute fonction holomorphe dans $D(0, R)$ par

$$(2.12) \quad \begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|f(\zeta)|=r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} h(\zeta) \frac{d\zeta}{f(\zeta) - f(z)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{|f(\zeta)|=r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} h(\zeta) \frac{d\zeta}{f^{k+1}(\zeta)} \right) f^k(z). \end{aligned}$$

De plus les deux formules de représentation ci-dessus (la formule de représentation intégrale et sa version algébrique « développée ») restent valables dans toute la composante connexe de l'ouvert $\{|f| < r\}$ contenant l'origine.

Remarque 2.3. Dans le cas où $f(z) = z$, la formule de représentation intégrale (pour h) figurant comme première ligne de (2.11) est la formule de Cauchy (2.1); sa forme développée est juste la formule de Taylor (2.2). Dans le cas d'une fonction holomorphe f plus générale mais s'annulant encore en 0, la représentation intégrale (pour h) figurant comme première ligne de (2.11) est dite *formule de représentation intégrale de Cauchy-Weil*, tandis que sa version développée est dite *développement de Bergman-Weil de h suivant les puissances de la fonction f au voisinage de l'origine* (ou encore dans l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$).

DÉMONSTRATION. La première ligne de (2.12) est juste une relecture de la formule de représentation intégrale obtenue depuis la formule de Cauchy en (2.11) : en effet, si $|f(\zeta)| = r$ et $|f(z)| < r$ (ce qui revient à dire que z est assez voisin de 0), $\zeta \mapsto f(\zeta) - f(z)$ ne s'annule pas sur le contour d'intégration $\{\zeta; |f(\zeta)| = r\}$; la division par $f(\zeta) - f(z)$ que l'on a opéré sous l'intégrale est donc licite. La formule développée s'obtient juste en remarquant que

$$(2.13) \quad \frac{1}{f(\zeta) - f(z)} = \frac{1}{f(\zeta)} \times \frac{1}{1 - f(z)/f(\zeta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(z)}{f^{k+1}(\zeta)}$$

lorsque $|f(z)| < |f(\zeta)|$ (développement de $1/(1-x)$ lorsque $|x| < 1$). Comme la convergence (en ζ) de la série figurant au second membre de (2.13) est normale sur $\{|f(\zeta)| = r\}$ lorsque z est fixé tel que $|f(z)| < r$, on peut intervertir sommation et prise d'intégrale, ce qui donne bien le développement explicité en seconde ligne de (2.12). \square

2.4.2. Le cas de n variables complexes (cadre local)

Nous considérons maintenant, au lieu d'une fonction holomorphe

$$f : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$$

présentant un zéro isolé en 0, n fonctions holomorphes f_1, \dots, f_n dans la boule euclidienne de \mathbb{C}^n :

$$B_n(0, R) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; \|z\|^2 < R\}$$

telles que les germes f_1, \dots, f_n des fonctions f_j à l'origine forment une suite régulière dans l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$. Ceci signifie que l'application

$$(z_1, \dots, z_n) \in B_n(0, R) \mapsto (f_1(z_1, \dots, z_n), \dots, f_n(z_1, \dots, z_n))$$

présente un zéro isolé en l'origine.

Si tel est le cas, le jacobien

$$J_f = \det \left[\frac{\partial f_j}{\partial z_k} \right]_{1 \leq j, k \leq n}$$

peut certes s'annuler à l'origine¹, mais il ne peut en aucun cas être identiquement nul. Sinon, on aurait $df_1 \wedge \dots \wedge df_n \equiv 0$ au voisinage de l'origine et la suite (f_1, \dots, f_n) ne pourrait plus être régulière; en effet les fonctions f_j seraient alors liées entre elles par une relation $\phi(f_1, \dots, f_n) \equiv 0$, où ϕ serait une fonction analytique de n variables non identiquement nulle au voisinage de l'origine.

Comme f_1, \dots, f_n, J_f sont $n+1$ fonctions holomorphes en seulement n variables (il y a donc une fonction de plus qu'il n'y a de paramètres), il existe par contre certainement une relation analytique non triviale ($\Phi \neq 0$ comme fonction analytique de n variables w_1, \dots, w_{n+1} et Φ ne dépend pas seulement des variables w_1, \dots, w_n car les germes de fonctions f_1, \dots, f_n définissant une suite régulière dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ ne sauraient, eux, être liés) de la forme

$$(2.14) \quad \Phi(f_1(z_1, \dots, z_n), \dots, f_n(z_1, \dots, z_n), J_f(z_1, \dots, z_n)) \equiv 0$$

au voisinage de l'origine² dans \mathbb{C}^n .

Pour tout $r_1 > 0, \dots, r_n > 0$ tels que $\sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2} = r < R$ avec r suffisamment petit, la composante connexe $C(r_1, \dots, r_n)$ contenant l'origine de l'ouvert

$$\{z \in B_n(0, R); |f_j(\zeta)| < r_j \quad j = 1, \dots, n\}$$

est un sous-ensemble ouvert relativement compact dans $B_{2n}(0, R)$ (vous pouvez le vérifier aisément en exercice). Le sous-ensemble

$$\Gamma_{r_1, \dots, r_n} := \{\zeta \in \overline{C}_{r_1, \dots, r_n}; |f_1(\zeta)| = r_1, \dots, |f_n(\zeta)| = r_n\}$$

n'est évidemment pas la frontière³ de cette composante connexe C_{r_1, \dots, r_n} , sauf si $n = 1$; ce n'en est, lorsque $n > 1$ qu'une toute petite partie : la frontière devrait être de dimension $2n - 1$ comme hypersurface réelle de \mathbb{R}^{2n} , alors que l'ensemble Γ_{r_1, \dots, r_n} n'est, on le verra, que de dimension réelle $n < 2n - 1$. On appelle Γ_{r_1, \dots, r_n} la *frontière de Shilov* de la « boîte » ouverte C_{r_1, \dots, r_n} . Par exemple, la frontière de Shilov du produit de disques $D(0, r_1) \times \dots \times D(0, r_n) \subset \mathbb{C}^n$ ($n > 1$) est le produit de cercles

1. Si ce jacobien J_f ne s'annule pas à l'origine, on peut effectuer un changement de variables holomorphe dans \mathbb{C}^n au voisinage de l'origine d'après le théorème d'inversion locale, ce qui nous permet de considérer f_1, \dots, f_n comme de nouvelles applications coordonnées (w_1, \dots, w_n) et nous ramène, on s'en doute, à une situation facile à gérer puisque l'on sait déjà le faire en une variable (nous l'avons fait dans la sous-section précédente).

2. On invoque ici le même argument que celui que nous avons invoqué pour justifier l'existence de la relation polynomiale $\Phi(p_1, \dots, p_{n+1}) \equiv 0$ ($p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_N]$) sur le sous-espace algébrique affine $V \subset A_N(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^N$ de dimension n lors de la preuve du théorème de Perron (théorème 1.4, voir en particulier la remarque 1.7 dans le cas particulier où $N = n$ et $V = A_n(\mathbb{K})$).

3. En exercice, décrivez la vraie frontière de C_{r_1, \dots, r_n} .

$\{|\zeta_1| = r_1\} \cdots \times \cdots \times \{|\zeta_n| = r_n\}$; à propos, quelle est la frontière d'un tel produit de disques? Faites l'exercice.

Le fait qu'il existe une relation analytique (2.14) liant les fonctions f_1, \dots, f_n et leur jacobien J_f au voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^n implique que, pour tout choix des nombres réels $r_1 > 0, \dots, r_n > 0$ avec $\sqrt{r_1^2 + \cdots + r_n^2} = r$ avec $r < R$ suffisamment petit et (r_1, \dots, r_n) hors d'un sous-ensemble de mesure de Lebesgue nulle de $]0, R[^n$, le jacobien J_f ne s'annule en aucun point de Γ_{r_1, \dots, r_n} (faites encore l'exercice pour vous en convaincre¹). Par conséquent, cet ensemble Γ_{r_1, \dots, r_n} (qui est défini au voisinage de l'origine par les n équations réelles $|f_j| = r_j$) hérite d'une structure de sous-variété différentielle réelle de dimension réelle $2n - n = n$ de $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$. Cette sous-variété différentielle² Γ_{r_1, \dots, r_n} (compacte) est donc orientable (puisque plongée dans la variété orientable \mathbb{R}^{2n}) et on convient de l'orienter de manière à ce que la n -forme différentielle

$$d(\arg(f_1)) \wedge \cdots \wedge d(\arg(f_n))$$

soit une *forme volume* (c'est-à-dire une forme que l'on décrète « positive »). Cela donc un sens d'intégrer une n forme différentielle définie dans un de ses voisinages ouverts dans \mathbb{R}^{2n} (par exemple une forme $\phi d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$, où ϕ est continue dans ce voisinage) sur cette sous-variété différentielle n -dimensionnelle Γ_{r_1, \dots, r_n} ³.

Pour chaque $j = 1, \dots, n$, la fonction

$$(\zeta, z) \in B_n(0, R) \times B_n(0, R) \longmapsto f_j(\zeta) - f_j(z)$$

est une fonction holomorphe des $2n$ variables complexes

$$(\zeta_1, \dots, \zeta_n, z_1, \dots, z_n) = (\zeta, z).$$

1. Il y a aussi un important résultat de géométrie différentielle dû à A. Sard (dit *lemme de Sard*, 1942, voir par exemple [HY], section 1.3), qui assure en géométrie différentielle que l'ensemble des *valeurs critiques* d'une application F de classe C^∞ de $U \subset \mathbb{R}^{N_1}$ dans \mathbb{R}^{N_2} constitue un sous-ensemble de l'espace but \mathbb{R}^{N_2} de mesure de Lebesgue nulle. Un *point critique* de F est un point $x \in U \subset \mathbb{R}^{N_1}$ où le rang de l'application linéaire tangente $T_x F$ est strictement inférieur à N_2 ; une *valeur critique* de F est par définition l'image d'un point critique (les valeurs critiques sont donc dans l'espace-but, les points critiques étant, eux, dans l'espace-source). Le lemme de Sard est le pendant en géométrie différentielle du *théorème de Bertini* en géométrie algébrique. On aurait pu ici aussi invoquer le lemme de Sard.

2. On peut la paramétrer localement en considérant f_1, \dots, f_n comme des coordonnées complexes locales (dans \mathbb{C}^n) au voisinage d'un de ses points (J_f ne s'y annule pas, c'est donc licite), puis en utilisant les arguments $\arg(f_1), \dots, \arg(f_n)$ de ces coordonnées complexes locales comme coordonnées locales réelles cette fois sur la sous-variété Γ_{r_1, \dots, r_n} au voisinage du point considéré.

3. L'ensemble Γ_{r_1, \dots, r_n} , ainsi considéré comme une sous-variété compacte orientée de $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ de dimension réelle n , est ce que l'on appelle un *n -cycle réel analytique* (les équations le définissant, ici $|f_j|^2 - r_j^2 = 0$ pour $j = 1, \dots, n$, s'expriment en effet en termes de fonctions non pas analytiques complexes, mais analytiques réelles). Comme dans le cas des chemins paramétrés, c'est le paramétrage que l'on considère comme un cycle. Vous pouvez par exemple regarder [HY], section 3.7, à propos des notions de « chaîne » et de « cycle » en géométrie différentielle (en remplaçant cependant ici C^∞ par *réel analytique*).

On a de plus, d'après le théorème fondamental de l'analyse¹ :

(2.15)

$$\begin{aligned} f_j(\zeta) - f_j(z) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [f_j(z + t(\zeta - z))] dt = \sum_{k=1}^n (\zeta_k - z_k) \int_0^1 \frac{\partial f_j}{\partial \zeta_k}(z + t(\zeta - z)) dt \\ &= \sum_{j=1}^n (\zeta_k - z_k) g_{j,k}(\zeta, z), \end{aligned}$$

où les fonctions

$$g_{j,k} : (\zeta, z) \in B_n(0, R) \times B_n(0, R) \longmapsto \int_0^1 \frac{\partial f_j}{\partial \zeta_k}(z + t(\zeta - z)) dt \quad (1 \leq j, k \leq n)$$

sont encore des fonctions holomorphes en les $2n$ variables (ζ, z) dans le produit de boules $B_n(0, R) \times B_n(0, R)$ ².

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la version locale de la formule de Cauchy-Weil dans le cadre de n variables complexes. C'est la généralisation naturelle de la proposition 2.3.

THEORÈME 2.4 (formule de Cauchy-Weil en n variables, version locale). *Soit*

$$f = (f_1, \dots, f_n) : (z_1, \dots, z_n) \in B_n(0, R) \rightarrow \mathbb{C}^n$$

un vecteur de n applications holomorphes dans $B_n(0, R)$ tels que les germes (f_1, \dots, f_n) des f_j dans l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ définissent une suite régulière, ce qui signifie que l'origine est un zéro commun isolé pour les fonctions f_1, \dots, f_n dans la boule euclidienne $B_n(0, R)$. Soient $g_{j,k}$, $1 \leq j, k \leq n$, des fonctions holomorphes en les $2n$ variables

1. C'est-à-dire $F(1) - F(0) = \int_0^1 dF = \int_0^1 F'(t) dt$ lorsque F est une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$, ce qui est la formulation géométrique élémentaire du *théorème de Stokes* en une variable; en deux variables, ce résultat devient la formulation élémentaire de la *formule de Green-Riemann* (théorème de Stokes en deux variables), à savoir

$$\int_{\partial_+ \Delta_2} (Pdx + Qdy) = \iint_{\Delta_2} d[Pdx + Qdy] := \iint_{\Delta_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

lorsque Δ désigne le triangle plein fermé (on dit aussi *simplexe*) de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $\partial_+ \Delta_2$ son bord orienté dans le sens trigonométrique et que P, Q sont de classe C^1 dans Δ_2 ; et ainsi de suite en dimension supérieure (le tétraèdre Δ_3 à la place du triangle en dimension 3 avec cette fois une 2-forme au lieu de la 1 forme $Pdx + Qdy$ et l'on obtient alors la *formule de Green-Ostrogradski*, etc.)... Si \mathcal{X} est une variété différentielle de dimension (réelle) k , orientable (donc munie d'une k -forme volume définie globalement), et si $U \subset \mathcal{X}$ est un ouvert relativement compact de bord lisse par morceaux (ce bord pouvant donc être considéré comme une sous-variété lisse de dimension réelle $k - 1$), alors, pour toute $(k - 1)$ -forme ω de classe C^1 sur \bar{U} , on a

$$\int_{\partial U} \omega = \int_U d\omega$$

(le bord étant orienté en cohérence avec l'orientation choisie pour \mathcal{X} , donc pour U , suivant l'habitude règle du bonhomme d'Ampère). Pour les versions plus générales avec les ℓ -chaines ($\ell \leq k$), vous pouvez par exemple regarder [HY], section 3.5.7.

2. Il existe bien sûr d'autres choix pour les fonctions holomorphes $g_{j,k}$ en les variables (ζ, z) de manière à satisfaire les identités (2.15) que celui qui est fait ici, mais nous en avons au moins explicité un, ce qui pour nous sera important.

(ζ, z) dans $B_n(0, R) \times B_n(0, R)$, telles que
(2.16)

$$f_j(\zeta) - f_j(z) = \sum_{k=1}^n (\zeta_k - z_k) g_{j,k}(\zeta, z), \quad j = 1, \dots, n, \quad (\zeta, z) \in B_n(0, R) \times B_n(0, R).$$

On note Δ la fonction holomorphe dans $B_n(0, R) \times B_n(0, R)$ définie comme le déterminant de la matrice (n, n) dont les entrées sont précisément les fonctions $g_{j,k}$ (pour $1 \leq j, k \leq n$) :

$$\Delta := \det ([g_{j,k}]_{1 \leq j, k \leq n}).$$

Pour $r_1 > 0, \dots, r_n > 0$ tels que $\sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2} = r < R$ soit suffisamment petit (et que (r_1, \dots, r_n) soit pris hors d'un sous-ensemble de $]0, R[^n$ de mesure de Lebesgue nulle), toute fonction h holomorphe dans $B_n(0, R)$ se représente au voisinage de l'origine sous la forme

$$(2.17) \quad \begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_{r_1, \dots, r_n}} \Delta(\zeta, z) h(\zeta) \bigwedge_{j=1}^n \frac{d\zeta_j}{f_j(\zeta) - f_j(z)} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_{r_1, \dots, r_n}} \Delta(\zeta, z) h(\zeta) \bigwedge_{j=1}^n \frac{d\zeta_j}{f_j^{\alpha_j+1}(\zeta)} \right) f_1^{\alpha_1}(z) \dots f_n^{\alpha_n}(z). \end{aligned}$$

De plus les deux formules de représentation ci-dessus (la formule de représentation intégrale et sa version algébrique « développée ») restent valables dans l'unique composante connexe relativement compacte $C_{r_1, \dots, r_n} \subset\subset B_n(0, R)$ (contenant l'origine) de l'ouvert

$$\{\zeta \in B_n(0, R) ; |f_1(\zeta)| < r_1, \dots, |f_n(\zeta)| < r_n\}.$$

DÉMONSTRATION. On renvoie la preuve complète de ce résultat à une section ultérieure. On remarque tout de même ici que la formule « développée » figurant en seconde ligne de (2.17) se déduit de la formule intégrale figurant en première ligne en développant sous l'intégrale les expressions

$$\frac{1}{f_j(\zeta) - f_j(z)} = \frac{1}{f_j(\zeta)} \times \frac{1}{1 - f_j(z)/f_j(\zeta)} = \sum_{\alpha_j=0}^{\infty} \frac{f_j^{\alpha_j}(z)}{f_j^{\alpha_j+1}(\zeta)}$$

et en justifiant ensuite l'interversion entre sommation et prise d'intégration sur le cycle analytique réel Γ_{r_1, \dots, r_n} . La formule développée obtenue ici s'appelle encore un *développement de Bergman-Weil du germe de h au voisinage de l'origine, relativement cette fois à l'idéal \mathfrak{M} -primaire (f_1, \dots, f_n) de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ ($\mathfrak{M} = (z_1, \dots, z_n)$ désignant l'unique idéal maximal de cet anneau local). \square*

Remarque 2.4. Lorsque f_1, \dots, f_n sont les fonctions coordonnées z_1, \dots, z_n , la formule de Cauchy-Weil est la formule de Cauchy (2.1) et sa version développée correspond au développement de Taylor (2.2). Il est important de noter, comme dans le cas $n = 1$, que tous les germes à l'origine des fonctions

$$z \longmapsto \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_{r_1, \dots, r_n}} \Delta(\zeta, z) h(\zeta) \bigwedge_{j=1}^n \frac{d\zeta_j}{f_j^{\alpha_j+1}(\zeta)}$$

intervenant comme « coefficients » dans le développement de Bergman-Weil sont en fait indépendants du choix de r_1, \dots, r_n , pourvu toutefois que $\sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2} = r < R$ soit assez petit et que l'on ait évité le sous-ensemble de mesure nulle de $]0, R[^n$ qu'il convenait d'éviter ; ceci résulte de la formule de Stokes ¹. On pourra donc par la suite noter, comme dans la formule de Taylor (correspondant au cas particulier $f_j(z) = z_j$, $j = 1, \dots, n$) :

$$a_\alpha(h; I) : z \mapsto \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_{r_1, r_2, \dots, r_n}} \Delta(\zeta, z) h(\zeta) \bigwedge_{j=1}^n \frac{d\zeta_j}{f_j^{\alpha_j+1}(\zeta)},$$

ce qui donne l'expression « condensée » du développement de Bergman-Weil d'un germe $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ par rapport à l'idéal \mathfrak{M} -primaire $I = (f_1, \dots, f_n)$:

$$(2.18) \quad h(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha(h; I)[z] f_1^{\alpha_1}(z) \dots f_n^{\alpha_n}(z)$$

dans l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. Le fait que la suite (f_1, \dots, f_n) soit quasi-régulière ² implique que, pour chaque $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la classe modulo (f_1, \dots, f_n) du germe à l'origine de

$$z \mapsto a_\alpha(h; I)[z]$$

ne dépend que de h et de I , mais non du choix des fonctions $g_{j,k}$ réalisant les identités (2.16).

2.5. La preuve du théorème de Briançon-Skoda dans l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$

Dans cette section, nous allons voir comment la formule de Cauchy-Weil (théorème 2.4) permet de donner une preuve du théorème de Briançon-Skoda (théorème 1.2) dans le cas de l'anneau régulier $\mathbb{A} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ (de dimension n) des germes de fonctions holomorphes en n variables à l'origine de \mathbb{C}^n . Comme elle repose sur la formule de représentation intégrale de Cauchy-Weil (ou plutôt sur le développement de Bergman-Weil des germes de fonctions holomorphes énoncé en seconde ligne de (2.17) et reformulé plus simplement en (2.18)), il s'agit d'une preuve reposant curieusement (pour une part) sur des arguments d'analyse. Ce modèle de preuve, repris par J. Lipman et B. Teissier dans un cadre plus algébrique [LT], mais directement copié de la démarche analytique, se transposerait au cadre plus général de tous les anneaux locaux réguliers (voir [LS]). L'originalité de la preuve que nous donnons ici (c'est la raison pour laquelle nous la présentons dans ce cours d'algèbre commutative) est précisément qu'il

1. On le laisse ici en exercice, mais voici une indication : fixez d'abord (r_1, r_2, \dots, r_n) et (r'_1, r_2, \dots, r_n) et montrez que l'on a l'égalité

$$\frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_{r_1, r_2, \dots, r_n}} \Delta(\zeta, z) h(\zeta) \bigwedge_{j=1}^n \frac{d\zeta_j}{f_j^{\alpha_j+1}(\zeta)} = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_{r'_1, r_2, \dots, r_n}} \Delta(\zeta, z) h(\zeta) \bigwedge_{j=1}^n \frac{d\zeta_j}{f_j^{\alpha_j+1}(\zeta)}$$

en utilisant la formule de Stokes sur la sous-variété de dimension réelle $n+1$ définie comme la frontière de Shilov de la composante connexe contenant l'origine de

$$\{\zeta \in B_n(0, R) ; |f_2(\zeta)| < r_2, \dots, |f_n(\zeta)| < r_n\},$$

puis continuez en « libérant » les r_j ($j = 2, \dots, n$) les uns après les autres.

2. Ou régulière, ce qui revient au même ici, car nous sommes dans un anneau local.

s'agit de la preuve d'un résultat profond (et relativement difficile) d'algèbre commutative s'appuyant en partie sur des méthodes directement issues de l'analyse ou de la géométrie complexes.

THEORÈME 2.5 (théorème de Briançon-Skoda dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ ¹). *Soit I un idéal de l'anneau local régulier $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ (qui est bien un anneau local régulier de dimension n). On a la chaîne d'inclusions :*

$$(2.19) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \overline{I^{n+k-1}} \subset I^k.$$

DÉMONSTRATION. La première observation consiste à montrer que, pour prouver le théorème, on peut se ramener à prouver la chaîne d'inclusions (2.19) pour un idéal contenant une puissance de l'idéal maximal \mathfrak{M} , c'est-à-dire un idéal engendré dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ par un nombre fini d'éléments g_1, \dots, g_M tels que le germe de l'ensemble analytique $V(g_1, \dots, g_M)$ soit réduit à l'origine (lorsque $I = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, la chaîne d'inclusions (2.19) se réduit à une chaîne d'égalités, tous les idéaux en jeu étant égaux à l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ tout entier). Pour cela, on utilise le *théorème de Krull* suivant lequel

$$I = \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}^*} (I + \mathfrak{M}^\ell),$$

auquel cas

$$(2.20) \quad I^{n-1+k} = \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}^*} (I + \mathfrak{M}^\ell)^{n-1+k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Si l'on prend les clôtures intégrales des deux membres de (2.20), il vient

$$\overline{I^{n-k+1}} \subset \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}^*} \overline{(I + \mathfrak{M}^\ell)^{n+k-1}}.$$

Si l'on prouve

$$\overline{(I + \mathfrak{M}^\ell)^{n+k-1}} \subset (I + \mathfrak{M}^\ell)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^*,$$

on donc prouvé la chaîne d'inclusion (2.20) une fois que l'on a observé que

$$\bigcap_{\ell \in \mathbb{N}^*} (I + \mathfrak{M}^\ell)^k \subset \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}^*} (I^k + \mathfrak{M}^\ell) = I^k.$$

On peut donc supposer que $I = (g_1, \dots, g_M)$, où tous les idéaux associés du module noëthérien de type fini $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/I$ sont tels que la dimension de Krull de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/\mathfrak{P}$ soit égale à 0 (les germes g_1, \dots, g_M définissent comme lieu de leurs zéros communs l'origine de \mathbb{C}^n comme zéro isolé).

Pour poursuivre la preuve, nous invoquerons le lemme suivant :

1. Il ne s'agit pas ici de la preuve (vraiment, elle, tout-à-fait analytique) proposée par J. Briançon et H. Skoda en 1972 [BriS] et qui repose sur les méthodes L^2 introduites par L. Hörmander [Hor] en analyse pluricomplexe (voir aussi [Dem], chapitre 8 ou [Y2], section 4.3), mais cette fois d'une preuve inspirée directement de celle de J. Lipman et B. Teissier [LT], d'obédience tout de même plus algébrique que la preuve originelle de [BriS]; c'est précisément cette preuve « analytico-algébrique » que l'on peut adapter au cadre d'un anneau local régulier de dimension n à la place de l'anneau particulier $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ que nous traitons ici. Derrière la preuve purement analytique de [BriS], on voit pointer cependant une notion algébrique, celle d'*idéal multiplicateur*, suscitant un fort regain d'intérêt aujourd'hui dans les questions transverses à l'algèbre commutative locale et à la géométrie analytique complexe [Laz] (volume II, part III).

LEMME 2.1 (réduction des idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ ¹). Soit I un idéal de l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ engendré par un nombre fini de générateurs, g_1, \dots, g_M avec $M \geq n$. Pour un choix générique de coefficients $\lambda_{j,k}$ ($j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, M$), il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\frac{\|g(z)\|}{K} \leq \|f(z)\| \leq K \|g(z)\|$$

au voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^n , où $f = (f_1, \dots, f_n)$ avec

$$f_j := \sum_{k=1}^M \lambda_{j,k} g_k.$$

Autrement dit, les deux idéaux $(g_1, \dots, g_M)^k$ et $(f_1, \dots, f_n)^k$ ont même clôture intégrale dans l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, ce pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

PREUVE DU LEMME 2.1. Vous trouverez une preuve de ce lemme dans [Dem] (chapitre VIII, lemme 10.3). Nous nous contentons de la donner ici brièvement uniquement dans le cas où g_1, \dots, g_M définissent l'origine comme zéro isolé. On introduit dans $v \times (\mathbb{P}^{M-1})^n$ (où v désigne un voisinage suffisamment petit de l'origine dans \mathbb{C}^n dans lequel on a choisi des représentants pour les germes g_j) le sous ensemble \mathscr{W} des points $(z, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que

$$\sum_{k=1}^M \lambda_{j,k} g_k = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (\lambda_j := [\lambda_{j,1} : \dots : \lambda_{j,M}])$$

et π la projection $(z, \lambda) \in \mathscr{W} \rightarrow z \in v$. Pour $z \neq 0$, la fibre $\pi^{-1}(\{z\})$ est un produit de n hyperplans projectifs dans $(\mathbb{P}^{M-1})^n(\mathbb{C})$. L'ensemble $\mathscr{W}^* = \mathscr{W} \setminus \pi^{-1}(\{(0, \dots, 0)\})$ se présente donc comme un fibré (en sous-espaces projectifs) qui a donc pour rang $n(M-1) - n = n(M-2)$ au dessus de v ; son adhérence $\overline{\mathscr{W}^*}$ dans $v \times (\mathbb{P}^{M-1}(\mathbb{C}))^n$ coïncide avec l'union des composantes irréductibles de l'ensemble analytique \mathscr{W} qui ne sont pas entièrement contenues dans $\{(0, \dots, 0)\} \times (\mathbb{P}^{M-1}(\mathbb{C}))^n$; cette adhérence $\overline{\mathscr{W}^*}$ a toujours pour dimension $n + n(M-2) = n(M-1)$. Il en résulte que le sous-ensemble algébrique de $\{(0, \dots, 0)\} \times (\mathbb{P}^{M-1}(\mathbb{C}))^n \simeq (\mathbb{P}^{M-1}(\mathbb{C}))^n$ défini comme $\overline{\mathscr{W}^*} \cap (\{(0, \dots, 0)\} \times (\mathbb{P}^{M-1}(\mathbb{C}))^n)$ est un sous-ensemble algébrique propre de la fibre $\pi^{-1}(\{(0, \dots, 0)\})$. Choisissons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (de manière générique) de manière à ce que $(0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ n'appartienne pas à ce sous-ensemble algébrique propre. Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit (au moins en tout cas pour que $B_n(0, \epsilon) \subset v$, mais plus petit encore), les ensembles

$$\overline{\mathscr{W}^*} \cap (\overline{B_n(0, \epsilon)} \times (\mathbb{P}^{M-1}(\mathbb{C}))^n)$$

et

$$B_n(0, \epsilon) \times \{[\xi_1]; d_{\text{proj}}(\lambda_1, \xi_1) < \epsilon\} \times \dots \times \{[\xi_n]; d_{\text{proj}}(\lambda_n, \xi_n) < \epsilon\}$$

1. Ce lemme constitue un cas particulier d'un résultat plus général (dans un anneau local noethérien \mathbb{A} régulier de dimension n). Étant donné un idéal I de \mathbb{A} , on appelle *réduction de I* tout idéal $J \subset I$ tel que $I^{k+1} = I^k J$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Si J est une réduction de I , I^k et J^k ont même clôture intégrale pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Le nombre minimal de générateurs d'une réduction J de l'idéal I est appelé *analytic spread* de I ; c'est la dimension de l'anneau quotient $\mathbb{I}/\mathfrak{M}\mathbb{I}$, où $\mathbb{I} = \bigoplus_{k \geq 0} (I^k)^k \subset \mathbb{A}[T]$; cette dimension (donc le nombre minimal de générateurs d'un idéal J tel que les clôtures intégrales de I^k et J^k dans \mathbb{A} coïncident pour tout $k \in \mathbb{N}^*$) est donc majorée par la dimension n de l'anneau local \mathbb{A} .

se retrouvent donc être disjoints dans $v \times (\mathbb{P}^{M-1}(\mathbb{C}))^n$ (on utilise juste pour justifier ceci un argument de compacité). On en déduit que

$$\max_{1 \leq j \leq n} \left(\left| \sum_{k=1}^M \lambda_{j,k} g_k(z) \right| \right) \geq \|g(z)\| \quad \forall z \in B_n(0, \epsilon).$$

Si en effet tel n'était pas le cas pour z_0 fixé dans $B_n(0, \epsilon) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, on pourrait, pour chaque $j = 1, \dots, n$, trouver $\eta_j = (\eta_{j,1}, \dots, \eta_{j,M}) \in \mathbb{C}^M$ tel que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_{j,k} g_k(z_0) = \sum_{k=1}^M \eta_{j,k} g_k(z_0) \iff \sum_{k=1}^n (\lambda_{j,k} - \eta_{j,k}) g_k(z_0) = 0$$

avec $\|\eta_j\| < \epsilon$. On en déduirait que

$$(z_0, \lambda_1 - [\eta_1], \dots, \lambda_n - [\eta_n])$$

appartiendrait à la fois à

$$\overline{\mathcal{W}^*} \cap \overline{(B_n(0, \epsilon) \times (\mathbb{P}^{M-1}(\mathbb{C}))^n)}$$

et à l'intersection des boules ouvertes

$$B_n(0, \epsilon) \times \{[\xi_1]; d_{\text{proj}}(\lambda_1, \xi_1) < \epsilon\} \times \dots \times \{[\xi_n]; d_{\text{proj}}(\lambda_n, \xi_n) < \epsilon\}.$$

Comme cette intersection est vide, on obtient bien une contradiction. Il suffit donc de choisir $K > \max |\lambda_{j,k}|$ et $K > 1/\epsilon$ (soit $1/K < \epsilon$) pour conclure. \square

Reprenons ici la preuve du théorème 2.5. D'après le théorème de Krull et le lemme 2.1, on peut se ramener au cas où l'idéal I est engendré exactement par n générateurs f_1, \dots, f_n tels que les f_j (pour $j = 1, \dots, n$) définissent comme lieu de leurs zéros communs au voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^n le point $(0, \dots, 0)$ comme un point isolé (ce qui est équivalent à dire que la suite (f_1, \dots, f_n) est quasi-régulière dans l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$, voir la définition 1.4 ou encore, puisqu'il s'agit d'un anneau local, au fait que cette suite, prise dans un ordre arbitraire, soit régulière, voir la définition 1.3, ou bien encore à ce que le complexe de Koszul, voir la sous-section 1.7.4, construit à partir de f_1, \dots, f_n soit exact).

Supposons que h soit dans la clôture intégrale de l'idéal I^{n-k+1} . Il existe alors, d'après l'argument utilisé pour prouver que (1) \implies (2) dans l'exemple 1.3, une constante $C > 0$ telle que

$$|h(z)| \leq C \|f(z)\|^{n-k+1}$$

au voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^n . Nous allons montrer que dans ce cas, tous les germes de fonctions

$$z \mapsto a_\alpha(h; I)[z], \quad (\alpha \in \mathbb{N}^n, \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k-1)$$

intervenent comme « germes coefficients » dans le développement de Bergman-Weil (2.18) sont nuls; comme le germe de

$$z \mapsto h(z) - \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k-1}} a_\alpha(h; I)[z] f_1^{\alpha_1}(z) \dots f_n^{\alpha_n}(z)$$

appartient clairement à $(f_1, \dots, f_n)^k$ puisque l'on dispose précisément du développement de Bergman-Weil (2.18), on en déduira que $h \in I^k$ et l'inclusion

$$\overline{I^{n-k+1}} \subset I^k$$

sera ainsi établie. Pour calculer chaque germe $a_\alpha(h; I)$, on peut choisir une suite $(\vec{r}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de nombres strictement positifs tendant vers $(0, \dots, 0)$ de manière à ce que les trois clauses suivantes soient remplies.

- (1) Le vecteur \vec{r}_ℓ n'appartient pas au sous-ensemble (de mesure de Lebesgue n -dimensionnelle nulle) qu'il convient d'éviter pour que le n -cycle $\Gamma_{\vec{r}_\ell}$ intervenant dans la formule de représentation intégrale de Cauchy-Weil (2.17) demeure une sous-variété différentielle (en fait analytique réelle) compacte de dimension réelle n (sur laquelle l'intégration des n -formes différentielles est par conséquent licite).
- (2) Le volume n -dimensionnel $\text{vol}_n(\Gamma_{\vec{r}_\ell})$ de la sous-variété différentielle n -dimensionnelle compacte $\Gamma_{\vec{r}_\ell}$ tend vers 0 lorsque ℓ tend vers l'infini.
- (3) Il existe une constante positive κ telle que

$$(2.21) \quad \forall \ell \in \mathbb{N}, \quad \forall 1 \leq j, k \leq n, \quad \frac{1}{\kappa} \leq \frac{r_{\ell,j}}{r_{\ell,k}} \leq \kappa.$$

La première clause est aisée à réaliser car il convient juste d'éviter que \vec{r}_ℓ appartienne à un sous-ensemble de mesure de Lebesgue n -dimensionnelle nulle. Les seconde et troisième clauses sont réalisables simultanément avec la première si l'on invoque le fait que la fonction

$$(2.22) \quad (r_1, \dots, r_n) \mapsto \text{vol}_n(\Gamma_{\vec{r}})$$

(définie $dr_1 \dots dr_n$ presque partout sur $]0, r[^n$ pourvu que r soit assez petit) est intégrable sur $]0, r[^n$ et telle que

$$(2.23) \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\rho_1 + \dots + \rho_n = r} \text{vol}_n(\Gamma_{\vec{\rho}}) d\rho_1 \dots d\rho_n = 0.$$

Ces deux derniers résultats (l'intégrabilité de la fonction (2.22) ainsi que (2.23)) découlent juste du théorème de Fubini (il s'agit de la *formule de la coaire* en géométrie différentielle, voir par exemple [KRP], section 5.2).

Compte-tenu des encadrements (2.21), on obtient les majorations (pour z voisin de l'origine dans \mathbb{C}^n) :

$$\begin{aligned} |a_\alpha(h; I)[z]| &= \frac{1}{(2\pi)^n} \left| \int_{\Gamma_{\vec{r}_\ell}} \Delta(z, \zeta) h(\zeta) \bigwedge_{j=1}^n \frac{d\zeta_j}{f_j^{\alpha_j+1}(\zeta)} \right| \\ &\leq \frac{\tilde{C} r_{1,\ell}^{n-1+k}}{\tilde{\kappa} r_{1,\ell}^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n + n}} \text{vol}_n(\Gamma_{\vec{r}_\ell}) \quad (\ell \in \mathbb{N}^*), \end{aligned}$$

où les constantes \tilde{C} et $\tilde{\kappa}$ sont des constantes positives dépendant de C, κ et de la majoration de $|\Delta|$ au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}_\zeta^n \times \mathbb{C}_z^n$. En faisant tendre ℓ vers l'infini, on obtient bien $a_\alpha(h; I)[z] \equiv 0$, ce que l'on voulait¹. \square

1. On retrouve dans cet argument le célèbre argument qui, en une variable, permet de démontrer le *théorème fondamental de l'algèbre*, à savoir le *théorème de d'Alembert* suivant lequel tout polynôme

Le théorème de Briançon-Skoda dans le cadre de l'anneau local régulier $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ des germes de fonctions holomorphes à l'origine (théorème 2.5) a des conséquences importantes en géométrie analytique complexe. Avant d'en énoncer une, on donne ici la définition de l'idéal jacobien d'un germe de fonction holomorphe.

DÉFINITION 2.3 (idéal jacobien d'un germe de fonctions holomorphe à l'origine). Soit $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, supposé non nul. On appelle *idéal jacobien du germe f* l'idéal $\text{Jac}(f)$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ engendré par les germes à l'origine des n dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Remarque 2.5 (singularité isolée et nombre de Milnor). Lorsque l'idéal jacobien d'un germe $f \in \mathfrak{M} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ est tel que le germe d'ensemble analytique

$$V(\text{Jac}(f)) := \{z; h(z) = 0 \quad \forall h \in \text{Jac}(f)\} = \{z : \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n\}$$

se réduit à $\{(0, \dots, 0)\}$, ce qui revient à dire que la suite $(\partial f / \partial z_1, \dots, \partial f / \partial z_n)$ est régulière dans l'anneau local régulier $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, on dit que le germe d'hypersurface analytique $\{z; f(z) = 0\}$ présente une *singularité isolée* à l'origine¹. Le \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} / \text{Jac}(f)$ est alors de dimension finie et sa dimension est appelée *nombre de Milnor* du germe d'hypersurface à singularité isolée $f^{-1}(0)$.

PROPOSITION 2.4 (idéal jacobien et clôture intégrale). *Pour tout germe f dans l'idéal maximal \mathfrak{M} de l'anneau local régulier $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ (de dimension n), on a $f \in \text{Jac}(f)$ et, par conséquent, si l'on invoque le théorème 2.5, $f^n \in \text{Jac}(f)$.*

DÉMONSTRATION. La preuve repose sur l'implication (3) \implies (1) (que nous avons pour l'instant admise) dans les diverses caractérisations équivalentes de l'appartenance d'un élément à la clôture intégrale d'un idéal I de l'anneau local régulier $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ (voir l'exemple 1.3). Soit $\gamma : D(0,1) \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{C}^n$ avec $\gamma(0) = 0$. La règle de Leibniz du calcul différentiel implique

$$\frac{d}{dt}[f \circ \gamma](t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial z_j}(\gamma(t)) \gamma'_j(t).$$

La valuation $\nu_0(f \circ \gamma)$ en $t = 0$ de $f \circ \gamma$ est donc au moins égale au minimum des valuations $\nu_0((\partial f / \partial z_j) \circ \gamma)$ pour $j = 1, \dots, n$, donc au minimum des valuations $\nu_0(h \circ \gamma)$, où $h \in \text{Jac}(f)$. Il en résulte bien que $f \in \overline{\text{Jac}(f)}$, d'où le résultat annoncé. \square

$p \in \mathbb{C}[X]$ de degré strictement positif admet au moins une racine complexe : si ce n'était pas le cas, la fonction $z \mapsto 1/p(z)$ serait une fonction holomorphe dans \mathbb{C} bornée partout en module et l'on majorerait en module ses coefficients de Taylor $a_k(1/p; 0)$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$) par :

$$|a_k(1/p; 0)| = \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{1}{p(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta^{k+1}} \right| \leq \frac{\sup_{\mathbb{C}} |1/p|}{R^k}.$$

En faisant tendre R vers l'infini, on obtiendrait $a_k(1/p; 0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, d'où l'on déduirait $1/p \equiv a_0(1/p; 0)$, ce qui contredirait l'hypothèse $\deg p > 0$. La preuve (dans un contexte autrement plus complexe) que nous venons de faire ici demeure basée sur ce même principe, originellement dû à J. Liouville.

1. Dans ce cas en effet, l'ouvert $\{z; f(z) = 0\} \setminus \{(0, \dots, 0)\} = [f^{-1}(0)]^{\text{reg}}$ de $f^{-1}(0)$ est une sous variété analytique complexe de dimension complexe $n - 1$ plongée dans un voisinage épointé de l'origine dans \mathbb{C}^n .

2.6. Les « formules de trace » en algèbre commutative

2.6.1. Les formules de Cauchy-Weil (2.17) et (2.18) revisitées

Reprenons la situation étudiée dans la sous-section 2.4.2, mais en adoptant non plus cette fois un point de vue *local*, mais un point de vue *semi-local*¹.

Soient donc f_1, \dots, f_n n fonctions holomorphes en n variables $z = (z_1, \dots, z_n)$ dans la boule euclidienne $B_n(0, r)$ ($r > 0$) de \mathbb{C}^n . On supposera ces n fonctions continues dans $\overline{B_n(0, r)}$, telles que

$$\{z \in \overline{B_n(0, r)}; f_1(z) = \dots = f_n(z) = 0\} = \{(0, \dots, 0)\}.$$

Cette hypothèse signifie que les n fonctions présentent l'origine comme seul zéro commun (donc isolé) dans la boule euclidienne fermée $\overline{B_n(0, r)}$. La suite (f_1, \dots, f_n) est donc une suite quasi-régulière (définition 1.4) de l'anneau commutatif intègre $\mathcal{H}(B_n(0, r))$ des fonctions holomorphes dans la boule euclidienne ouverte $B_n(0, r)$. Au voisinage de l'origine, il existe, on l'a vu, une relation analytique

$$(2.24) \quad \Phi(f_1, \dots, f_n, J_f) \equiv 0$$

où J_f désigne le déterminant de la matrice des $\partial f_j / \partial z_k$, $1 \leq j, k \leq n$. On peut supposer Φ irréductible et $\Phi(w_1, \dots, w_n, 0) \neq 0$ au voisinage de l'origine dans \mathbb{C}_w^n . Quitte à choisir r suffisamment petit, on peut supposer que la relation de dépendance (2.24) reste valable dans toute la boule euclidienne fermée $\overline{B_n(0, r)}$.

On a par hypothèses, pour une certaine constante $\kappa > 0$:

$$\forall \zeta \in \partial(B_n(0, r)) = \{\zeta \in \mathbb{C}^n; \|\zeta\| = r\}, \quad \|f(\zeta)\|^2 = \sum_{j=1}^n |f_j(\zeta)|^2 \geq \kappa > 0.$$

Si w_1, \dots, w_n sont des nombres complexes tels que $\|w\| < \kappa$ et que $\Phi(w_1, \dots, w_n, 0) \neq 0$, on a

$$\forall \xi \in B_n(0, r), \quad (f_1(\xi) - w_1 = \dots = f_n(\xi) - w_n = 0) \implies J_f(\xi) \neq 0.$$

La formule de Stokes en géométrie différentielle ² implique le premier résultat suivant :

LEMME 2.2 (premier lemme préparatoire pour la ré-interprétation de la formule de Cauchy-Weil comme une formule de trace). *Soient $f_1, \dots, f_n, r, \kappa$, comme ci-dessus,*

1. Cela signifie que l'on ne travaille plus sur les *germes* de fonctions holomorphes à l'origine de \mathbb{C}^n , mais vraiment sur des *représentants de ces germes*, qui sont cette fois des fonctions holomorphes dans un voisinage (suffisamment petit, mais cependant non traité comme un *germe de voisinage*) de l'origine dans \mathbb{C}^n ; cela reste toutefois un point de vue assez local, car on ne pas examiner ce qui se passe loin de l'origine. D'où la terminologie *semi-local*. On évoluera plus tard vers un point de vue *global* (sur un ouvert donné de \mathbb{C}^n ou plus généralement d'une variété analytique complexe de dimension n). En géométrie différentielle, on différencie ces trois points de vue (se complétant d'ailleurs souvent) : « local », « semi-local », « global ».

2. On renvoie ici par exemple au chapitre 3 de [HY]; la *formule de Stokes* en géométrie différentielle, matérialisant la dualité entre la cohomologie de de Rham et l'homologie simpliciale, voir les théorèmes 1.6, théorème 3.3 et théorème 3.6), joue un rôle important dans le cadre des variétés différentiables réelles ou analytiques complexes (on travaille en fait dans ce cas sur les variétés différentiables réelles sous-jacentes).

$(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $w \in B_n(0, \kappa)$ et $\Phi(w_1, \dots, w_n, 0) \neq 0$. Le sous-ensemble

$$f^{-1}(\{w\}) := \{\xi \in \overline{B_n(0, r)}; f_1(\xi) = w_1, \dots, f_n(\xi) = w_n\}$$

est un sous-ensemble fini $\overline{B_n(0, r)}$, d'ailleurs entièrement inclus dans $B_n(0, r)$, de cardinal indépendant de w , et l'on a la formule de représentation intégrale suivante pour toute fonction h holomorphe dans $B_n(0, r)$ et continue dans $\overline{B_n(0, r)}$:

$$(2.25) \quad \sum_{\xi \in f^{-1}(\{w\})} \frac{h(\xi)}{J_f(\xi)} = \frac{(-1)^{n(n-1)/2} (n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|=r} h(\zeta) \frac{\Omega_{f-w}(\zeta)}{\|f(\zeta) - w\|^{2n}}$$

$$(\Omega_{f-w} := \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (f_j - \bar{w}_j) \bigwedge_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^n df_{\bar{j}}).$$

Cette fonction

$$(2.26) \quad w = (w_1, \dots, w_n) \in B_n(0, \kappa) \setminus \{\Phi(w_1, \dots, w_n, 0)\} \longmapsto \sum_{\xi \in f^{-1}(\{w\})} \frac{h(\xi)}{J_f(\xi)}$$

se prolonge de manière unique en une fonction holomorphe dans la boule ouverte $B_n(0, \kappa)$. Lorsque l'on prend comme fonction h la fonction $h = J_f$, la fonction (2.26) est constante dans l'ouvert $B_n(0, \kappa) \setminus \{\Phi(w_1, \dots, w_n, 0) = 0\}$ et on a donc, pour tout w dans cet ouvert :

$$(2.27) \quad \text{card}(f^{-1}(\{w\})) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2} (n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|=r} J_f(\zeta) \frac{\Omega_f(\zeta)}{\|f(\zeta)\|^{2n}}.$$

Le nombre $\text{card}(f^{-1}(\{w\}))$ (pour w voisin de 0 et ainsi générique, ici tel que l'on ait $\Phi(w_1, \dots, w_n, 0) \neq 0$) s'interprète comme le degré géométrique $\text{deg}(f_1, \dots, f_n)$ de l'application $z \mapsto f(z)$; il est aussi égal à la dimension du \mathbb{C} -espace vectoriel

$$E_f := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} / (f_1, \dots, f_n)$$

qui s'avère donc dans ce cas être un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

DÉMONSTRATION. Pour prouver ce lemme, on utilise une transformation de la formule de Cauchy (2.1) exprimée au centre $z = (0, \dots, 0)$ de $D(0, \epsilon_1) \times \dots \times D(0, \epsilon_n)$. Cette formule stipule que, si $\eta > 0$, alors dès que $\epsilon_1^2, \dots, \epsilon_n^2$ sont des nombres tous réels positifs et de somme $\eta^2 > 0$, alors, pour toute fonction φ holomorphe dans $B_n(0, \eta)$ et continue dans $\overline{B_n(0, \eta)}$, on a

$$(2.28) \quad \begin{aligned} & \forall (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \Sigma_{n-1}(\eta) := \{\epsilon \in]0, \infty[^n; \|\epsilon\| = \eta\}, \\ & \varphi(0, \dots, 0) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{|\tau_1|^2 = \epsilon_1^2, \dots, |\tau_n|^2 = \epsilon_n^2} \varphi(\tau) \frac{d\tau_1}{\tau_1} \wedge \dots \wedge \frac{d\tau_n}{\tau_n} \\ & = \frac{1}{\text{vol}_{n-1}(\Sigma_{n-1}(\eta))} \int_{\Sigma_{n-1}(\eta)} \\ & \left(\frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{|\tau_1|^2 = \epsilon_1^2, \dots, |\tau_n|^2 = \epsilon_n^2} \varphi(\tau) \frac{d\tau_1}{\tau_1} \wedge \dots \wedge \frac{d\tau_n}{\tau_n} \right) d\sigma_{\Sigma_{n-1}(\eta)}(\epsilon_1^2, \dots, \epsilon_n^2), \end{aligned}$$

où

$$d\sigma_{\Sigma_{n-1}(\eta)}(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{\eta^2} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j \bigwedge_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^n du_\ell$$

représente la mesure de Lebesgue $n - 1$ -dimensionnelle sur le plan d'équation

$$u_1 + \dots + u_n = \eta^2$$

dans le premier quadrant $[0, \infty[^n$ de \mathbb{R}^n . Le volume n -dimensionnel $\text{vol}_{n-1}(\Sigma_{n-1}(\eta))$ vaut d'ailleurs $\eta^{2(n-1)}/(n-1)!$. Le passage de la première ligne à la seconde dans (2.28) résulte de la remarque suivante : on ne modifie pas la valeur d'une fonction de $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ qui est constante (et vaut $\varphi(0, \dots, 0)$) sur $\Sigma_{n-1}(\eta)$ en en prenant la « moyenne » sur le domaine $\Sigma_{n-1}(\eta)$, ce que l'on fait exactement ici, puisque l'on intègre la fonction sur $\Delta_{n-1}(\eta)$ par rapport à la mesure de Lebesgue $d\sigma_{\Sigma_{n-1}(\eta)}$ sur la portion de $(n-1)$ -plan $\Sigma_{n-1}(\eta)$ et que l'on divise le résultat obtenu par le volume

$$\text{vol}_{n-1}(\Sigma_{n-1}(\eta)) = \int_{\Sigma_{n-1}(\eta)} d\sigma_{\Sigma_{n-1}(\eta)}$$

de cette portion de $(n-1)$ -plan. Si l'on observe que

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_1}{\tau_1} \wedge \dots \wedge \frac{d\tau_n}{\tau_n} \wedge |\tau_j|^2 \bigwedge_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^n d|\tau_\ell|^2 &= \frac{d\tau_1}{\tau_1} \wedge \dots \wedge \frac{d\tau_n}{\tau_n} \wedge |\tau_j|^2 \bigwedge_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^n \tau_\ell d\bar{\tau}_\ell \\ &= d\tau_1 \wedge \dots \wedge d\tau_n \wedge \bar{\tau}_j \bigwedge_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^n d\bar{\tau}_\ell \quad (\forall j = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

on conclut (en utilisant juste le théorème de Fubini permettant d'échanger les intégrations) que l'on peut exprimer aussi (2.28) comme

(2.29)

$$\begin{aligned} \varphi(0, \dots, 0) &= \\ \frac{(n-1)!(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} \int_{\|\tau\|=\eta} \frac{1}{\|\tau\|^{2n}} \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \bar{\tau}_j \bigwedge_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^n d\bar{\tau}_\ell \right) \wedge \varphi(\tau) d\tau_1 \wedge \dots \wedge d\tau_n. \end{aligned}$$

La présence du signe $(-1)^{n(n-1)/2}$ tient juste ici à un problème de respect des orientations : la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^{2n} est

$$\frac{1}{(2i)^n} \bigwedge_{j=1}^n d\bar{\tau}_j \wedge d\tau_j$$

tandis que le calcul conduit ici est en phase avec l'orientation induite par le choix de la forme

$$\frac{1}{(2i)^n} d\bar{\tau}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{\tau}_n \wedge d\tau_1 \wedge \dots \wedge d\tau_n$$

(égale précisément à $(-1)^{n(n-1)/2}$ fois la précédente) comme forme volume sur \mathbb{R}^{2n} (induisant donc l'orientation qui lui correspond sur $\Sigma_{n-1}(\eta)$) ; il convient de veiller à ces questions d'orientation lors de l'application du théorème de Fubini.

Si l'on utilise maintenant comme coordonnées locales au voisinage d'un point ξ de $f^{-1}(\{w\})$ de $B_n(0, r)$ les coordonnées locales $\tau_1 = f_1 - w, \dots, \tau_n = f_n - w$ (voisines de 0) pour représenter la fonction

$$\tau \mapsto \frac{h(\xi + \tau - w)}{J_f(\xi + \tau - w)}$$

au voisinage de l'origine, on constate que l'on déduit de (2.29) que

$$\begin{aligned} (2.30) \quad \frac{h(\xi)}{J_f(\xi)} &= \frac{(n-1)!(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} \\ &\times \int_{\|f-w\|=\eta} \frac{1}{\|f-w\|^{2n}} \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (\bar{f}_j - \bar{w}_j) \bigwedge_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^n d\bar{f}_\ell \right) \wedge h(\zeta) \frac{\bigwedge_{j=1}^n df_j(\zeta)}{J_f(\zeta)} \\ &= \frac{(n-1)!(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} \\ &\times \int_{\|f-w\|=\eta} \frac{1}{\|f-w\|^{2n}} \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (\bar{f}_j - \bar{w}_j) \bigwedge_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^n d\bar{f}_\ell \right) \wedge h(\zeta) d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n \end{aligned}$$

On vérifie (c'est juste un petit calcul sur les formes différentielles dans \mathbb{C}^{2n}) que, dans un ouvert U de \mathbb{C}^{2n} où n fonctions holomorphes h_1, \dots, h_n n'ont aucun zéro commun, la $(2n-1)$ -forme différentielle

$$\omega = \frac{1}{\|h\|^{2n}} \left(\sum_{j=1}^n \bar{h}_j \bigwedge_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^n d\bar{h}_\ell \right) d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$$

est une forme fermée (c'est-à-dire vérifie $d\omega = 0$, où d désigne l'opérateur de de Rham¹ dans $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$). On peut utiliser ici ce résultat avec $h_j = f_j - w_j$: en effet les h_j n'ont aucun zéro commun dans l'ouvert obtenu en enlevant à $B_n(0, r)$ l'union de toutes les « boules euclidiennes » fermées $\|\tau\| \leq \eta$ (relativement aux coordonnées locales τ_j) entourant chacune exactement un point ξ de $f^{-1}(\{w\})$. En appliquant ensuite la formule de Stokes, on déduit de la formule de représentation intégrale obtenue en ajoutant toutes les formules (2.30) pour tous les points ξ de $f^{-1}(\{w\})$ que :

$$\begin{aligned} (2.31) \quad \sum_{\xi \in f^{-1}(\{w\})} \frac{h(\xi)}{J_f(\xi)} &= \frac{(n-1)!(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} \times \\ &\times \int_{\|\zeta\|=r} \frac{1}{\|f-w\|^{2n}} \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (\bar{f}_j - \bar{w}_j) \bigwedge_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^n d\bar{f}_\ell \right) \wedge h(\zeta) d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n. \end{aligned}$$

C'est bien la formule (2.25) attendue. Si l'on prend $h = J_f$ dans cette formule, on observe que le membre de gauche est exactement égal au cardinal de $f^{-1}(\{w\})$; comme le membre de droite de cette même formule dépend clairement continuellement

1. Voir les éléments concernant les formes différentielles sur les variétés différentielles ou les variétés analytiques complexes rappelés dans l'appendice 2.7 à suivre.

des paramètres w_1, \dots, w_n (en tant qu'intégrale fonction de paramètres, on applique ici le théorème de Lebesgue concernant la continuité d'une telle intégrale), il en résulte que la fonction

$$w \mapsto \text{card}(f^{-1}(\{w\}) \in \mathbb{N}$$

est localement constante dans l'ouvert $\{\|w\| < \tau\} \setminus \{\Phi(w_1, \dots, w_n, 0) = 0\}$; comme cette fonction prend ses valeurs dans un ensemble discret, elle est constante et la cardinal de $f^{-1}(\{w\})$ est un nombre entier $\text{deg}(f_1, \dots, f_n)$ indépendant de w , de valeur

$$(2.32) \quad \text{deg}(f_1, \dots, f_n) := \frac{(n-1)!(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} \times \\ \times \int_{\|\zeta\|=r} \frac{1}{\|f\|^{2n}} \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \bar{f}_j \bigwedge_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^n d\bar{f}_\ell \right) \wedge J_f(\zeta) d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n.$$

Au voisinage d'un point w tel que $\|w\| < \kappa$ et $\Phi(w_1, \dots, w_n, 0) \neq 0$, la fonction

$$w \mapsto \sum_{\xi \in f^{-1}(\{w\})} \frac{h(\xi)}{J_f(\xi)}$$

est une fonction holomorphe de w ; cette fonction est de plus localement bornée au voisinage de tout point de $B_n(0, \kappa)$. Elle se prolonge donc, d'après le théorème de Riemann¹, en une fonction holomorphe des variables w_1, \dots, w_n dans $B_n(0, \kappa)$.

Montrons maintenant que $E_f = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}/(f_1, \dots, f_n)$ est bien sous les hypothèses faites un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $d = \text{deg}(f_1, \dots, f_n)$. Si h désigne une fonction holomorphe dans $B_n(0, r)$, toutes les fonctions

$$w \mapsto \sum_{\xi \in f^{-1}(w)} h^\ell(\xi) \quad (\ell = 0, \dots, \text{deg}(f_1, \dots, f_n))$$

sont donc des fonctions holomorphes de w au dans $B_n(0, r) \setminus \{\Phi(w_1, \dots, w_n, 0) = 0\}$, se prolongeant en des fonctions holomorphes dans la boule $B_n(0, \kappa)$; les fonctions symétriques $\sigma_{h,1}, \dots, \sigma_{h,d}$ de l'ensemble $\{h(\xi), \xi \in f^{-1}(w)\}$ sont donc aussi, d'après les relations de Newton liant fonctions symétriques d'un ensemble fini et sommes de Newton $\sum_{\xi} h^\ell(\xi)$ ($\ell = 1, \dots, d$), elles aussi, des fonctions holomorphes des variables (w_1, \dots, w_n) (polynomiales en les précédentes² au voisinage de $(0, \dots, 0)$). On a

$$\prod_{\xi \in f^{-1}(\{w\})}^d (h(z) - h(\xi)) = h^d - \sigma_{h,1}(w) h^{d-1} + \dots + (-1)^d \sigma_{h,d}(w) \in (f_1 - w_1, \dots, f_n - w_n).$$

1. Le test de méromorphie (proposition 2.1) assure que la fonction se prolonge en une fonction méromorphe de lieu polaire certainement inclus dans l'hypersurface analytique $\{\Phi(w_1, \dots, w_n, 0) = 0\}$ de $B_n(0, \kappa)$; en invoquant le fait que toute fonction holomorphe présentant une singularité isolée en un point α et bornée au voisinage épointé de α se prolonge holomorphiquement sur un voisinage de α (ce qui est précisément le théorème de Riemann, voir [Y1], théorème 3.3), on conclut ici à ce résultat.

2. Attention! Les formules de Newton reliant les sommes de Newton $S_k = \sum_{\xi \in f^{-1}(\{w\})} h^k(\xi)$ ($k = 1, \dots, d$) aux fonctions symétriques élémentaires de $\{h(\xi); \xi \in f^{-1}(\{w\})\}$ ne sont valides qu'en caractéristique 0 car elles impliquent des divisions par des entiers. Pas de souci cependant ici car $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On en déduit

$$h^d - \sigma_{h,1}(f_1, \dots, f_n) h^{d-1} + \dots + (-1)^d \sigma_{h,d}(f_1, \dots, f_n) \equiv 0$$

au voisinage de $(0, \dots, 0)$, ce qui implique

$$(2.33) \quad h^d - \sigma_{h,1}(0, \dots, 0) h^{d-1} + \dots + (-1)^d \sigma_{h,d}(0, \dots, 0) \in (f_1, \dots, f_n).$$

On déduit de cela que le \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/(f_1, \dots, f_n)$ est bien un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie ; il suffit pour le voir d'exploiter les relations de congruence du type (2.33) obtenues pour $h : z \mapsto z_1, \dots, h : z \mapsto z_n$ (constituant la liste des « fonctions coordonnées »). Lorsque w est générique, cette dimension est aussi égale à celle de la dimension du quotient $B_n(0, r)/(f_1 - w_1, \dots, f_n - w_n) B_n(0, r)$ et vaut donc exactement d . \square

La relation algébrique (2.33) que l'on vient d'exhiber ici, puisqu'elle est de degré d , figure, si h est un élément de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ donné, la réalisation du *théorème de Cayley-Hamilton* pour l'opérateur

$$\dot{u} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/(f_1, \dots, f_n) \mapsto \text{classe de } (hu) \text{ modulo } (f_1, \dots, f_n).$$

Cet opérateur est l'opérateur de multiplication par \dot{h} (la « classe » de h) dans l'espace vectoriel quotient

$$E_f := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/(f_1, \dots, f_n),$$

qui est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension d : tout opérateur linéaire T de ce \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie dans lui-même annule le polynôme caractéristique

$$(-1)^d \det(T - X \text{Id}_{E_f})$$

de l'opérateur T . L'opérateur de multiplication par le jacobien J_f induit donc en particulier un opérateur de multiplication \mathbb{J}_f :

$$\mathbb{J}_f : \dot{u} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/(f_1, \dots, f_n) \mapsto \text{classe } (J_f u) \text{ modulo } (f_1, \dots, f_n).$$

Cet opérateur \mathbb{J}_f annule son polynôme caractéristique :

$$\mathbb{J}_f^d - \sigma_{J_f,1}(0, \dots, 0) \mathbb{J}_f^{d-1} + \dots + (-1)^d \sigma_{J_f,d}(0, \dots, 0) \text{Id}_{E_f} = 0.$$

Compte-tenu de la formule (2.25),

$$(2.34) \quad \left[\sum_{\xi \in f^{-1}(\{w\})} \frac{h(\xi)}{J_f(\xi)} \right]_{w=(0, \dots, 0)} = \frac{(-1)^{n(n-1)/2} (n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|=r} h(\zeta) \frac{\Omega_f(\zeta)}{\|f(\zeta)\|^{2n}},$$

l'expression intégrale figurant au membre de droite de (2.34) peut ainsi être interprétée comme la « trace¹ de l'opérateur de multiplication par $1/J_f$ du \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/(f_1, \dots, f_n)$ dans lui-même ». La question principale est de donner un sens à $1/J_f$ comme endomorphisme du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/(f_1, \dots, f_n)$, ce qui est

1. La *trace* d'un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie E est définie comme la somme des termes diagonaux de la matrice de cet endomorphisme exprimée dans une base arbitraire de E . Comme tous les coefficients du polynôme caractéristique de l'endomorphisme, cette trace ne dépend en effet pas du choix de la base dans lequel l'endomorphisme se trouve représenté.

délicat ; on se contente de donner un sens à la *trace* de cet opérateur¹. Comme en général le jacobien J_f s'annule en 0, cette trace doit être introduite comme nous l'avons fait ici, c'est-à-dire par un *argument de perturbation* (on se « décale » légèrement de $w = (0, \dots, 0)$ que l'on perturbe en (w_1, \dots, w_n) en prenant soin d'éviter au passage l'hypersurface $\{\Phi(w_1, \dots, w_n, 0) = 0\}$).

Les calculs que nous avons effectués dans cette section nous permettent également d'obtenir le lemme suivant, en relation avec les intégrales introduites dans la formule de Cauchy-Weil (2.17). On admettra ce lemme ici (on le mentionne ici car il induit une représentation intégrale plus maniable pour les coefficients $a_\alpha(h; I)$ impliqués dans le développement de Bergman-Weil (2.18)).

LEMME 2.3 (second lemme préparatoire pour la ré-interprétation de la formule de Cauchy-Weil comme une formule de trace). *Soient f_1, \dots, f_n n fonctions holomorphes dans $B_n(0, r)$, continues dans $\overline{B_n(0, r)}$ et ne présentant que l'origine $(0, \dots, 0)$ comme zéro commun dans $\overline{B_n(0, r)}$. Pour $\rho_1 + \dots + \rho_n$ suffisamment petit, soit $\Gamma_{\rho_1, \dots, \rho_n}$ la frontière de Shilov de la composante connexe $C_{\rho_1, \dots, \rho_n}$ contenant $(0, \dots, 0)$ ². Lorsque $(\rho_1^2, \dots, \rho_n^2)$ n'est pas une valeur critique de l'application $(|f_1|^2, \dots, |f_n|^2)$ (considérée d'un ouvert de \mathbb{R}^{2n} à valeurs dans \mathbb{R}^n)³, on a les égalités suivantes, pour toute fonction h holomorphe dans $B_n(0, r)$ et continue dans $\overline{B_n(0, r)}$:*

$$(2.35) \quad \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_{r_1, \dots, r_n}} h(\zeta) \bigwedge_{j=1}^n \frac{d\zeta_j}{f_j^{\alpha_j+1}(\zeta)} = \frac{(-1)^{n(n-1)/2} (n-1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n)!}{(2i\pi)^n} \\ \times \int_{\|\zeta\|=r} \bar{f}_1^{\alpha_1} \dots \bar{f}_n^{\alpha_n} \frac{\Omega_f(\zeta)}{\|f\|^{2(n+\alpha_1+\dots+\alpha_n)}} \wedge h(\zeta) d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n \\ (\forall \alpha \in \mathbb{N}^n).$$

DÉMONSTRATION. On prouve ce résultat dans un premier temps pour $f - w$, où $w \in B_n(0, \kappa)$ et $\Phi(w_1, \dots, w_n, 0) \neq 0$, ce qui permet de supposer que $f_1 - w_1, \dots, f_n - w_n$ jouent le rôle de coordonnées locales au voisinage de tout point $\xi \in f^{-1}(\{w\})$. On raisonne près de chaque point ξ de $f^{-1}(\{w\})$ (jouant maintenant le rôle de l'origine). On exploite ensuite le fait que les fonctions

$$(r_1, \dots, r_n) \mapsto \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_{r_1, \dots, r_n}} h(\zeta) \bigwedge_{j=1}^n \frac{d\zeta_j}{f_j^{\alpha_j+1}(\zeta)} \quad (\alpha \in \mathbb{N}^n)$$

1. On verra plus loin que la définition de l'opérateur de « multiplication par $1/J_f$ » lui-même ne saurait être dissociée de la définition « en bloc » de toute une famille d'opérateurs, dont les traces seront d'ailleurs impliquées dans le développement de Bergman-Weil (2.18). Pour donner un sens à l'opérateur de multiplication par $1/J_f$, il faut s'affranchir du point de vue strictement *local* pour envisager un point de vue *semi-local*, ce que reflète justement le développement de Bergman-Weil (qui n'est rien d'autre, on l'a vu, que le développement de Taylor lorsque les f_j sont les fonctions coordonnées).

2. Cette composante est relativement compacte dans $B_n(0, r)$ dès que $\rho_1 + \dots + \rho_n$ est assez petit.

3. Il y a un sous-ensemble de $]0, \infty[^n$ de mesure de Lebesgue nulle à éviter. Si tel est le cas Γ_{r_1, \dots, r_n} est une variété sous-variété différentiable de dimension n de $B_n(0, r)$ que l'on convient d'orienter de manière à ce que la n -forme $d(\arg f_1) \wedge \dots \wedge d(\arg f_n)$ soit positive.

sont des fonctions constantes de (r_1, \dots, r_n) (hors de l'ensemble de mesure nulle qu'il convient d'éviter pour les définir) dont on peut récupérer la valeur en $(0, \dots, 0)$ comme une moyenne (comme dans la preuve du lemme 2.3). On regroupe tous les résultats obtenus pour les divers points $\xi \in f^{-1}(\{w\})$ en une seule intégrale (sur $\{\|\zeta\| = r\}$ cette fois) grâce à la formule de Stokes. On fait enfin tendre w vers $(0, \dots, 0)$. \square

En conclusion de cette section, insistons sur le fait que nous avons dégagé, étant donnés n germes f_1, \dots, f_n de l'anneau local régulier $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ définissant une suite régulière dans cet anneau, une notion de *degré* $\deg(f_1, \dots, f_n)$ dont nous avons proposé deux interprétations (plus une troisième que nous indiquerons aussi) :

- (1) Le degré $\deg(f_1, \dots, f_n)$ est le nombre de points distincts de

$$\{f_1 - w_1 = \dots = f_n - w_n = 0\}$$

(tous voisins de l'origine) lorsque $w = (w_1, \dots, w_n)$ est une petite perturbation générique de $(0, \dots, 0)$. Il s'agit ici d'une interprétation *géométrique* ou plutôt en fait *dynamique* de la notion de degré d'une telle application (f_1, \dots, f_n) .

- (2) Le degré $\deg(f_1, \dots, f_n)$ est aussi la dimension du \mathbb{C} -espace vectoriel quotient $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}/(f_1, \dots, f_n)$. Cette interprétation relève de l'*algèbre linéaire*.
- (3) Le degré $\deg(f_1, \dots, f_n)$ est aussi le degré de l'extension algébrique

$$\mathbb{C}(f_1, \dots, f_n)[\zeta_1, \dots, \zeta_n] \text{ (ou encore } \mathbb{C}[\zeta_1, \dots, \zeta_n : f_1, \dots, f_n])$$

du corps $\mathbb{C}(f_1, \dots, f_n)$ des fractions rationnelles en f_1, \dots, f_n à coefficients complexes par les germes ζ_1, \dots, ζ_n qui sont algébriques (même en fait entiers algébriques) sur ce corps. Cette interprétation est une interprétation *algébrique* ou *arithmétique*.

Il est important d'avoir en tête ces diverses incarnations de la notion de degré d'un système d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ en position de suite régulière. On pourra approfondir ces notions dans [GH], chapitre V (qui m'a servi ici de trame pour cette section du cours).

2.7. Appendice : formes différentielles sur une variété

Dans cet appendice, nous présentons un résumé des rappels de géométrie différentielle réelle donnés en cours et donnons quelques compléments nécessaires concernant la géométrie des variétés analytiques complexes.

2.7.1. Variétés différentiables ; structures complexes

Ce qui est rappelé dans cette section est emprunté à [HY] (pour ce qui est du niveau M1) ou au cours de M2 [Y2].

Se donner une *variété différentiable*¹ de dimension (réelle) $k \in \mathbb{N}^*$, c'est se donner :

- un espace topologique séparé \mathcal{X} , supposé « dénombrable à l'infini », c'est-à-dire union dénombrable croissante de compacts ;

1. On dit aussi « différentielle ».

- un atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ où les ouverts $(U_\alpha)_\alpha$ constituent un recouvrement de \mathcal{X} , où, pour chaque indice α , φ_α est un homéomorphisme entre U_α et un ouvert V_α de \mathbb{R}^k , et où les applications de changement de cartes

$$\varphi_{\alpha,\beta} : x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \mapsto \varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(x)) \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont des difféomorphismes de classe C^∞ entre ouverts de \mathbb{R}^n .

La structure ainsi associée à l'atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_\alpha$ est dite *complexe* lorsque $k = 2n$ et que les morphismes de changement de cartes $\varphi_{\alpha,\beta}$ sont non seulement C^∞ (entre deux ouverts de $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{2n}$), mais aussi *biholomorphes* (c'est-à-dire holomorphes et d'inverses holomorphes) lorsque les ouverts de \mathbb{R}^{2n} que sont $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ et $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ sont équipés de leur structure complexe $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \longleftrightarrow (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$. La variété différentiable de dimension (réelle) $2n$ (obtenue en oubliant le caractère bi-holomorphe des morphismes de changement de carte $\varphi_{\alpha,\beta}$ pour n'en retenir que le caractère C^∞) est alors dite *variété réelle sous-jacente*. Le couple constitué de l'espace topologique \mathcal{X} et d'une telle structure complexe est dit *variété analytique complexe de dimension complexe n* ($k = 2n$ étant alors la dimension de la variété réelle sous-jacente).

Exemple 2.1 (l'espace projectif réel ou complexe : des exemples de variétés compactes). L'espace affine réel $A_k(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^k$, l'espace projectif réel défini comme $\mathbb{P}^k(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\})/\mathbb{R}^*$ (le groupe \mathbb{R}^* agissant par homothétie) sont des exemples de variétés différentiables réelles de dimension k . L'espace affine complexe $A_n(\mathbb{C})$, l'espace projectif complexe défini comme $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\})/\mathbb{C}^*$ (le groupe \mathbb{C}^* agissant encore par homothétie) sont des exemples de variétés analytiques complexes de dimension complexe n . Les variétés $\mathbb{P}^k(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont compactes car tout point $[x_0 : \dots : x_k]$ ou $[z_0 : \dots : z_n]$ admet un représentant soit dans la sphère unité \mathbb{S}^k de \mathbb{R}^{k+1} dans le premier cas (prendre $[x_0/\|x\| : \dots : x_k/\|x_k\|]$), soit dans la sphère unité \mathbb{S}^{2n+1} de \mathbb{S}^{2n} dans le second cas (prendre dans ce cas comme représentant $[z_0/\|z\| : \dots : z_n/\|z\|]$); la compacité de $\mathbb{P}^k(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ résulte alors de la compacité de la sphère unité \mathbb{S}^k ou \mathbb{S}^{2n+1} (on utilise la caractérisation de la compacité des espaces métriques en termes de la propriété de Bolzano-Weierstraß : toute suite de points admet au moins une valeur d'adhérence). Ces espaces projectifs $\mathbb{P}^k(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont des *variétés algébriques* respectivement sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} car les morphismes de changement de cartes $\varphi_{\alpha,\beta}$ sont donnés par des applications rationnelles (à coefficients respectivement dans \mathbb{R} ou \mathbb{C})¹. Une variété analytique complexe de dimension 1 est appelée *surface de Riemann* : par exemple $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (la surface sous-jacente est alors la sphère \mathbb{S}^2), ou bien aussi \mathbb{C}/Λ où $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$ avec $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0$ ² (la surface sous-jacente est alors le tore \mathbb{T}^2 plongé par exemple dans \mathbb{R}^3); la sphère \mathbb{S}^2 à laquelle ont été « fixées » g « poignées » peut être équipée d'une structure complexe : on dit qu'il s'agit alors d'une surface de Riemann de *genre g* (le nombre de « poignées »).

1. Ce sont même des transformations monomiales, comme on l'a vu.

2. On dit qu'un tel sous-groupe Λ (agissant ici sur \mathbb{C} par translation) est un *réseau* du plan complexe.

2.7.2. Fibré tangent et cotangent ; cas réel et cas complexe

Le fibré¹ tangent $T\mathcal{X}$ à une variété différentiable de dimension k est le fibré réel de rang k dont la fibre au dessus du point $x \in \mathcal{X}$ est le \mathbb{R} -espace vectoriel $T_x\mathcal{X}$, \mathbb{R} -espace vectoriel dont les éléments sont les dérivées $\gamma'(0)$ des germes de courbes $t \in [-\epsilon, \epsilon] \mapsto \gamma(t) \in \mathcal{X}$ (avec $\gamma(0) = x$). Le fibré cotangent $T^*\mathcal{X}$ est le fibré de rang k dont la fibre est l'espace vectoriel dual $T_x^*\mathcal{X}$. Un champ de vecteurs dans un ouvert U de \mathcal{X} est une section de classe C^∞ du fibré tangent, c'est-à-dire une application

$$x \in \mathcal{X} \mapsto \xi(x) \in E_x,$$

la dépendance se faisant ici de manière C^∞ (l'union des fibres E_x d'un fibré de rang ℓ au dessus de \mathcal{X} , $E \rightarrow \mathcal{X}$, peut en effet être équipée d'une structure de variété différentiable de dimension $k + \ell$). En coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) , un champ de vecteurs dans U s'exprime dans une carte locale au voisinage d'un point de U comme

$$x \mapsto \xi(x) = \sum_{j=1}^k \xi_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

où les fonctions coordonnées ξ_j ($j = 1, \dots, n$) sont C^∞ . On appelle 1-forme différentielle (réelle) dans un ouvert U toute section dans U du fibré cotangent. En coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) , une 1-forme différentielle dans U s'exprime dans une carte locale au voisinage d'un point de U comme

$$x \mapsto \omega(x) = \sum_{j=1}^k \omega_j(x) dx_j$$

où les fonctions coordonnées ξ_j ($j = 1, \dots, n$) sont C^∞ (on note ici (dx_1, \dots, dx_n) la base duale de la base $(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$). Les 1-formes dans un ouvert U agissent donc par dualité sur les champs de vecteurs : dans une carte locale au voisinage d'un point de U , on définit une fonction (ces fonctions ainsi définies se recollant dans U) par :

$$\left\langle \sum_{j=1}^k \omega_j(x) dx_j, \sum_{j=1}^k \xi_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{j=1}^k \xi_j(x) \omega_j(x).$$

Dans le cas complexe (\mathcal{X} est maintenant une variété analytique complexe de dimension complexe n), on considère la variété différentiable sous-jacente $\widetilde{\mathcal{X}}$ qui est une variété différentiable de dimension (réelle) $2n$. On peut toujours considérer, pour $z \in \mathcal{X}$, le \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $2n$ défini comme $T_z\widetilde{\mathcal{X}}$; ce qui est nouveau ici est que ce \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $2n$ peut être aussi équipé de manière cohérente (en fonction de z) d'une structure complexe ; on peut l'identifier à un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n et l'équiper d'une conjugaison complexe. On peut considérer le complexifié

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_z\widetilde{\mathcal{X}} = T_z\widetilde{\mathcal{X}} \otimes \overline{T_z\widetilde{\mathcal{X}}}$$

1. Un fibré $E \rightarrow \mathcal{X}$ de rang k au dessus d'une variété différentiable est la donnée d'une collection $\{E_x, x \in \mathcal{X}\}$ de \mathbb{R} -sous-espaces vectoriels de rang k « indexée » de manière cohérente (et C^∞) par les points de \mathcal{X} , voir les sections 3.1 et 3.2 de [HY], la section 1.1.2 de [Y2] pour une définition plus précise.

qui est du point de vue \mathbb{R} -espace vectoriel un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $4n$. Le *fibré tangent holomorphe* est le fibré de \mathbb{C} -espaces vectoriels dont la fibre est $T_z \widetilde{\mathcal{X}}$, mais vu comme un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n ; les sections de ce fibré (que l'on note aussi $T^{(1,0)} \mathcal{X}$) au dessus d'un ouvert U s'expriment en coordonnées locales $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ ($z_j = x_j + iy_j$ pour $j = 1, \dots, n$) sous la forme

$$\theta(z) = \sum_{j=1}^n \theta_j(x, y) \frac{\partial}{\partial z_j},$$

où les fonctions θ_j sont des fonctions C^∞ à valeurs complexes des $2n$ variables locales $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$; on rappelle que $\partial/\partial z_j = (1/2)(\partial/\partial x_j - i\partial/\partial y_j)$ pour $j = 1, \dots, n$. De tels champs de vecteurs sont dits *holomorphes*. Le *fibré tangent holomorphe* est le fibré de \mathbb{C} -espaces vectoriels dont la fibre est $T_z \widetilde{\mathcal{X}}$, mais vu comme un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n ; les sections de ce fibré (que l'on note aussi $T^{(1,0)} \mathcal{X}$) au dessus d'un ouvert U s'expriment en coordonnées locales $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ (où l'on a $z_j = x_j + iy_j$ pour $j = 1, \dots, n$) sous la forme

$$\theta(z) = \sum_{j=1}^n \theta_j(x, y) \frac{\partial}{\partial z_j},$$

où les fonctions θ_j sont des fonctions C^∞ à valeurs complexes des $2n$ variables locales $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$; on rappelle que $\partial/\partial z_j = (1/2)(\partial/\partial x_j - i\partial/\partial y_j)$ pour $j = 1, \dots, n$. De tels champs de vecteurs sont dits *holomorphes*. On introduit alors deux objets.

- Le *fibré tangent holomorphe* est le fibré de \mathbb{C} -espaces vectoriels dont la fibre est $T_z \widetilde{\mathcal{X}}$, mais vu comme un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n ; les sections de ce fibré (que l'on note aussi $T^{(1,0)} \mathcal{X}$) au dessus d'un ouvert U s'expriment en coordonnées locales $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ ($z_j = x_j + iy_j$ pour $j = 1, \dots, n$) sous la forme

$$\theta(z) = \sum_{j=1}^n \theta_j(x, y) \frac{\partial}{\partial z_j},$$

où les fonctions θ_j sont des fonctions C^∞ à valeurs complexes des $2n$ variables locales $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$; on rappelle que $\partial/\partial z_j = (1/2)(\partial/\partial x_j - i\partial/\partial y_j)$ pour $j = 1, \dots, n$. De tels champs de vecteurs sont dits *holomorphes*.

- Le *fibré tangent antiholomorphe* est le fibré de \mathbb{C} -espaces vectoriels dont la fibre est $T_z \widetilde{\mathcal{X}}$, toujours vu comme un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n ; les sections de ce fibré (que l'on note aussi $T^{(0,1)} \mathcal{X}$) au dessus d'un ouvert U s'expriment en coordonnées locales $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ ($z_j = x_j + iy_j$ pour $j = 1, \dots, n$) sous la forme

$$\tilde{\theta}(z) = \sum_{j=1}^n \tilde{\theta}_j(x, y) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j},$$

où les fonctions $\tilde{\theta}_j$ sont des fonctions C^∞ à valeurs complexes des $2n$ variables locales $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$; on rappelle que $\partial/\partial \bar{z}_j = (1/2)(\partial/\partial x_j + i\partial/\partial y_j)$ pour $j = 1, \dots, n$. De tels champs de vecteurs sont dits *anti-holomorphes*.

Un champ de vecteurs à valeurs complexes sur \mathcal{X} est par définition une section du fibré de rang réel $4n$ $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T\widetilde{\mathcal{X}}$ sur la variété réelle sous-jacente $\widetilde{\mathcal{X}}$. Il s'exprime en coordonnées locales sous la forme d'une somme

$$\sum_{j=1}^n \theta_j(x, y) \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=1}^n \tilde{\theta}_j(x, y) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$

d'un champ holomorphe et d'un champ anti-holomorphe ; il ne faut pas perdre de vue qu'il s'agit ici d'un fibré réel de rang $4n$ sur la variété sous-jacente.

Sur le même principe, on peut définir le fibré réel de rang $4n$ sur la variété sous-jacente $\widetilde{\mathcal{X}}$:

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T\widetilde{\mathcal{X}} = T^{(1,0)*}\mathcal{X} \oplus T^{(0,1)*}\mathcal{X} = T^{(1,0)*}\mathcal{X} \oplus \overline{T^{(1,0)*}\mathcal{X}}.$$

Les sections de ce fibré de rang $4n$ sur la variété sous-jacente $\widetilde{\mathcal{X}}$ au dessus d'un ouvert U sont les 1-formes différentielles complexes sur U . En coordonnées locales au voisinage d'un point z de U , une telle 1-forme s'exprime

$$\sum_{j=1}^n \omega_j^{(1,0)}(x, y) dz_j + \sum_{j=1}^n \omega_j^{(0,1)}(x, y) d\bar{z}_j \quad (dz_j = dx_j + idy_j, \quad d\bar{z}_j = dx_j - idy_j),$$

où les fonctions $\omega^{(1,0)}$ et $\omega^{(0,1)}$ sont des fonctions C^∞ des variables réelles locales $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$. Ainsi une 1-forme complexe dans un ouvert U de \mathcal{X} se scinde en deux composantes :

- la composante s'exprimant en coordonnées locales

$$\sum_{j=1}^n \omega_j^{(1,0)}(x, y) dz_j$$

qui est une section du fibré cotangent holomorphe $T^{(1,0)*}\mathcal{X}$ qui est un fibré de rang réel $2n$ au dessus de la variété sous-jacente $\widetilde{\mathcal{X}}$, mais que l'on peut aussi considérer comme un fibré de rang n en sous-espaces complexes cette fois ; on dit qu'une telle section est une $(1,0)$ -forme dans U ;

- la composante s'exprimant en coordonnées locales

$$\sum_{j=1}^n \omega_j^{(0,1)}(x, y) d\bar{z}_j$$

qui est une section du fibré $T^{(0,1)*}\mathcal{X}$ qui lui est juste un fibré de rang réel $2n$ au dessus de la variété sous-jacente $\widetilde{\mathcal{X}}$; on dit qu'une telle section est une $(0,1)$ -forme dans U .

Pour plus de détails sur ces constructions, reportez vous par exemple à la section 1.2.2 de [Y2].

2.7.3. L'opérateur de de Rham sur une variété différentiable

Si $\ell = 1, \dots, k$, on appelle ℓ -forme différentielle (réelle)¹ sur un ouvert U d'une variété différentiable \mathcal{X} de dimension k une section globale dans U du fibré $\bigwedge^\ell T^*\mathcal{X}$. Il s'agit d'un fibré de rang $\binom{k}{\ell}$. Les 0-formes différentielles dans U sont par définition

1. On dit que ℓ est alors le *degré* de la forme différentielle.

les fonctions C^∞ de U dans \mathbb{R} . En coordonnées locales au voisinage d'un point x de U , une telle ℓ -forme s'exprime

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq k} \omega_{i_1, \dots, i_\ell}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_\ell}.$$

Si les coefficients $\omega_{i_1, \dots, i_\ell}$ sont pris complexes (mais on préserve la structure de \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension réelle cette fois $2 \binom{k}{\ell}$ pour la fibre), on parle de *ℓ -forme différentielle complexe sur \mathcal{X}* .

Une telle forme ℓ -forme différentielle agit par dualité sur les ℓ -uplets de champs de vecteurs, par exemple :

$$\begin{aligned} & \left\langle dx_1 \wedge dx_2, \left(\sum_{j=1}^k \xi_{1,j} \frac{\partial}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^k \xi_{2,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle dx_1 \wedge dx_2, \left(\sum_{j=1}^2 \xi_{1,j} \frac{\partial}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^2 \xi_{2,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\rangle \\ &= \xi_{1,1} \xi_{2,2} - \xi_{1,2} \xi_{2,1}. \end{aligned}$$

L'opérateur de de Rham d est un opérateur \mathbb{R} -linéaire transportant les ℓ -formes différentielles dans un ouvert U de \mathcal{X} en $\ell + 1$ formes. Il est construit de manière à ce plier aux quatre règles :

- être \mathbb{R} -linéaire ;
- satisfaire $d[d\omega] = d^2\omega$ pour toute ℓ -forme ($\ell = 0, \dots, k$) ;
- se plier à la règle de Leibniz :

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\ell_1} d\omega_2$$

- si ω_1 est une ℓ_1 -forme différentielle et ω_2 une ℓ_2 forme différentielle ;
- vérifier

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

en coordonnées locales si f est une 0-forme (une fonction C^∞).

Une ℓ -forme ω est dite *fermée* si $d\omega = 0$; elle est dite *exacte* s'il existe une forme de degré $\ell - 1$ telle que $\omega = d\alpha$. Les ℓ -formes fermées dans un ouvert U de \mathcal{X} forment un \mathbb{R} sous-espace du \mathbb{R} -espace vectoriel des ℓ -formes sur U . On le note $Z^\ell(U, \mathbb{R})$ (ou $Z^\ell(U, \mathbb{C})$ si l'on considère les ℓ -formes à valeurs complexes). On note de même $B^\ell(U, \mathbb{R})$ ou $B^\ell(U, \mathbb{C})$ le \mathbb{R} -sous-espace des ℓ -formes exactes dans U (ce sont tous deux des \mathbb{R} sous-espaces des ℓ -formes car l'opérateur de de Rham d est \mathbb{R} -linéaire). Comme $d^2 = d \circ d = 0$, on a

$$B^\ell(U, \mathbb{K}) \subset Z^\ell(U, \mathbb{K}) \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}).$$

Les groupes abéliens

$$H^\ell(U, \mathbb{R}) = \frac{Z^\ell(U, \mathbb{R})}{B^\ell(U, \mathbb{R})}, \quad H^\ell(U, \mathbb{C}) = \frac{Z^\ell(U, \mathbb{C})}{B^\ell(U, \mathbb{C})}$$

quantifient l'obstruction pour qu'une forme fermée soit exacte. On les appelle *groupes de cohomologie de de Rham*. Ils mesurent (ici par exemple si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) le *défaut d'exactitude* du *complexe de de Rham* (de fibrés) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{X} \times \mathbb{R} \xrightarrow{d} T^* \mathcal{X} \xrightarrow{d} \bigwedge^2 T^* \mathcal{X} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \bigwedge^k T^* \mathcal{X} \longrightarrow 0$$

au dessus de l'ouvert U .

Exemple 2.2 (lemme de Poincaré). Soit U un ouvert de \mathcal{X} *contractile* en un point x_0 , ce qui signifie qu'il existe une application continue $F : U \times [0, 1] \rightarrow U$ telle que $F(x, 0) = x$ et $F(x, 1) = x_0$ pour tout $x \in U$ ¹. Alors, tous les groupes de cohomologie $H^\ell(U, \mathbb{R})$ pour $\ell \in \mathbb{N}^*$ sont triviaux, c'est-à-dire réduits à leur élément neutre². Si U est un ouvert de \mathbb{R}^k *étoilé* par rapport à un point x_0 ($[x_0, x] \subset U$ pour tout $x \in U$), alors U est en particulier contractile en x_0 . On trouvera une preuve du lemme de Poincaré au chapitre 1 de [HY] (théorème 1.5). À faire et à refaire pour bien s'entraîner (on notera certaines analogies entre les outils de la preuve et le travail sur le complexe de Koszul, section 1.7.4).

Dire que \mathcal{X} est *orientable* revient à dire qu'il existe une k -forme volume sur \mathcal{X} tout entier. C'est le cas lorsque $k = 2n$ et \mathcal{X} est la variété sous-jacente à une variété analytique complexe de dimension n .

Lorsque \mathcal{X} est compacte et orientable, $H^k(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ est en fait isomorphe à \mathbb{R} (ceci est dans ce cas équivalent à l'orientabilité).

2.7.4. Cohomologie de Čech et théorème de de Rham

Le théorème de de Rham relie les obstructions à l'exactitude du complexe de de Rham (c'est-à-dire les groupes de cohomologie $H^\ell(U, \mathbb{R})$ lorsque U est un ouvert de \mathcal{X}) à des obstructions cohomologiques de nature exclusivement *topologique* (et non *différentielle* comme celles que matérialisent les groupes $H^\ell(U, \mathbb{R})$ liés au complexe de de Rham, donc à l'opérateur de différentiation des formes d).

On introduit ici brièvement la *cohomologie de Čech* d'une variété différentiable \mathcal{X} de dimension k .

Étant donné un recouvrement $(U_\alpha)_\alpha$ de \mathcal{X} , une k -*cochaîne* de Čech ($k \in \mathbb{N}$) est par définition une application associant à chaque intersection $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$ des U_α pris $k+1$ à $k+1$ une fonction C^∞ à valeurs réelles

$$f_{\alpha_0, \dots, \alpha_k} : U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k} \rightarrow \mathbb{R}.$$

On peut aisément définir une structure de groupe additif sur l'ensemble des k -*cochaines*; on obtient ainsi le *groupe des k -cochaines* $\check{C}^k(\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathbb{R})$ subordonné au recouvrement $\mathcal{U} = (U_\alpha)_\alpha$. On définit un morphisme bord $\delta = \delta_k$ du groupe $\check{C}^k(\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathbb{R})$ dans le groupe $\check{C}^{k+1}(\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathbb{R})$ de la manière suivante : pour $k = 0$ par

$$(\delta_0 f)_{\alpha, \beta} := (f_\beta)|_{U_\alpha \cap U_\beta} - (f_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_\beta},$$

1. Concrètement, ceci vaut dire que l'ouvert U peut se « rétracter continument » sur un de ses points (x_0).

2. Quelque soit l'ouvert U de \mathcal{X} , on a $H^0(U, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n_U}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), où n_U désigne le nombre de composantes connexes de l'ouvert U .

pour $k = 1$ par

$$(\delta^1 f)_{\alpha,\beta,\gamma} = \left[f_{\beta,\gamma} - f_{\gamma,\alpha} + f_{\alpha,\beta} \right]_{|U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma}, \text{ etc.}$$

(on « tourne » de manière cyclique). On a bien sur $\delta_{k+1} \circ \delta_k = \delta \circ \delta = 0$ et l'image $\tilde{B}^k(\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathbb{R})$ de $C^{k-1}(\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathbb{R})$ par $\delta = \delta_{k-1}$ est un sous groupe (dit *sous-groupe des k -cobords* du noyau $\tilde{Z}^k(\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathbb{R})$ de $\delta = \delta_k$ (dit, lui, *sous-groupe des k -cocycles*). Le groupe quotient

$$\check{H}^k(\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathbb{R}) := \tilde{Z}^k(\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathbb{R}) / \tilde{B}^k(\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathbb{R})$$

qui matérialise l'obstruction pour qu'un k -cocycle soit un k -cobord est dit *k -ième groupe de cohomologie de Čech de \mathcal{X} , à valeurs dans \mathbb{R} , subordonné au recouvrement \mathcal{U}* . Pour définir les groupes $\check{H}^k(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire s'affranchir de la dépendance en le recouvrement \mathcal{U}), on prend les *limites inductives* (pour tous les recouvrements \mathcal{U} de \mathcal{X} possibles, de plus en plus « fins », des groupes $\check{H}^k(\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathbb{R})$: ceci revient à raisonner de la même manière que lorsque l'on passe des fonctions sur les ouverts d'un espace topologique aux *germes* de fonctions en un point de cet espace : on prend l'union disjointe des groupes $\check{H}^k(\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathbb{R})$, puis on identifie (c'est une relation d'équivalence) un élément de $\check{H}^k(\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathbb{R})$ et un élément de $\check{H}^k(\mathcal{X}, \tilde{\mathcal{U}}, \mathbb{R})$ lorsque les restrictions de ces classes de k -cocycles coïncident une fois « restreintes » à un raffinement commun aux deux recouvrements \mathcal{U} et $\tilde{\mathcal{U}}$ de \mathcal{X} .

On peut ici énoncer l'important théorème de de Rham :

THEORÈME 2.6 (théorème de de Rham). *Si \mathcal{X} est une variété différentiable (en particulier un ouvert d'une variété différentiable), les groupes de cohomologie de de Rham $H^\ell(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ et de Čech $\check{H}^\ell(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ sont isomorphes, ce pour chaque valeur de $\ell = 0, \dots, k = \dim \mathcal{X}$. Autrement dit, cohomologie différentielle (de de Rham) et topologique (de Čech) coïncident.*

2.7.5. Homologie singulière et formule de Stokes

Étant donnée une variété différentiable \mathcal{X} de dimension k et un ouvert U de \mathcal{X} , on peut introduire pour chaque $\ell = 0, \dots, k$, le groupe des *ℓ -chaînes singulières*¹ $\infty C_\ell(U, \mathbb{R})$; un élément de ce groupe abélien est par définition une combinaison linéaire formelle à coefficients dans \mathbb{R} :

$$\sum_i a_i \gamma_i,$$

où γ_i désigne une application de classe C^∞ sur le simplexe

$$(2.36) \quad \Delta_\ell := \{t_0 P_0 + t_1 P_1 + \dots + t_\ell P_\ell; t_0 + \dots + t_\ell = 1\}$$

($P_0 = (0, \dots, 0)$, $P_1 = (1, 0, \dots, 0)$, ..., $P_\ell = (0, \dots, 0, 1)$), telle que $\gamma_i(\Delta_\ell) \subset U$. Lorsque $\ell = 0$, une *0-chaîne singulière* est ainsi une combinaison linéaire formelle finie de points, lorsque $\ell = 1$, une *1-chaîne singulière* est une combinaison linéaire de chemins paramétrés (de classe C^∞) $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow U$, etc.

1. La terminologie « singulière » tient au fait que le simplexe Δ_ℓ est singulier (sa frontière est seulement régulière par morceaux). Les chaînes singulières introduites ici sont C^∞ , mais on aurait pu aussi imposer la régularité C^q , $q = 0, 1, 2, \dots$ et définir de la même manière les groupes abéliens ${}_q C^\ell(U, \mathbb{R})$. On pouvait aussi remplacer \mathbb{R} par un autre groupe abélien (par exemple \mathbb{Z} , \mathbb{Q} ou \mathbb{C} , etc.).

Si $\gamma_\iota : \Delta_\ell \rightarrow U$ est une telle application C^∞ , on définit son *bord* $\partial_b \gamma_\iota$ ainsi :

$$\partial_b \gamma_\iota := \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \tau_{\gamma_\iota, j}$$

où

$$\tau_{\gamma_\iota, j} : (t_0, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_\ell) \mapsto \gamma_\iota(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_\ell).$$

On définit ensuite le bord d'une ℓ -chaîne singulière par \mathbb{R} -linéarité; on obtient une $(\ell - 1)$ -chaîne singulière. On réalise ainsi un complexe :

$$0 \longrightarrow {}_\infty C_\ell(U, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial_b} {}_\infty C_{\ell-1}(U, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial_b} \dots \xrightarrow{\partial_b} {}_\infty C_0(U, \mathbb{R}) \longrightarrow 0.$$

Il est facile de voir en effet que $\partial_b \circ \partial_b = 0$, donc que l'image d'un morphisme est dans le noyau du morphisme suivant. Ce complexe est dit *complexe d'homologie singulière*¹

On introduit les *groupes d'homologie singulière*

$$(2.37) \quad {}_\infty H_\ell(U, \mathbb{R}) = \frac{{}_\infty Z_\ell(U, \mathbb{R})}{{}_\infty B_\ell(U, \mathbb{R})}.$$

Ici ${}_\infty Z_\ell(U, \mathbb{R})$ désigne le noyau de ∂_b dans ${}_\infty C_\ell(U, \mathbb{R})$, que l'on appelle *sous-groupe des ℓ -cycles singuliers*, tandis que ${}_\infty B_\ell(U, \mathbb{R})$ désigne l'image de ${}_\infty C_{\ell-1}(U, \mathbb{R})$ par ∂_b dans ${}_\infty C_\ell(U, \mathbb{R})$ et est appelé sous-groupe des *sous-groupe des ℓ -bords*. Les groupes quotient (2.37) rendent donc compte du défaut d'exactitude du complexe d'homologie singulière (2.37).

On dispose, lorsque \mathcal{X} est orientable de cette version géométrique de la formule de Stokes :

THEORÈME 2.7 (formule de Stokes géométrique, voir par exemple [HY], section 3.7). *Soit \mathcal{X} une variété différentiable orientable. Si c est une ℓ chaîne et ω une $\ell - 1$ forme différentielle, on a*

$$\int_{\partial_b c} \omega = \int_c d\omega$$

(formule de Stokes). L'intégration d'une ℓ -forme φ sur une ℓ -chaîne

$$c = \sum a_\iota \gamma_\iota$$

est ici définie par

$$\int_c \varphi = \sum_\iota a_\iota \int_{\Delta_\ell} \gamma_\iota^*[\varphi]$$

(en termes du pull-back des formes différentielles). Pour tout ouvert U de \mathcal{X} , le groupe $H^\ell(U, \mathbb{R})$ de cohomologie de de Rham (considéré ici comme \mathbb{R} -espace vectoriel) est exactement le dual du \mathbb{R} -espace ${}_\infty H_\ell(U, \mathbb{R})$ (lui aussi considéré comme \mathbb{R} -espace vectoriel), la dualité étant réalisée par

$$(\dot{c}, \dot{\omega}) \mapsto \int_c \omega.$$

De plus, le groupe $H^\ell(U, \mathbb{R})$ de cohomologie de de Rham (toujours considéré comme \mathbb{R} -espace vectoriel) est aussi, en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel, le dual de ${}_0 H_\ell(U, \mathbb{R})$

1. Ici de classe C^∞ et à valeurs dans \mathbb{R} , mais on aurait pu pendre aussi de classe C^q , $q = 0, 1, \dots$, et à valeurs dans $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$, etc.

(ce qui veut dire que l'on peut se contenter de prendre les chaînes singulières avec la régularité minimale, c'est-à-dire seulement continues).

On exploite souvent la formule de Stokes dans ce cours, surtout sur la variété sous-jacente (donc orientable) à une variété analytique complexe.

2.7.6. Formes différentielles et opérateur de de Rham sur une variété analytique complexe

Sur une variété analytique complexe de dimension complexe n (donc réelle $2n$ pour ce qui est de la variété sous-jacente $\widetilde{\mathcal{X}}$), on dispose pour tout $\ell = 0, \dots, 2n$, de la décomposition

$$\bigwedge^{\ell}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T^* \widetilde{\mathcal{X}}) = \bigwedge^{\ell} T^{(1,0)*} \mathcal{X} \oplus T^{(0,1)*} \mathcal{X} = \bigoplus_{p+q=\ell} \left(\bigwedge^p T^{(1,0)*} \mathcal{X} \right) \wedge \left(\bigwedge^q T^{(0,1)*} \mathcal{X} \right).$$

Une (p, q) -forme sur un ouvert U de \mathcal{X} est par définition une section au dessus de U du fibré

$$\left(\bigwedge^p T^{(1,0)*} \mathcal{X} \right) \wedge \left(\bigwedge^q T^{(0,1)*} \mathcal{X} \right).$$

En coordonnées locales au voisinage d'un point de U , une telle (p, q) -forme s'exprime sous la forme

$$\omega = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n}} \omega_{I,J}(x, y) \bigwedge_{\kappa=1}^p dz_{i_{\kappa}} \wedge \bigwedge_{\kappa=1}^q d\bar{z}_{j_{\kappa}},$$

où les $\omega_{I,J}$ sont des fonctions C^{∞} en les variables locales réelles $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$. Toute section du fibré

$$\bigwedge^{\ell}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T \widetilde{\mathcal{X}}) = \bigwedge^{\ell}(T^{(1,0)*} \mathcal{X} \oplus T^{(0,1)*} \mathcal{X}),$$

c'est-à-dire toute ℓ -forme différentielle à valeurs complexes définie dans U , se décompose ainsi de manière unique comme somme de (p, q) -formes définies dans U , avec $p+q = \ell$. On dit qu'une (p, q) -forme est de *bidegré* (p, q) .

L'opérateur de de Rham sur la variété différentiable sous-jacente \mathcal{X} (agissant de manière \mathbb{R} -linéaire sur le \mathbb{R} -espace vectoriel des ℓ -formes différentielles dans U) se scinde comme la somme

$$d = \partial + \bar{\partial},$$

où l'opérateur ∂ (« d -rond ») transforme les (p, q) -formes (avec $p+q = \ell$) en $(p+1, q)$ -formes, tandis que l'opérateur $\bar{\partial}$ (« d -barre ») transforme les (p, q) -formes (toujours avec $p+q = \ell$) en $(p, q+1)$ -formes. Comme $d^2 = 0$, on a

$$(2.38) \quad \partial^2 = \partial \circ \partial = 0, \quad \bar{\partial}^2 = \bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0, \quad \partial \circ \bar{\partial} = -\bar{\partial} \circ \partial.$$

Autre opérateur important, l'opérateur de Bott-Chern

$$dd^c := \frac{i}{2\pi} \partial \circ \bar{\partial}.$$

Si f est une fonction holomorphe ne s'annulant pas dans un ouvert de \mathbb{C}^n , on observe que

$$(2.39) \quad dd^c \log |f|^2 = \frac{i}{2\pi} \partial \left[\frac{\bar{\partial} f}{f} \right] = \frac{i}{2\pi} \partial \left[\frac{df}{f} \right] = 0.$$

Lorsque $n = 1$, on observe que, si f est une 0-forme,

$$dd^c f = \frac{i}{2\pi} \times \frac{\Delta[f]}{4} (-2i dz \wedge d\bar{z}) = \frac{\Delta[f]}{4\pi} dx \wedge dy,$$

où Δ désigne l'opérateur de Laplace dans \mathbb{R}^2 . On a également (toujours si $n = 1$, si f est une fonction holomorphe non identiquement nulle dans un ouvert connexe de \mathbb{C}), au sens des distributions dans $U \subset \mathbb{C}$ cette fois¹ :

$$(2.40) \quad dd^c \log |f(z)|^2 = \sum_{\alpha \in f^{-1}(\{0\})} \delta_\alpha dx \wedge dy.$$

Le second membre de cette formule est une forme différentielle à coefficients distributions, ce que l'on appelle un *courant*. Cette formule (2.40) s'étend au cadre de n variables et devient la *formule de Lelong-Poincaré* : si φ est une $(n-1, n-1)$ -forme test (à coefficients C^∞ à support compact dans un ouvert U de \mathbb{C}^n) et que f est une fonction holomorphe dans U , on a

$$\langle dd^c \log |f|^2, \varphi \rangle = \langle \log |f|^2, dd^c \varphi \rangle = \int_{\{f=0\}^{\text{reg}}} \varphi.$$

Exemple 2.3 (forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$). La fonction

$$[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \longmapsto \log(|z_0|^2 + \dots + |z_n|^2)$$

n'est pas bien définie dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (car ce n'est pas une fonction homogène de degré 0 des coordonnées homogènes). En revanche, il résulte de (2.39) que la forme

$$dd^c \log(|z_0|^2 + \dots + |z_n|^2)$$

est une $(1, 1)$ -forme bien définie globalement dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$; il y a en effet « raccord » de carte en carte. Cette $(1, 1)$ forme induit sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ une métrique hermitienne, dite *métrique de Fubini-Study*. On vérifiera (pour s'entraîner aux calculs) que

$$(2.41) \quad \begin{aligned} & (dd^c \log(|z_0|^2 + \dots + |z_n|^2))^{\wedge n} \\ &= dd^c \log(|z_0|^2 + \dots + |z_n|^2) \wedge (dd^c \log(|z_0|^2 + \dots + |z_n|^2))^{\wedge n-1} \\ &= d \left[\frac{i}{2\pi} \bar{\partial} \log(|z_0|^2 + \dots + |z_n|^2) \wedge (dd^c \log(|z_0|^2 + \dots + |z_n|^2))^{\wedge n-1} \right] \end{aligned}$$

1. Dans le même ordre d'idées, vous pourrez aussi vérifier en exercice que l'on a au sens des distributions dans \mathbb{C} la formule

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{1}{\pi z} \right] = \delta_0$$

Ceci correspond à la version « distributions » de la formule de Cauchy.

(utilisez ici $d \circ dd^c = d^2 \circ d^c = 0$). Cette forme volume est une forme positive. Elle est normalisée de manière à ce que

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})} (dd^c \log(|z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2))^{\wedge n} \\
 &= \int_{\mathbb{C}^n} (dd^c \log(1 + \|\zeta\|^2))^{\wedge n} \\
 (2.42) \quad &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_n(0,R)} (dd^c \log(1 + \|\zeta\|^2))^{\wedge n} \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_n(0,R)} d \left[\frac{i}{2\pi} \bar{\partial}(\log(1 + \|\zeta\|^2)) \wedge (dd^c \log(1 + \|\zeta\|^2))^{\wedge n-1} \right] \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\|\zeta\|=R} \left(\frac{i}{2\pi} \bar{\partial}(\log(1 + \|\zeta\|^2)) \wedge (dd^c \log(1 + \|\zeta\|^2))^{\wedge n-1} \right) = 1.
 \end{aligned}$$

Cette formule (2.42) correspond au calcul du degré de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (ou de l'espace affine $A_n(\mathbb{C})$); elle n'est d'ailleurs pas sans rappeler la formule (2.32) exprimant le degré de (f_1, \dots, f_n) lorsque (f_1, \dots, f_n) est une suite régulière dans l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. La métrique de Fubini-Study permet d'ailleurs plus généralement d'exprimer le degré d'un sous-ensemble algébrique projectif \mathbb{V} de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de dimension pure comme un volume, à savoir :

$$\deg \mathbb{V} = \int_{\mathbb{V}^{\text{reg}}} (dd^c \log(|z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2))^{\wedge \dim \mathbb{V}}.$$

Cette formule est la *formule de Wirtinger*; avec le nombre de points d'intersection avec un sous-espace projectif de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de codimension k , ou bien le degré du revêtement obtenu lorsque l'on décrit \mathbb{V} suivant l'algorithme de normalisation d'Emmy Noether, c'est là une troisième incarnation du degré d'un sous-ensemble algébrique projectif de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Cette fois, c'est à la géométrie hermitienne que nous faisons appel en exploitant la métrique hermitienne de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ pour « mesurer » en terme de cette métrique le degré de \mathbb{V} comme un volume.

Pour vous familiariser avec la « gymnastique » du maniement des (p, q) -formes, etc., le chapitre 0 de [GH] (sections 1 et 2) est une très bonne référence que je vous conseille vivement.

Bibliographie

- [Bern] I. N. Bernstein, *The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter*, Functional Analysis and its applications **6** (1972), pp. 273-285.
- [Bjo] J. E. Björk, *Rings of differential operators*, North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [Blum] L. Blum, Computing over the reals : where Turing meets Newton, texte d'une conférence Emmy Noether (2001) en ligne :
<http://www.cs.cmu.edu/~lblum/PAPERS/TuringMeetsNewton.pdf>
- [BriS] J. Briançon, H. Skoda, *Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de \mathbb{C}^n* , Comptes Rendus Acad. Sciences Paris, Sér. A, **278** (1974), pp. 949-951.
- [Brow] D. W. Brownawell, *Bounds for the degrees in the Nullstellensatz*, Ann. of Math. **126** (1987), pp. 577-591.
- [Clad] E. Clader, Hilbert polynomial and the degree of a projective variety, Michigan University, Ann Arbor, 2010 (notes d'après un cours de W. Fulton)
- [CLO1] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Undergraduate Texts in Mathematics **135**, Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [CLO2] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Using algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **135**, Springer-Verlag, New-York, 1998.
- [Dem] J. P. Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry*, ouvrage disponible en ligne sur le site <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf>
- [Eis] D. Eisenbud, *Commutative algebra, with a view towards algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer, New York, 1995.
- [GH] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience, New York, 1978.
- [Gyo] A. Gyoja, *Bernstein-Sato's polynomial for several analytic functions*, J. Math. Kyoto Univ. **33** (1993), no. 2, pp. 399-411.
- [Her] G. Hermann, *Die Frage der endlich vielen Schritte in der theorie der polynomideale*, Math. Ann. **95** 1926, pp. 736-788.
- [Hor] L. Hörmander, *An introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland Publishing Company, 1973.
- [Hun] C. Huneke, *Uniform bounds in Noetherian rings*, Invent. Math. **107** (1992), pp. 203-223.
- [HY] Alain Hénaut et Alain Yger, *Éléments de Géométrie*, Éditions Ellipses Marketing, Paris, 2001.
- [Jel] Z. Jelonek, *On the effective Nullstellensatz*, Inventiones Math. **162** (2005), no. 1, pp. 1-17.
- [Ka] M. Kashiwara, *B-functions and holonomic systems*, Inventiones Math. **38** (1976/77), no. 1, pp. 33-53.
- [KrP] S. Krantz, H. Parks, *Geometric Integration Theory*, Series Cornerstones (ebook), Birkhäuser, Basel, 2008.
- [Kol1] J. Kollár, *Sharp effective Nullstellensatz*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), pp. 963-975.
- [Kol2] J. Kollár, *Effective Nullstellensatz for arbitrary ideals*, Jour. Eur. Math. Soc. **1** (1999), no. 3, pp. 313-337.
- [Lang] S. Lang, *Algebra*, Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002.

- [Laz] R. Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry*, I-II, vol. 48-49, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, 2004.
- [LS] J. Lipman, A. Sathaye, *Jacobian ideals and a theorem of Briançon-Skoda*, Michigan Math. J. **28** (1981), pp. 199–222.
- [LT] J. Lipman, B. Teissier, *Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals*, Michigan Math. J. **28** (1981), pp. 97–116.
- [MayMey] E : Mayr, A. Meyer, *The complexity of the word problem for commutative semi-groups and polynomial ideals*, Adv. in Math. **46** (1982), 305-329.
- [MW] D. Masser, G. Wüstholz, *Fields of large transcendence degree generated by values of elliptic functions*, Inventiones math. **72** (1983), pp. 407-464.
- [NR] D.G. Northcott, D. Rees, *Reductions of ideals in local rings*, Camb. Phil. Soc. **50** (1954), pp. 145–158.
- [Pal] V. P. Palamodov, *Linear Operators with Constant Coefficients*, Springer-Verlag, New-York, 1970.
- [Perr] O. Perron, *Algebra I (Die Grundlagen)*, Berlin, Leipzig, Walter de Gruyter 1927.
- [Sab] C. Sabbah, *Proximité évanescence II, Equations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques*, Compositio Math **64** (1987), no. 2, pp. 213-241.
- [SwH] I. Swanson, C. Huneke, *Integral closure of Ideals, Rings and Modules*, London Mathematical Society, Lecture Notes 336, Cambridge University Press, 2006.
- [Tei2] B. Teissier, Volumes des corps convexes, géométrie et algèbre, Leçon de Mathématiques d’Aujourd’hui, volume 3, éditions Cassini, Paris 2007, texte en ligne sur <https://www.imj-prg.fr/~bernard.teissier/documents/LMA3.Teissier.v6.pdf>
- [Swan] I. Swanson, the first Mayr-Meyer example, [arXiv:math/0209154v1](https://arxiv.org/abs/math/0209154v1), 2002.
- [VdW] B. L. Van der Waerden, *Algebra*, Springer-Verlag, New-York, 1959.
- [Weil] A. Weil, L’intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, Math. Ann. **111** (1935), pp. 178-182.
- [Y1] A. Yger, *Analyse Complexe, un regard analytique et géométrique*, Collection Références Sciences, Editions Ellipses Marketing, Paris, 2014.
- [Y2] A. Yger, *Géométrie différentielle complexe*, Notes d’un cours à Niamey, disponible en ligne sur <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00469403>