

Géométrie Différentielle Complexe

Alain Yger

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ BORDEAUX 1, TALENCE 33405,
FRANCE

E-mail address: `Alain.Yger@math.u-bordeaux1.fr`

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 32C30, 32-02 ;
Secondary 13, 13P10

Key words and phrases. `amsbook`, AMS- \LaTeX

RÉSUMÉ. Ce texte constitue la version complète d'un cours de DEA de 50 heures dispensé à la Faculté des Sciences de l'Université Abdou Mounoumi de Niamey (Niger) entre Décembre 2009 et Janvier 2010, dans le cadre du programme de troisième cycle « Systèmes Dynamiques ». Je tiens à remercier sincèrement le Professeur Modi Mounkaila, à l'initiative de la mise en place du programme dans lequel ce cours était amené à s'insérer, ainsi que, bien sûr, tout le personnel de l'université, pour l'extrême gentillesse de l'accueil qui m'a accompagné tout au long de mon séjour au Niger.

Table des matières

Préface	vii
Chapitre 1. Les objets géométriques en géométrie complexe	1
1.1. Variétés différentiables réelles et fibrés réels ou complexes	1
1.2. Structure hermitienne sur un fibré vectoriel complexe	7
1.3. Formes de Chern d'un fibré holomorphe ; classes caractéristiques	19
1.4. Les objets de la géométrie analytique complexe	22
Chapitre 2. Le concept de positivité en géométrie complexe et ses avatars	51
2.1. Formes différentielles, courants, courants positifs	51
2.2. Nombres de Lelong d'un (p, p) -courant positif fermé	61
2.3. Courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique	63
2.4. Stratification de Siu	75
2.5. Autour des notions géométrique et analytique de résidu	80
2.6. La formule de Lelong-Poincaré	96
Chapitre 3. Autour des idées de Hodge en géométrie complexe	99
3.1. Structures hermitiennes ou kählériennes	99
3.2. Opérateurs différentiels sur les fibrés (cadre riemannien)	103
3.3. Opérateurs en géométrie riemannienne, hermitienne, kählérienne	108
3.4. Le théorème de décomposition de Hodge (cadre kählérien)	115
3.5. Cohomologie de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$	119
3.6. Fibrés holomorphes positifs, les divers concepts	121
3.7. Positivité et théorèmes d'annulation	123
3.8. Notions d'amplitude ; exemples projectifs et toriques	125
3.9. Un critère d'algébricité : le théorème de Kodaira	136
Chapitre 4. La résolution L^2 du D''	141
4.1. Le cadre kählérien « complet »	141
4.2. Le cadre kählérien « non complet »	144
4.3. Méthodes L^2 et résolution du complexe de Koszul	148
Bibliographie	153
Index	159

Préface

L'objectif de ce cours est de proposer une initiation aux outils de la géométrie complexe en plusieurs variables. Ce cours fait suite au cours d'*Introduction à l'Analyse Complexe en Plusieurs Variables* dispensé par Philippe Charpentier [Chap]. Nous supposons donc ici acquises les bases de l'analyse complexe en une et plusieurs variables, telles que par exemple on les trouve dans les ouvrages de C.A. Berenstein et R. Gay [BG] et de L. Hörmander [Hor], ainsi qu'une certaine familiarité avec la *géométrie* (différentielle réelle, riemannienne, algébrique dans le plan projectif complexe) au niveau Master, telle qu'elle est par exemple présentée dans [HY]. Ce cours développera les aspects géométriques, tant en ce qui concerne les aspects relevant de la *géométrie différentielle* (champs de vecteurs, fibrés hermitiens et opérateurs différentiels sur ces fibrés, connexions, classes et formes de Chern, etc.) que ceux relevant de la *géométrie analytique complexe* et de ses avatars en *géométrie algébrique*. Les *méthodes transcendantes* jouent un rôle important en géométrie algébrique du fait du très important concept de *positivité* (courants, concepts de positivité pour les fibrés vectoriels), ouvrant la voie aux théorèmes d'annulation ou de plongement (Kodaira, Nakano, etc.). L'analyse harmonique et la théorie de Hodge en géométrie kählérienne (sur une variété analytique compacte équipée d'une structure kählérienne, telle que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ équipé de sa métrique de Fubini-Study) y auront également leur place, illustrées en cela par des exemples souvent empruntés à la géométrie des variétés toriques (sous ses aspects symplectiques ou algébriques). Les techniques L^2 seront également transposées du cadre de l'analyse pluri-complexe à celui des variétés kählériennes et des fibrés hermitiens ayant ces variétés comme base. L'une de nos références de base sera l'ouvrage de J.P. Demailly [De0]. Certains des tous récents travaux de M. Andersson et de son équipe [And1, And2, And3] seront en particulier introduits. La théorie des courants positifs, ainsi que les objets géométriques que sont les courants d'intégration et les courants résiduels, fera l'objet d'un chapitre de ce cours. On intégrera à ces notes une approche en direction des applications arithmétiques *via* les récents développements de la théorie d'Arakelov (voir [BGS]), mettant en lumière l'importance de la formule de Lelong-Poincaré, de l'opérateur de Monge-Ampère et de l'équation de Green. En ce qui concerne les aspects relevant de la géométrie analytique transcendante (et de ses applications en géométrie algébrique), l'ouvrage de P. Griffiths et J. Harris [GH] sera également une référence précieuse. Bien sûr, tous les résultats énoncés dans ce cours ne seront pas démontrés, loin de là ! Notre souci ici est d'introduire les lignes directrices des arguments et de faire en sorte que ces notes (bien que très partielles) puissent servir de point de départ pour de futures directions de recherche.

Alain Yger

Les objets géométriques en géométrie complexe

On présente dans ce chapitre les objets géométriques (relevant en particulier de la géométrie différentielle) tels qu'ils interviendront en *géométrie pluri-complexe*. Le cadre *riemannien* (plutôt de fait *hermitien*) sera plus particulièrement développé, l'aspect métrique (intrinsèquement lié à la notion de *positivité*) étant pour nous fondamental. Pour ce premier chapitre, outre la référence au chapitre 5 de J.P. Demailly [De0], on pourra également s'appuyer sur le livre de R.O. Wells [We0]. La rédaction de ce chapitre est inspirée d'un cours de DEA dispensé à Bordeaux en 1991-1992 [Y2].

1.1. Variétés différentiables réelles et fibrés réels ou complexes

1.1.1. Variétés différentiables (C^∞) réelles. La donnée d'une *variété différentiable réelle* de dimension (réelle) N de classe C^∞ équivaut à la donnée :

- (1) d'un espace topologique séparé \mathcal{X} , dénombrable à l'infini (i.e. union dénombrable croissante de compacts) ;
- (2) d'un atlas (U_α, τ_α) « cartographiant » \mathcal{X} , ce qui signifie que les ouverts U_α recouvrent \mathcal{X} , que τ_α est, pour chaque α , un homéomorphisme entre U_α et un ouvert V_α de \mathbb{R}^N , et que, pour toute paire d'indices (α, β) , $\tau_{\alpha\beta} = \tau_\alpha \circ (\tau_\beta)^{-1}$ est un difféomorphisme de classe C^∞ entre $\tau_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ et $\tau_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.

La notion de *champ de vecteurs réel* sur \mathcal{X} (ou sur un ouvert de \mathcal{X}) peut être pensée de trois manières équivalentes ; ces trois points de vue reposent sur les trois manières de définir, au point courant x de \mathcal{X} , l'espace tangent réel $T_{\mathbb{R},x}(\mathcal{X})$ à \mathcal{X} . Ces trois manières de « penser » ce \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension N sont les suivantes :

- (1) le premier modèle est un modèle géométrique : si U_α est un ouvert de carte contenant x , on introduit les germes de courbes $t \in I =]-\epsilon, \epsilon[\mapsto \gamma(t) \in U_\alpha$ tracés sur \mathcal{X} au voisinage de x , passant par x , et de classe C^1 ($\gamma(0) = x$ et $\tau_\alpha \circ \gamma$ est de classe C^1), puis le \mathbb{R} -espace vectoriel des *classes de tangence* en x de ces germes de courbes (la classe de tangence de (I, γ) est matérialisée par $d_0[\tau_\alpha \circ \gamma](1)$) ;
- (2) le second modèle est un premier modèle algébrique, consistant à concevoir le \mathbb{R} -espace vectoriel $T_{\mathbb{R},x}(\mathcal{X})$ comme le \mathbb{R} -espace vectoriel des *dérivations*¹ de la \mathbb{R} -algèbre $\mathcal{E}_{\mathcal{X},x}$ des germes de fonctions de classe C^∞ à valeurs réelles au point x ; ce modèle décrit l'élément de $T_{\mathbb{R},x}(\mathcal{X})$ en termes de son action ;

¹C'est-à-dire une application \mathbb{R} -linéaire à valeurs réelles obéissant à la règle de Leibniz : $D[fg] = f(a)D[g] + g(a)D[f]$.

- (3) le troisième modèle est plus encore un modèle algébrique : on introduit l'algèbre $\mathcal{E}_{\mathcal{X},x}$ (pensée cette fois comme un anneau local), son idéal maximal $\mathfrak{M}_{\mathcal{X},x}$, et l'on pense les éléments de $T_{\mathbb{R},x}(\mathcal{X})$ comme les éléments du dual du quotient $\mathfrak{M}_{\mathcal{X},x}/(\mathfrak{M}_{\mathcal{X},x})^2$, considéré comme \mathbb{R} -espace vectoriel.

1.1.2. Notion de fibré vectoriel (réel ou complexe) localement trivial, de rang fini. La collection des $T_{\mathbb{R},x}(\mathcal{X})$, $x \in \mathcal{X}$, ainsi définie est visualisée sous la forme d'un objet géométrique, celui de *fibré vectoriel réel localement trivial* de rang m (ici $m = N$) et de classe C^∞ au dessus de \mathcal{X} . Il s'agit de la donnée :

- (1) d'une collection, indexée par la base \mathcal{X} , de \mathbb{R} -espaces vectoriels tous de dimension N , dits fibres (le \mathbb{R} -espace vectoriel d'indice x étant dit *fibre* au dessus du point x);
- (2) d'une structure de variété différentielle elle aussi de classe C^∞ (et de dimension réelle $N + m$) sur l'ensemble $\bigcup_{x \in \mathcal{X}} (x \times \mathbb{R}^m)$, couplée avec la donnée d'une projection C^∞ $\pi : E \rightarrow \mathcal{X}$, telle que, pour chaque $x \in \mathcal{X}$, il existe un voisinage U_x de x dans \mathcal{X} , un difféomorphisme θ_x de classe C^∞ entre $\pi^{-1}(U_x)$ et $U_x \times \mathbb{R}^m$ (π désignant la projection $(x, \xi) \mapsto x$) de manière à ce que

$$\pi_{\pi^{-1}(U_x)}(e) = \text{pr}_{U_x}(\theta_x(e)), \quad \forall e \in \pi^{-1}(U_x),$$

où $\text{pr}_{U_x}(x', v) = x'$ pour $x' \in U_x$ et $v \in \mathbb{R}^m$, et que, pour tout $x' \in U_x$, $(\theta_x)|_{E_{x'}}$ soit un \mathbb{R} -isomorphisme entre $E_{x'}$ et \mathbb{R}^m .

Lorsqu'il existe un tel difféomorphisme C^∞ entre $\pi^{-1}(U)$ et $U \times \mathbb{R}^m$, on dit que le fibré est *trivialisable* au dessus de l'ouvert U . Un fibré vectoriel réel localement trivial de rang m est donc par définition même toujours localement trivialisable; par contre, il n'est en général pas trivial, c'est-à-dire trivialisable au dessus de toute sa base \mathcal{X} .

EXEMPLE 1.1. L'exemple du fibré tangent $T_{\mathbb{R}}(\mathcal{X})$. En définissant

$$\tilde{\tau}_{\pi^{-1}(U_\alpha)}(x, \dot{\gamma}) = (\tau_\alpha(x), d_0(\tau_\alpha \circ \gamma)(1)),$$

on construit précisément une structure de fibré vectoriel réel localement trivial de classe C^∞ et de rang N sur $\bigcup_{x \in \mathcal{X}} (x \times T_{\mathbb{R},x}(\mathcal{X}))$; c'est ainsi qu'est défini l'atlas. Ce sera le fibré tangent réel $T_{\mathbb{R}}(\mathcal{X})$. Les *sections de classe C^∞* de $T_{\mathbb{R},x}(\mathcal{X})$ au dessus d'un ouvert U de \mathcal{X} de ce fibré, c'est-à-dire les applications ξ de classe C^k de U dans $T_{\mathbb{R}}(\mathcal{X})$ (tous deux équipés de leurs structures C^∞) telles en plus que $\xi(x) \in T_{\mathbb{R},x}(\mathcal{X})$, sont par définition les *champs de vecteurs réels* de classe C^∞ sur l'ouvert U . Dans une carte locale $U_\alpha = \tau_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ au voisinage d'un point x , on représentera un champ de vecteurs sous la forme

$$\sum_{j=1}^N a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

où a_1, \dots, a_N sont des fonctions de classe C^∞ dans $V_\alpha = \tau(U_\alpha)$.

Une manière plus abstraite d'appréhender la notion de fibré vectoriel réel localement trivial et de classe C^∞ est la suivante : un tel fibré est (à isomorphisme entre fibrés localement triviaux et de même rang près ²) la donnée d'un recouvrement $(U_\alpha)_\alpha$

²On dit que deux \mathbb{K} -fibrés vectoriels $E_1 \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{X}$ et $E_2 \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{X}$ localement triviaux et de même rang sont *isomorphes* si et seulement si il existe un difféomorphisme C^∞ $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, un difféomorphisme C^∞ $F : E_1 \rightarrow E_2$ tels que $f \circ \pi_1 = \pi_2 \circ F$.

de \mathcal{X} par des ouverts et d'un 1-cocycle au sens de Čech, c'est-à-dire, pour chaque (α, β) , d'une application de classe C^∞

$$g_{\alpha, \beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$$

telle que

$$[g_{\alpha, \beta} \circ g_{\beta, \gamma}](x) = g_{\alpha, \gamma}(x) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma, \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

La structure de fibré vectoriel localement trivial de rang m et de classe C^∞ associée à ce 1-cocycle est obtenue en équipant l'union disjointe des $\{U_\alpha\} \times \mathbb{R}^m$ (lorsque α parcourt la famille de tous les indices) de la structure quotient consistant à quotienter par la relation d'équivalence autorisant l'identification des couples (x, v) et $(x, g_{\alpha, \beta}(x).v)$ lorsque α, β sont deux indices quelconques et $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Cette manière de voir autorise les opérations sur les fibrés vectoriels réels localement triviaux (à isomorphisme entre \mathbb{R} -fibrés de même rang près), par exemple l'addition $E_1 \oplus E_2$ de deux fibrés de rangs m_1 et m_2 (cela donne un fibré de rang $m_1 + m_2$), les puissances extérieures (jusqu'à la puissance m , dit aussi *fibré déterminant*) d'un fibré vectoriel réel loc. trivial $E \rightarrow \mathcal{X}$ de rang m (la puissance extérieure p -ième est un fibré de rang $m!/(p!(m-p)!)$ si $p = 0, \dots, m$, la puissance d'ordre 0 étant par convention le fibré trivial $\mathcal{X} \times \mathbb{R}$), le fibré dual $E^* \rightarrow \mathcal{X}$ d'un fibré vectoriel réel loc. trivial de rang m , le produit tensoriel $E_1 \otimes E_2$ de deux fibrés vectoriels réels loc. triviaux de rangs respectifs m_1 et m_2 (c'est un fibré de rang $m_1 \times m_2$), etc. Dans chaque cas, on travaille avec un recouvrement de \mathcal{X} qui soit un raffinement des deux recouvrements permettant de définir les 1-cocycles définissant l'un $E_1 \rightarrow \mathcal{X}$, l'autre $E_2 \rightarrow \mathcal{X}$. L'ensemble des classes d'isomorphismes des fibrés vectoriels réels localement triviaux et de rang 1 (dits aussi *fibrés en droites*) peut ainsi être équipé d'une structure de groupe commutatif. On peut également définir, à isomorphisme entre fibrés localement triviaux et de même rang près, étant donnés deux fibrés vectoriels réels loc. triviaux E_1 et E_2 de rangs respectifs m_1 et m_2 , le fibré vectoriel loc. trivial $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1, E_2)$ dont la fibre au dessus de x est $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_{1,x}, E_{2,x})$ (il s'agit d'un fibré vectoriel réel loc. trivial de rang $m_1 \times m_2$, dont on notera qu'il est isomorphe à $E_2 \otimes E_1^*$). On note ici que les fibrés $E_1 \oplus E_2 \rightarrow \mathcal{X}$ (*resp.* $E_1 \otimes E_2 \rightarrow \mathcal{X}$) et $E_2 \oplus E_1 \rightarrow \mathcal{X}$ (*resp.* $E_2 \otimes E_1 \rightarrow \mathcal{X}$) définis suivant ce procédé ne sont pas égaux, mais simplement isomorphes (les 1-cocycles ne sont ici pas les mêmes!); l'opération naive correspondant à prendre (au dessus de chaque point de \mathcal{X}) la somme directe (*resp.* le produit tensoriel) des fibres ne suffit pas à justifier de la construction d'un fibré; cette opération ne décrit en effet pas ce qu'est l'application π de projection et il faut en effet prendre garde à la construction des isomorphismes de trivialisation!

EXERCICE 1.2. Pour chacun des exemples ci-dessus (somme, produit tensoriel, fibré $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\bullet, \bullet)$), indiquer comment se déduit le 1-cocycle $(G_{\alpha, \beta})$ à partir des cocycles $(g_{\alpha, \beta}^{(1)})$ et $(g_{\alpha, \beta}^{(2)})$ des deux fibrés en jeu. Même question pour ce qui concerne le 1-cocycle attaché au fibré dual E^* .

Indications : pour la définition du 1-cocycle $G_{\alpha, \beta}$ correspondant à la *somme directe* (à isomorphisme entre fibrés localement triviaux près), on considèrera par exemple les applications

$$x \in U_\alpha \cap U_\beta \longmapsto G_{\alpha, \beta}(x) := \begin{bmatrix} g_{\alpha, \beta}^{(1)}(x) & 0 \\ 0 & g_{\alpha, \beta}^{(2)}(x) \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(m_1 + m_2, \mathbb{R});$$

pour la définition du 1-cocycle $G_{\alpha,\beta}$ correspondant au *produit tensoriel* (à isomorphisme entre fibrés localement triviaux près), on considèrera l'application

$$x \in U_\alpha \cap U_\beta \longmapsto G_{\alpha,\beta}(x) := g_{\alpha,\beta}^{(1)}(x) \otimes g_{\alpha,\beta}^{(2)}(x),$$

où $g_{\alpha,\beta}^{(1)}(x) \otimes g_{\alpha,\beta}^{(2)}(x)$ désigne l'élément de

$$\mathrm{GL}(m_1 m_2, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{m_1} \otimes \mathbb{R}^{m_2}, \mathbb{R}^{m_1} \otimes \mathbb{R}^{m_2})$$

qui à $e_{j_1} \otimes e_{j_2}$, $j_1 = 1, \dots, m_1$, $j_2 = 1, \dots, m_2$ (ce sont les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^{m_1} \otimes \mathbb{R}^{m_2} \simeq \mathbb{R}^{m_1 m_2}$) associe $(g_{\alpha,\beta}^{(1)}(x) \cdot e_{j_1}) \otimes (g_{\alpha,\beta}^{(2)}(x) \cdot e_{j_2})$. Pour la définition de la classe d'isomorphisme du fibré dual $E^* \rightarrow \mathcal{X}$, c'est le 1-cocycle

$$(U_\alpha \cap U_\beta, [{}^t g_{\alpha,\beta}]^{-1})$$

qu'il convient de considérer. Pour la construction (à isomorphisme près) du fibré $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1, E_2) \rightarrow \mathcal{X}$, le 1-cocycle à considérer est le 1-cocycle $(U_\alpha \cap U_\beta, G_{\alpha,\beta})$, où

$$G_{\alpha,\beta}(x) := g_{\alpha,\beta}^{(2)} \otimes [{}^t g_{\alpha,\beta}^{(1)}]^{-1}(x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{m_2} \otimes (\mathbb{R}^{m_1})^*, \mathbb{R}^{m_2} \otimes (\mathbb{R}^{m_1})^*) \simeq \mathrm{GL}(m_1 m_2, \mathbb{R})$$

étant entendu que l'on exploite ici l'isomorphisme entre $\mathbb{R}^{m_2} \otimes (\mathbb{R}^{m_1})^*$ et le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{m_1}, \mathbb{R}^{m_2})$ qui à $f_{j_l} \otimes e_{j_k}^*$ associe l'homomorphisme de \mathbb{R}^{m_1} dans \mathbb{R}^{m_2} de matrice $[\delta_{j_l j_k}]$ dans les bases canoniques (e_1, \dots, e_{m_1}) et (f_1, \dots, f_{m_2}) .

Dans tout ce qui précède, tout en nous appuyant sur le concept de variété différentiable réelle, nous pouvons aussi définir la notion de fibré vectoriel complexe de rang m (et localement trivial) sur \mathcal{X} . Les fibres E_x sont cette fois des \mathbb{C} -espaces vectoriels et θ_x est un difféomorphisme de classe C^∞ entre $\pi^{-1}(U_x)$ et $U_x \times \mathbb{C}^m$ ($(\theta_x)|_{E_x}$, étant dans ce cas, pour tout $x' \in U_x$, un \mathbb{C} -isomorphisme entre $E_{x'}$ et \mathbb{C}^m). Si l'on adopte le point de vue des cocycles, de tels fibrés vectoriels complexes loc. triviaux de rang m sont construits à partir de cocycles à valeurs dans $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$. On construit un exemple de tel fibré vectoriel complexe (de rang ici N) en complexifiant, pour chaque $x \in \mathcal{X}$, le \mathbb{R} -espace vectoriel $T_{\mathbb{R},x}(\mathcal{X})$. Ceci prendra tout son sens à partir de la section 1.2.2, lorsque nous nous placerons dans la situation particulière où $N = 2n$ et où la structure différentiable (C^∞) sur \mathcal{X} sera la structure réelle sous-jacente à une structure de variété analytique complexe. Dans ce paragraphe, lorsque nous parlerons du fibré tangent $T_{\mathbb{R}}(\mathcal{X})$ (et plus loin de son dual le fibré cotangent $T_{\mathbb{R}}^*(\mathcal{X})$), nous entendrons cependant toujours des fibrés réels; ce n'est réellement qu'à partir de la section 1.2.2 que nous envisagerons la complexification des fibres de ces fibrés réels.

EXEMPLE 1.3. L'exemple du fibré cotangent $T_{\mathbb{R}}^*(\mathcal{X})$. Si $k \geq 1$, le *fibré cotangent* $T_{\mathbb{R}}^*(\mathcal{X})$ est par définition le *fibré dual du fibré tangent*. Les sections de classe C^k ($k \in \mathbb{N}$) du fibré cotangent sont les 1-formes différentielles réelles de classe C^k sur U ; on exprime (dans un ouvert de carte U_α) une telle forme en coordonnées locales sous la forme

$$\omega = \sum_{j=1}^N \omega_j dx_j,$$

où $\omega_1, \dots, \omega_N$ sont des fonctions de classe C^k dans l'ouvert $V_\alpha = \tau_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^N$. On peut complexifier la situation et considérer le fibré $T_{\mathbb{R}}^*(\mathcal{X}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dont les sections sont les 1-formes différentielles à valeurs complexes sur \mathcal{X} (mais il s'agit ici, lorsqu'on le voit ainsi, d'un fibré réel sur \mathcal{X}).

Étant donné un fibré vectoriel réel ou complexe loc. trivial $E \rightarrow \mathcal{X}$ de rang m , nous introduirons les fibrés $\bigwedge^p T_{\mathbb{R}}^*(\mathcal{X}) \otimes_{\mathbb{R}} E$. Pour $k \in \mathbb{N}$, une section de classe C^k de ce fibré au dessus de l'ouvert U de \mathcal{X} sera appelée *p-forme différentielle de classe C^k sur U , à valeurs dans E* . L'espace des telles p -formes sera noté

$$C_p^k\left(U, \bigwedge^p T_{\mathbb{R}}^*(\mathcal{X}) \otimes_{\mathbb{R}} E\right) = C_p^k(U, E), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Une section de classe C^k sur U du fibré $\bigwedge^p T_{\mathbb{R}}^*(\mathcal{X})$ (ou encore du fibré $\bigwedge^p T_{\mathbb{R}}^*(\mathcal{X}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$) sera, elle, simplement appelée *p-forme différentielle réelle de classe C^k sur U* . Une section de classe C^k sur U du fibré $\bigwedge^p T_{\mathbb{R}}^*(\mathcal{X}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sera, elle, simplement appelée *p-forme différentielle complexe de classe C^k sur U* .

1.1.3. Connexion sur un fibré.

DÉFINITION 1.4. Soit \mathcal{X} une variété différentiable de dimension N et $E \rightarrow \mathcal{X}$ un fibré vectoriel réel (resp. complexe) loc. trivial de rang m au dessus de \mathcal{X} . Une connexion D sur E est un opérateur différentiel \mathbb{R} -linéaire d'ordre 1

$$D : \bigoplus_{p=0}^N C_p^\infty(\mathcal{X}, E) \mapsto \bigoplus_{p=0}^N C_p^\infty(\mathcal{X}, E)$$

envoyant, pour chaque $p = 0, \dots, N$, $C_p^\infty(\mathcal{X}, E)$ dans $C_{p+1}^\infty(\mathcal{X}, E)$ et se pliant (comme tout opérateur différentiel du premier ordre) à la règle de Leibniz

$$(1.1) \quad D[f \wedge \omega] = df \wedge \omega + (-1)^p f \wedge D[\omega] \quad \forall f \in C_p^\infty(\mathcal{X}, \mathbb{K}), \quad \forall \omega \in C_q^\infty(\mathcal{X}, E)$$

($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} suivant que le fibré E est réel ou complexe).

Pour décrire l'action de la connexion, il est commode de se placer dans un ouvert U au dessus duquel le fibré E se trouve trivialisé. En transformant par θ^{-1} (θ désignant le morphisme de trivialisatation) les applications $x \mapsto (x, \epsilon_j)$, $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ désignant la base canonique de \mathbb{K}^m , on obtient un système (e_1, \dots, e_m) de sections de E formant ce que l'on appelle un *repère*³. Un élément s de $C_p^\infty(U, E)$ (*i.e.* une p forme différentielle sur U , C^∞ et à valeurs dans E) s'exprime dans ce repère sous la forme

$$s = \sum_{j=1}^m \sigma_j \otimes e_j,$$

où $\sigma_j \in C_p^\infty(U, \mathbb{K})$. Si l'on écrit

$$D[e_j] = \sum_{k=1}^m a_{kj} \otimes e_k, \quad j = 1, \dots, m,$$

où les $a_{kj} \in C_1^\infty(U, \mathbb{K})$ sont des 1-formes C^∞ (et à valeurs dans \mathbb{K}) sur U , on voit que la règle (1.1) se traduit par le fait que

$$D\left[\sum_{j=1}^m \sigma_j \otimes e_j\right] = \sum_{j=1}^m \left(d\sigma_j + \sum_{k=1}^m a_{jk} \wedge \sigma_k\right) \otimes e_j.$$

³Le terme angle-saxon est *frame* que l'on pourrait traduire par *trame* ou *bâti* pour en rendre compte le plus fidèlement possible.

Une fois fixée la trivialisatation θ , on remarque que l'action de D lue sur $U \times \mathbb{K}^m$ s'écrit

$$(1.2) \quad D[s] =_{\theta} d\sigma + A \wedge \sigma \quad \text{si } s = \sum_{j=1}^m \sigma_j \otimes e_j,$$

$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ désignant le « vecteur » des coordonnées de s dans le repère déduit de la trivialisatation θ , d représentant ce que l'on appelle la connexion triviale sur $U \times \mathbb{K}^m$, et A (contribuant au terme correctif $A \times \sigma$) étant une matrice de 1-formes différentielles dans U . La description de l'action de D *via* (1.2) constituera évidemment pour nous le moyen « pratique » d'exprimer cette action.

EXERCICE 1.5. Changement de repère. Si (e_1, \dots, e_m) et $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m)$ sont deux repères correspondant à des trivialisations θ et $\tilde{\theta}$ différentes au dessus du même ouvert U de \mathcal{X} , vérifier que si

$$s = \sum_{j=1}^m \sigma_j \otimes e_j = \sum_{j=1}^m \tilde{\sigma}_j \otimes \tilde{e}_j$$

avec $\tilde{\sigma} = g \cdot \sigma$, alors on a, au niveau des matrices A et \tilde{A} permettant de décrire l'action de D respectivement dans les repères $(e_j)_j$ et $(\tilde{e}_j)_j$, la *loi de transformation de gauge*

$$A = g^{-1} \cdot \tilde{A} \cdot g + g^{-1} \cdot dg.$$

1.1.4. Tenseur de courbure d'une connexion.

DÉFINITION 1.6. Soit $E \rightarrow \mathcal{X}$ un fibré vectoriel réel ou complexe loc. trivial au dessus d'une variété différentiable réelle \mathcal{X} et D une connexion sur ce fibré. L'opérateur D^2 est dit opérateur de courbure de la connexion D . La 2-forme différentielle $\Theta(D) \in C_2^\infty(\mathcal{X}, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(E, E))$ telle que $D^2[s] = \Theta(D) \wedge s$ est dite *tenseur de courbure* de la connexion D .

Si (e_1, \dots, e_m) désigne un repère déduit d'une trivialisatation θ de E au dessus d'un ouvert U de \mathcal{X} et si A désigne la matrice de 1-formes modélisant l'action de D relativement à la décomposition des sections dans le repère comme dans (1.2), l'action de l'opérateur de courbure se lit au niveau des « coordonnées » dans le repère sous la forme :

$$(1.3) \quad D^2 \left[\sum_{j=1}^m \sigma_j \otimes e_j \right] = \sum_{j=1}^m \tau_j \otimes e_j \quad \text{où} \quad \tau = (dA + A \wedge A) \wedge \sigma$$

lorsque $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ sont m q -formes de classe C^∞ à valeurs dans \mathbb{K} sur l'ouvert U . La matrice de 2-formes

$$(1.4) \quad \Theta = dA + A \wedge A$$

est dite *matrice de courbure* de la connexion D lorsque le fibré est rapporté au repère (e_1, \dots, e_m) au dessus de l'ouvert U . C'est la matrice du tenseur de courbure $\Theta(D)$ lorsque le fibré est rapporté à ce repère.

EXERCICE 1.7. Connexions et opérations sur les fibrés. Soient $E_1 \rightarrow \mathcal{X}$ et $E_2 \rightarrow \mathcal{X}$ deux fibrés vectoriels (réels ou complexes) de rangs respectifs m_1 et m_2 et de base la variété différentiable \mathcal{X} . Montrer que $D_{E_1 \oplus E_2} := D_{E_1} \oplus D_{E_2}$ définit une connexion sur $E_1 \oplus E_2$ et vérifier que le tenseur de courbure de cette connexion

s'exprime comme la somme $\Theta(D_{E_1}) \oplus \Theta(D_{E_2})$. Montrer que l'on définit une unique connexion $D_{E_1 \otimes E_2}$ sur $E_1 \otimes E_2$ telle que

$$D_{E_1 \otimes E_2}(s_1 \wedge s_2) = D_{E_1}(s_1) \wedge s_2 + (-1)^{q_1} s_1 \wedge D_{E_2}(s_2)$$

pour toute q_1 -forme différentielle s_1 de \mathcal{X} dans E_1 , pour toute q_2 -forme différentielle s_2 de \mathcal{X} dans E_2 . Vérifier

$$\Theta(D_{E_1 \otimes E_2}) = \Theta(D_{E_1}) \otimes \text{Id}_{E_2} + \text{Id}_{E_1} \otimes \Theta(D_{E_2}).$$

Montrer que, si D est une connexion sur E ,

$$(1.5) \quad u \longmapsto D_{E^*}(u) : s \longmapsto d(u \cdot s) - (-1)^{\deg u} u \cdot D_E(s)$$

est une connexion sur le fibré dual E^* et que $\Theta(D_{E^*}) = -[\Theta(D_E)]^t$ (t désignant ici l'opérateur de transposition de $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(E, E)$ dans $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(E^*, E^*)$). Montrer enfin que l'on peut construire une connexion sur $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(E_1, E_2)$ si l'on dispose de connexions D_{E_1} et D_{E_2} respectivement sur E_1 et E_2 en posant

$$(1.6) \quad D_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(E_1, E_2)}(v) : s \longmapsto D_{E_2}(v \cdot s) - (-1)^{\deg v} v \cdot D_{E_1}(s),$$

et que l'on a

$$\Theta(D_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(E_1, E_2)}) = \Theta(D_{E_2}) \otimes \text{Id}_{E_1^*} - \text{Id}_{E_2} \otimes [\Theta(D_{E_1})]^t$$

(penser à utiliser le \mathbb{K} -isomorphisme entre $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(E_1, E_2)$ et $E_2 \otimes E_1^*$ déjà mentionné dans les indications complétant le texte de l'exercice 1.2). En particulier, on a l'*identité de Bianchi*

$$(1.7) \quad D_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(E, E)}(\Theta(D_E)) = D_E(\Theta(D_E)(\cdot)) - \Theta(D_E)[D_E(\cdot)] = D_E^3(\cdot) - D_E^3(\cdot) = 0$$

si l'on se réfère à (1.6). Montrer enfin que l'on définit une unique connexion D_{\wedge^p} sur $\wedge^p E$ à partir d'une connexion D sur E de manière à ce que

$$D_{\wedge^p}(s_1 \wedge \cdots \wedge s_p) = \sum_{j=1}^p (-1)^{\deg s_1 + \cdots + \deg s_{j-1}} s_1 \wedge \cdots \wedge s_{j-1} \wedge D(s_j) \wedge s_{j+1} \wedge \cdots \wedge s_p$$

et que l'on a

$$\Theta(D_{\wedge^p}) = \sum_{j=1}^p s_1 \wedge \cdots \wedge s_{j-1} \wedge [\Theta(D) \cdot s_j] \wedge s_{j+1} \wedge \cdots \wedge s_p.$$

Dans le cas particulier $p = m$, le tenseur de courbure $\Theta(D_{\wedge^m})$ peut être assimilé à un scalaire (le fibré déterminant étant de rang 1); montrer que ce scalaire est la trace de $\Theta(D)$, considérée comme un élément de $C^\infty(\mathcal{X}, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(E, E))$.

1.2. Structure hermitienne sur un fibré vectoriel complexe

Dans cette section, \mathcal{X} désigne une variété différentiable, $E \rightarrow \mathcal{X}$ un fibré vectoriel complexe sur \mathcal{X} , localement trivial et de rang (complexe) m . Pour profiter du concept de positivité inhérent à \mathbb{C} ou \mathbb{C}^m et franchir le cap séparant les points de vue qualitatif et quantitatif, nous allons équiper un tel fibré d'une *structure hermitienne*, c'est-à-dire définir sur chaque fibre E_x , $x \in \mathcal{X}$, une métrique définie positive

$$\xi \longmapsto |\xi|_x^2,$$

ce de telle manière que l'application $E \longmapsto [0, \infty[$ qui à (x, ξ) ($\xi \in E_x$) associe $|\xi|_x^2$ soit de classe C^∞ .

EXEMPLE 1.8. Étant donné un fibré complexe de rang m localement trivial au dessus de \mathcal{X} , il est toujours possible de construire une telle métrique. Il suffit d'exploiter la souplesse (au niveau des objets) que permet le *lemme de partition de l'unité* (dans le cadre C^∞), ce qui permet de se ramener par trivialisations locales au cas où $E = U \times \mathbb{C}^m$, U désignant un ouvert de \mathcal{X} . Nous perdrons évidemment partiellement cette souplesse lorsque nous envisagerons le monde rigide des êtres pluri-complexes.

1.2.1. Connexion compatible à une structure hermitienne. Soit un fibré vectoriel complexe $E \rightarrow \mathcal{X}$ loc. trivial et de rang m au dessus d'une variété différentiable \mathcal{X} (de dimension réelle N). Supposons ce fibré E équipé d'une métrique hermitienne (on notera $|\cdot|_x$ la métrique sur la fibre E_x et $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ le produit scalaire correspondant). Le produit scalaire induit naturellement, pour chaque $0 \leq p, q \leq N$, une application sesquilinéaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C_p^\infty(\mathcal{X}, E) \times C_q^\infty(\mathcal{X}, E) \longmapsto C_{p+q}^\infty(\mathcal{X}).$$

Pour construire cette application, on peut se contenter de l'exprimer dans un repère (e_1, \dots, e_m) sur un ouvert U au dessus duquel E se trivialisent. On décide naturellement :

$$\left\langle \sum_{j=1}^m \sigma_j(x) \otimes e_j(x), \sum_{k=1}^m \tau_k(x) \otimes e_k(x) \right\rangle := \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (\sigma_j(x) \wedge \overline{\tau_k(x)}) \langle e_j(x), e_k(x) \rangle_x$$

lorsque $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ sont m p -formes de classe C^∞ dans U , τ_1, \dots, τ_m m q -formes de classe C^∞ dans U . Ce produit scalaire est, du fait que la métrique soit définie de manière globale sur E et que E soit un fibré localement trivialisable, défini globalement.

DÉFINITION 1.9. Soit $E \rightarrow \mathcal{X}$ un fibré vectoriel complexe de rang m équipé d'une métrique hermitienne $|\cdot|$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme sesquilinéaire sur le \mathbb{C} -espace vectoriel produit $\bigoplus_p C_p^\infty(\mathcal{X}, E) \times \bigoplus_q C_q^\infty(\mathcal{X}, E)$, à valeurs dans $C_\bullet^\infty(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, déduite comme indiqué ci-dessus du produit scalaire sur les fibres attaché à la métrique $|\cdot|$. On dit qu'une connexion D sur E est *compatible avec la structure hermitienne* dont on a équipé le fibré E si et seulement si, pour tout $s \in C_p^\infty(\mathcal{X}, E)$, pour tout $t \in C_q^\infty(\mathcal{X}, E)$,

$$(1.8) \quad d[\langle s, t \rangle] = \langle D(s), t \rangle + (-1)^p \langle s, D(t) \rangle.$$

Prenons un repère orthonormé (ce qui est toujours possible grâce au procédé de Gram-Schmidt). Dans ce cas, si $s = \sum_j \sigma_j \otimes e_j$ et $t = \sum_k \tau_k \otimes e_k$, on a

$$\langle s, t \rangle = \sum_{j=1}^n \sigma_j \wedge \tau_j.$$

En différentiant par d , on trouve

$$(1.9) \quad d[\langle s, t \rangle] = \langle d\sigma, \tau \rangle + (-1)^p \langle \sigma, d\tau \rangle.$$

Mais on a $D[s] =_\theta d\sigma + A \wedge \sigma$ et $D[t] =_\theta d\tau + A \wedge \tau$. En reportant dans (1.9), on constate que la clause (1.8) se traduit dans ce repère orthonormé (A désignant la matrice de la connexion dans le repère (e_1, \dots, e_m) , A^* la matrice de l'opérateur linéaire adjoint, i.e. la « trans-conjuguée » $A^* := {}^t \overline{A}$ de A) par la condition

$$(1.10) \quad A^* = -A$$

(ou encore que iA est une 1-forme à valeurs dans le \mathbb{C} -espace espace des matrices hermitiennes). En utilisant $d \circ d = 0$, on constate que

$$\langle \Theta(D) \wedge s, t \rangle = -\langle s, \Theta(D) \wedge t \rangle,$$

donc que $i\Theta(D) \in C_2^\infty(\text{Herm}(E, E))$.

EXEMPLE 1.10. Le cas des fibrés en droites. Si $m = 1$, la compatibilité de D avec la métrique se traduit par le fait que la matrice A de cette connexion (exprimée dans un repère orthonormé relativement à la métrique) doit simplement être une 1-forme ne prenant que des valeurs purement imaginaires. Dans ce cas $i\Theta(D) \in C_2^\infty(\mathcal{X}, \mathbb{R})$.

1.2.2. Le cas particulier des variétés analytiques complexes. Dans cette section, nous supposons maintenant que X est une variété analytique complexe de dimension (complexe) n , étant bien entendu que l'on peut équiper l'« ensemble X » d'une structure de variété différentiable, réelle cette fois et de dimension $2n$, dite *structure \mathcal{X} de variété différentiable réelle sous-jacente*.

La donnée d'une *variété analytique complexe*⁴ de dimension (cette fois complexe) n équivaut à la donnée :

- (1) d'un espace topologique séparé X , dénombrable à l'infini ;
- (2) d'un atlas (U_α, τ_α) « cartographiant » X , ce qui signifie que les ouverts U_α recouvrent \mathcal{X} , que τ_α est, pour chaque α , un homéomorphisme entre U_α et un ouvert V_α de \mathbb{C}^n , et que, pour toute paire d'indices (α, β) , $\tau_{\alpha\beta} = \tau_\alpha \circ (\tau_\beta)^{-1}$ est un biholomorphisme entre $\tau_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ et $\tau_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.

EXEMPLE 1.11. Outre \mathbb{C}^n bien sûr (sur lequel se déroule l'analyse pluricomplexe telle qu'elle a été décrite dans le cours de P. Charpentier [**Charp**], voir aussi [**Hor**]), l'un de nos exemples très importants sera l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, réalisé comme le quotient géométrique de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence que traduit la colinéarité des vecteurs dans $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Les coordonnées homogènes $[z_0 : \dots : z_n]$ permettent ici le repérage des points. Les ouverts de carte peuvent être choisis ici comme les ouverts $U_j : \{[z_0 : \dots : z_n] ; z_j \neq 0\}$, $j = 0, \dots, n$. Il est ici important de souligner que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ peut être compris comme l'« hyperplan à l'infini » \mathcal{U}_0 dans $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ (les coordonnées homogènes y étant (t, z_0, \dots, z_n)), au sens suivant : si (z_0, \dots, z_n) est un point de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, la droite complexe $\{\lambda z_0, \dots, \lambda z_n ; \lambda \in \mathbb{C}\}$ rencontre l'hyperplan à l'infini de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ précisément en un point que l'on identifie avec $[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Nous verrons plus loin comment un $(n+1, n)$ noyau très important en analyse pluricomplexe, celui de Bochner-Martinelli, dans $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, peut se déduire de la forme volume positive $(dd^c \log |z|^2)^n$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (dite forme de Fubini-Study) par multiplication par dt/t , puis « moyennisation » le long des orbites issues des points de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ vus comme points à l'infini dans $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$. Cette vision géométrique rejaillira plus tard et éclairera sous un jour géométrique le rôle essentiel du noyau de Bochner-Martinelli en analyse pluri-complexe. Les variétés analytiques complexes obtenues par recollement forcé de copies de \mathbb{C}^n *via* des morphismes de transition monomiaux joueront le rôle important d'« exemples jouets » dans la suite de ce cours ; on les appelle les *variétés toriques*.

Considérons tout d'abord la structure différentiable réelle sous-jacente \mathcal{X} et, pour chaque $z \in \mathcal{X}$, le sous-espace tangent réel $T_{\mathbb{R},z}(\mathcal{X})$ (\mathbb{R} -espace vectoriel de dimension

⁴*Complex manifold* dans la terminologie anglosaxonne.

$2n$), équipé de sa *structure presque complexe*, c'est-à-dire, pour chaque z , de la donnée de l'involution linéaire $J(z)$ de $T_{\mathbb{R},z}(\mathcal{X})$ dont l'action en coordonnées locales $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$, où $z_k = x_k + iy_k$ pour $k = 1, \dots, n$, consiste en

$$J(\partial/\partial x_k) = \partial/\partial y_k, \quad J(\partial/\partial y_k) = -\partial/\partial x_k, \quad k = 1, \dots, n;$$

l'opérateur J correspond à la multiplication par i dans l'espace tangent complexe $T_{\mathbb{R},z}(\mathcal{X})$, il admet comme valeurs propres $\pm i$ et induit donc un scindage de $T_{\mathbb{R},z}(\mathcal{X})$ suivant les deux sous-espaces propres. On peut ensuite, nous plaçant cette fois dans le cadre complexe (et non plus réel), introduire l'espace tangent complexe $T_z(X)$ au point z . En fait, il s'agira toujours ensemblistement du même objet $T_{\mathbb{C},z}(X) = T_{\mathbb{R},z}(\mathcal{X})$ (donc d'un espace réel!), mais cette fois considéré non plus comme un \mathbb{R} , mais comme un \mathbb{C} -espace vectoriel. Les trois manières de « penser » à cette nouvelle structure (complexe cette fois) sont les suivantes :

- (1) le premier modèle est un modèle géométrique : si U_α est un ouvert de carte contenant z , on introduit les germes en z de disques analytiques $\gamma : \zeta \in D(0, \epsilon) \mapsto \gamma(\zeta) \in U_\alpha$ tracés sur X au voisinage de z et passant par z ($\gamma(0) = z$ et $\tau_\alpha \circ \gamma$ est holomorphe dans V_α), puis le \mathbb{C} -espace vectoriel des *classes de tangence en z* de ces germes de courbes (la classe de tangence de (D, γ) est matérialisée par $d_0[\tau_\alpha \circ \gamma](1)$), la différentiation étant ici la différentiation au sens complexe ;
- (2) le second modèle est un premier modèle algébrique, consistant à concevoir le \mathbb{C} -espace vectoriel $T_z(X)$ comme le \mathbb{C} -espace vectoriel des *dérivations*⁵ de la \mathbb{C} -algèbre $\mathcal{O}_{X,z}$ des germes de fonctions holomorphes au point z ; ce modèle décrit l'élément de $T_z(X)$ en termes de son action ;
- (3) le troisième modèle est plus encore un modèle algébrique : on introduit toujours l'algèbre $\mathcal{O}_{X,z}$ (pensée cette fois comme un anneau local, qui d'ailleurs est ici noethérien, contrairement à ce qui se passe dans le contexte réel), son idéal maximal $\mathfrak{M}_{X,z}$, et l'on pense les éléments de $T_z(X)$ comme les éléments du dual du quotient $\mathfrak{M}_{X,z}/(\mathfrak{M}_{X,z})^2$, considéré comme \mathbb{C} -espace vectoriel.

Ainsi donc le \mathbb{R} -espace vectoriel (de dimension $2n$) $T_{\mathbb{R},z}(\mathcal{X})$ peut-il être pensé comme un \mathbb{C} -espace vectoriel $T_z(X)$. S'il s'agit du même espace (en l'occurrence un même \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $2n$), il s'agit de structures très différentes, l'une de \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $2n$, l'autre de \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n (penser à $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$)! Pour chaque $z \in \mathcal{X}$, on a la décomposition du complexifié

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \otimes T_z(X) &= \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_{\mathbb{R},z}(\mathcal{X}) = T_{\mathbb{R},z}(\mathcal{X}) \oplus iT_{\mathbb{R},z}(\mathcal{X}) \\ &= T_{\mathbb{R},z}^{(1,0)}(\mathcal{X}) \oplus T_{\mathbb{R},z}^{(0,1)}(\mathcal{X}) \simeq T_z(X) \oplus \overline{T_z(X)}, \end{aligned}$$

où $T_z(X)$ désigne le sous-espace tangent complexe au point z (avec sa structure de \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n) et $\overline{T_z(X)}$ le sous-espace conjugué (avec la structure complexe conjuguée $-J$), les isomorphismes se trouvant ici matérialisés

⁵C'est-à-dire une application \mathbb{C} -linéaire à valeurs complexes obéissant à la règle de Leibniz : $D[fg] = f(a)D[g] + g(a)D[f]$.

par

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \xi \in T_z(X) &\leftrightarrow \frac{\xi - iJ(\xi)}{2} \in T_{\mathbb{R},z}^{(1,0)}(\mathcal{X}) \\ \xi \in \overline{T_z(X)} &\leftrightarrow \frac{\xi + iJ(\xi)}{2} \in T_{\mathbb{R},z}^{(0,1)}(\mathcal{X}) \end{aligned}$$

(on rappelle que J désigne l'opérateur de multiplication par i sur la fibres $T_z(X)$).

Sur une variété analytique complexe, on peut donc introduire le *fibré tangent holomorphe* $T_X^{1,0}$ dont les sections sur un ouvert U sont les *champs de vecteurs holomorphes*, c'est-à-dire les champs de vecteurs ξ s'écrivant en coordonnées locales (paramétrant l'ouvert $U \cap U_\alpha$)

$$\sum_{j=1}^n a_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j},$$

où a_1, \dots, a_n sont des fonctions C^∞ dans $V_\alpha = \tau_\alpha(U \cap U_\alpha)$. Il s'agit du fibré vectoriel complexe dont la fibre au-dessus de z est (modulo le \mathbb{C} -isomorphisme mentionné en (1.11)) l'espace tangent complexe $T_{\mathbb{C},z}(X)$, équipé cette fois de sa structure complexe. On peut également introduire le *fibré tangent antiholomorphe* $T_X^{0,1}$ dont les sections au dessus d'un ouvert U sont les *champs de vecteurs antiholomorphes*, c'est-à-dire les champs de vecteurs ξ s'écrivant en coordonnées locales (paramétrant l'ouvert $U \cap U_\alpha$)

$$\sum_{j=1}^n a_j(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j},$$

où a_1, \dots, a_n sont des fonctions C^∞ dans $V_\alpha = \tau_\alpha(U \cap U_\alpha)$. Il s'agit du fibré vectoriel complexe dont la fibre au-dessus de z est (modulo le \mathbb{C} -isomorphisme mentionné en (1.11)) l'espace tangent complexe « conjugué » $\overline{T_{\mathbb{C},z}(X)}$, équipé de sa structure complexe (associée à $-J$).

On peut également définir, étant donné un fibré vectoriel complexe loc. trivial $E \rightarrow X$, les fibrés

$$\left[\bigwedge^p (T_X^{1,0})^* \otimes \bigwedge^q (T_X^{0,1})^* \right] \otimes E = (T_X^{p,q})^* \otimes E, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad p + q \leq 2n.$$

Les sections de classe C^k de ce fibré au dessus d'un ouvert U sont par définition les (p, q) -formes de classe C^k dans U , à valeurs dans E . On note le \mathbb{C} -espace vectoriel de ces sections $C_{p,q}^\infty(U, E)$.

REMARQUE 1.12. Une digression vers la notion de variété CR. Notons ici que si \mathcal{X} est une variété différentiable de dimension paire $N = 2n$ équipée d'une structure presque complexe J , on peut toujours effectuer la décomposition du \mathbb{C} -espace vectoriel

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_{\mathbb{R},x}(\mathcal{X}) = T_x^{1,0}(\mathcal{X}) \oplus T_x^{0,1}(\mathcal{X}),$$

les deux sous-espaces vectoriels complexes $T_x^{1,0}(\mathcal{X})$ et $T_x^{0,1}(\mathcal{X})$ étant les sous-espaces propres relatifs aux valeurs propres i et $-i$ de l'opérateur $\text{Id} \otimes J$. On définit ainsi deux fibrés vectoriels complexes $T^{1,0}(\mathcal{X})$ et $T^{0,1}(\mathcal{X})$. Il existe une application bilinéaire naturelle et antisymétrique

$$\tau_J : C^\infty(\mathcal{X}, T^{1,0}(\mathcal{X})) \times C^\infty(\mathcal{X}, T^{1,0}(\mathcal{X})) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{X}, T^{0,1}(\mathcal{X}))$$

associant à une paire (ξ, η) de $(1, 0)$ -champs de vecteurs (on appelle ainsi les sections du fibré $T^{1,0}(\mathcal{X})$) la $(0, 1)$ -composante du *crochet de Lie* des deux champs⁶. Comme $[\xi, f\eta] = f[\xi, \eta] + \xi(f)\eta$ pour tout $f \in C^\infty(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, on a $\tau_J(\xi, f\eta) = f\tau_J(\xi, \eta)$, ce qui implique que l'on puisse considérer τ_J comme une $(2, 0)$ -forme différentielle à valeurs dans $T^{0,1}(\mathcal{X})$, c'est-à-dire une section du fibré

$$([T^{1,0}(\mathcal{X})]^* \wedge [T^{1,0}(\mathcal{X})]^*) \otimes T^{0,1}(\mathcal{X}).$$

Cette section τ_J est appelée *torsion* de J . Lorsque \mathcal{X} est la variété différentiable réelle sous-jacente à une variété analytique complexe et que la structure presque complexe J correspond précisément à cette structure de variété analytique complexe (comme détaillé plus haut), on vérifie immédiatement que $\theta \equiv 0$. Les variétés différentiables de dimension paire $N = 2n$, équipées d'une structure presque holomorphe pour laquelle la torsion est nulle, sont dites *intégrables*. Lorsque $N = 2$ (i.e. $n = 1$), c'est toujours le cas. On dispose ici d'un exemple d'une classe très importante de variétés différentiables réelles : celles pour lesquelles il existe un sous-fibré L du fibré tangent $T_{\mathbb{R}}(\mathcal{X})$ tel que $[L, L] \subset L$ (condition d'intégrabilité) et $L_x \cap \overline{L}_x = \{0\}$ pour tout $x \in \mathcal{X}$. Une variété différentiable vérifiant cette condition est dite *variété CR* (CR pour « Cauchy-Riemann »). Une sous-variété (différentiable et non analytique complexe) V de \mathbb{C}^M telle que $T_{\mathbb{R},z}(V) \cap iT_{\mathbb{R},z}(V)$ (le plus « gros » sous-espace que l'on puisse mettre dans l'espace tangent à V au point z et qui puisse être considéré comme un \mathbb{C} -espace vectoriel) garde une dimension complexe constante est (par exemple) une variété CR. Les variétés CR font l'objet d'un vaste champ d'étude à mi-chemin entre géométrie complexe et géométrie différentielle réelle, ce depuis les vingt dernières années. Elles sont aussi très étudiées en relation avec la physique mathématique ; pour une introduction à ce riche sujet, on pourra consulter par exemple [Tum, We0]. Notons enfin que sur une variété différentiable de dimension paire équipée d'une structure presque complexe, on peut définir les notions de (p, q) -forme différentielle à valeurs dans un fibré vectoriel complexe $E \rightarrow \mathcal{X}$, comme on peut le faire dans le cadre des variétés analytiques complexes, ce comme les sections des fibrés

$$\left[\bigwedge^p (T^{0,1}(\mathcal{X}))^* \otimes \bigwedge^q (T^{1,0}(\mathcal{X}))^* \right] \otimes E = (T_X^{p,q})^* \otimes E, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad p + q \leq 2n.$$

Revenons au cadre des variétés analytiques complexes. L'opérateur d de dérivation des formes différentielles se scinde ici en les deux opérateurs

$$(1.12) \quad \partial : C_{p,q}^\infty(X, \mathbb{C}) \rightarrow C_{p+1,q}^\infty(X, \mathbb{C}), \quad \bar{\partial} : C_{p,q}^\infty(X, \mathbb{C}) \rightarrow C_{p,q+1}^\infty(X, \mathbb{C})$$

et ceci induit deux nouvelles notions de connexion (de type $(1, 0)$ ou $(0, 1)$) sur un fibré vectoriel complexe loc. trivial au dessus de X .

DÉFINITION 1.13. Soit $E \rightarrow X$ un fibré vectoriel complexe au dessus d'une variété analytique complexe X de dimension n . Une *connexion de type $(1, 0)$* est par définition un opérateur différentiel \mathbb{R} -linéaire D' d'ordre 1 sur $C_{\bullet,\bullet}^\infty(X, E)$, envoyant $C_{p,q}^\infty(X, E)$ dans $C_{p+1,q}^\infty$, de manière à ce que soit satisfaite la règle de Leibniz

$$(1.13) \quad D'[f \wedge s] = \partial f \wedge s + (-1)^{p_1+q_1} f \wedge D'(s), \quad f \in C_{p_1,q_1}^\infty(X, \mathbb{C}), \quad s \in C_{p_2,q_2}^\infty(X, E).$$

⁶Le crochet de Lie $[\xi, \eta]$ est défini (sur la fibre au dessus de x) comme la dérivation de $\mathcal{E}_{\mathcal{X},x}$:

$$[\xi, \eta]_x : f \in \mathcal{E}_{\mathcal{X},x} \mapsto \xi(\eta(f))(x) - \eta(\xi(f))(x).$$

Une *connexion de type* $(0, 1)$ est par définition un opérateur différentiel \mathbb{R} -linéaire D'' d'ordre 1 sur $C_{\bullet, \bullet}^{\infty}(X, E)$, envoyant $C_{p, q}^{\infty}(X, E)$ dans $C_{p, q+1}^{\infty}$, de manière à ce que soit satisfaite la règle de Leibniz

$$(1.14) \quad D''[f \wedge s] = \bar{\partial}f \wedge s + (-1)^{p_1+q_1} f \wedge D''(s), \quad f \in C_{p_1, q_1}^{\infty}(X, \mathbb{C}), \quad s \in C_{p_2, q_2}^{\infty}(X, E).$$

Il est immédiat de constater que la somme d'une connexion D' de type $(1, 0)$ et d'une connexion D'' de type $(0, 1)$ est une connexion sur E et que toute connexion sur E se décompose de manière unique en une telle somme $D' + D''$.

PROPOSITION 1.1. *Si $E \rightarrow X$ est un fibré hermitien au dessus d'une variété analytique complexe X et si D'_0 est une connexion de type $(0, 1)$ fixée une fois pour toute sur E , il existe une et une seule connexion sur E de la forme $D' + D'_0$ (avec D' une connexion de type $(1, 0)$) qui soit compatible avec la métrique hermitienne choisie.*

DÉMONSTRATION. Il suffit juste de lire ce qui se passe en se plaçant dans un repère orthonormé. La matrice de la connexion cherchée doit s'écrire $A = A' + A'_0$ et doit vérifier, d'après (1.10), $A = -A^*$. Il vient donc $A' = -(A'_0)^*$, comme on le vérifie immédiatement. \square

1.2.3. Fibrés holomorphes et connexion de Chern. Les fibrés vectoriels complexes sur une variété analytique complexe qui seront appelés à jouer un rôle particulièrement important dans ce cours seront les *fibrés holomorphes*.

DÉFINITION 1.14. Un fibré vectoriel complexe $E \rightarrow X$ au dessus d'une variété analytique complexe X est dit *holomorphe* si et seulement si E est équipé d'une structure de variété analytique complexe telle que la projection $\pi : (z, \xi) \mapsto z$ soit holomorphe de E dans X et qu'il existe un atlas $(U_{\alpha})_{\alpha}$ cartographiant X de manière à ce que, pour chaque α , E soit trivialisable au dessus de U_{α} et que le morphisme de trivialisations θ_{α} soit holomorphe.

REMARQUE 1.15. Si $E \rightarrow X$ est de rang (complexe évidemment) m et si \mathcal{O}_X désigne le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X , on voit que le faisceau des sections holomorphes de E (que l'on notera $\mathcal{O}_X(E)$) est un faisceau localement libre de rang m sur le faisceau \mathcal{O}_X , c'est-à-dire que pour tout point z de X , il existe un voisinage U_z de z tel que $\mathcal{O}_X(E)|_{U_z}$ soit isomorphe à $((\mathcal{O}_X)|_{U_z})^m$. En ce qui concerne la théorie des faisceaux, on renvoie ici aux ouvrages de référence de R. Godement [**God**] et de H. Grauert et R. Remmert [**GrR**] (voir aussi [**GRo**]). On rappellera d'ailleurs quelques bases de la théorie des faisceaux en note dans l'introduction de la section 1.4.3; on pourra s'y référer ici.

Si $E \rightarrow X$ est un fibré holomorphe de rang m au dessus d'une variété analytique complexe de dimension n , que $s \in \mathbb{C}_{p, q}^{\infty}(X, E)$ ($p, q \in \mathbb{N}$ avec $p + q \leq 2n$), et que U_{α} et U_{β} soient deux ouverts de carte de X d'intersection non vide et au dessus desquels on dispose de trivialisations holomorphes θ_{α} et θ_{β} , alors on a, si $\sigma_{\alpha}[s]$ (resp. $\sigma_{\beta}[s]$) désignent les applications obtenues en composant $\theta_{\alpha} \circ s$ (resp. $\theta_{\beta} \circ s$) avec les projections sur \mathbb{C}^m ,

$$\sigma_{\alpha}[s](z) = g_{\alpha, \beta}(z) \cdot \sigma_{\beta}[s](z) \quad \forall z \in U_{\alpha} \cap U_{\beta},$$

$(g_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta}$ désignant ici le 1-cocycle (supposé ici holomorphe et non plus seulement C^{∞}). Du fait précisément de l'holomorphie de ce cocycle, on note que

$$\bar{\partial}[\sigma_{\alpha}[s]] \equiv g_{\alpha, \beta}(z) \cdot \bar{\partial}[\sigma_{\beta}[s]] \quad \text{dans } U_{\alpha} \cap U_{\beta}$$

et, par conséquent, que la collection des $(\bar{\partial}\sigma_\alpha[s])_\alpha$ se globalise, permettant de générer, lorsque l'on « remonte » au niveau du fibré, un élément $D''[s]$ de $C_{p,q+1}^\infty(X, E)$. On définit ainsi une connexion D'' de type $(0, 1)$ intrinsèquement liée à la structure complexe.

DÉFINITION 1.16. La connexion D'' que l'on associe ainsi à un fibré holomorphe $E \rightarrow X$ équipé de sa structure complexe est dite $(0,1)$ *connexion canonique* de ce fibré holomorphe. Elle ne dépend que de la structure complexe.

Cette connexion $D'' = D''_0$ permet de définir le *complexe de Dolbeault*

$$C_{p,0}^\infty(X, E) \xrightarrow{D''} \dots \xrightarrow{D''} C_{p,q}^\infty(X, E) \xrightarrow{D''} C_{p,q+1}^\infty(X, E) \xrightarrow{D''} \dots$$

qui sera pour nous très important (tant sous cette forme que sous sa forme duale lorsque nous introduirons les courants).

Elle permet aussi, lorsque l'on dispose sur E de l'information quantitative que traduit le choix d'une métrique, d'associer une connexion à cette information en préservant la comptabilité à la structure complexe.

DÉFINITION 1.17. Soit $(E \rightarrow X, | |)$ un fibré holomorphe équipé, en plus de sa structure complexe (D''_0 désignant la $(0, 1)$ connexion canonique), d'une métrique hermitienne $| |$. De par la proposition 1.1, il existe une unique connexion $D = D_{E, | |}$ sur E compatible à la fois avec la structure complexe ($D = D' + D''$ avec $D'' = D''_0$) et avec la structure hermitienne. Cette unique connexion est appelée *connexion de Chern* du fibré holomorphe hermitien $(E \rightarrow X, | |)$ ainsi réalisé. Le tenseur de courbure Θ de cette connexion de Chern est dit *tenseur de courbure de Chern* de $(E \rightarrow X, | |)$.

REMARQUE 1.18. Comme $D_0'^2 = (D')^2 = 0$, on a⁷, si D désigne la connexion de Chern associée à un fibré holomorphe hermitien $(E \rightarrow X, | |)$ (de connexion canonique D''_0), $D^2 = D' \circ D''_0 + D''_0 \circ D'$. Le tenseur de courbure $\Theta_{E, | |}$ de cette connexion $D = D_{E, | |}$ est donc en fait une section du fibré

$$((T_X^{1,0})^* \otimes (T_X^{0,1})^*) \otimes \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E, E) \simeq ((T_X^{1,0})^* \otimes (T_X^{0,1})^*) \otimes (E \otimes E^*)$$

et peut donc, dans un repère, être représenté par une matrice de $(1, 1)$ -formes. De plus $i\Theta_{E, | |}$ présente la symétrie hermitienne, i.e. s'exprime dans un repère orthonormé quelconque

$$i\Theta_{E, | |} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l,p} u_{jk;lp} dz_l \wedge \overline{dz_p} \right) e_j \otimes e_k^*$$

avec $u_{jk;pl} = \overline{u_{jk;lp}}$.

EXEMPLE 1.19. L'exemple des surfaces de Riemann. Une *surface de Riemann* est une variété analytique complexe (supposée ici connexe) de dimension 1; outre \mathbb{C} et les ouverts de \mathbb{C} , les exemples importants sont $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, les courbes algébriques lisses de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, les courbes elliptiques définies comme le quotient de \mathbb{C} par un réseau $\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ avec $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0$, les normalisées de courbes projectives de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (ces quatre derniers exemples étant des exemples de surfaces de

⁷La première de ces deux relations est immédiate au vu de la définition de D''_0 ; pour ce qui est de la seconde, on se reporte à la relation $A' = -{}^t\overline{A''_0}$ (voir la preuve de la proposition 1.1).

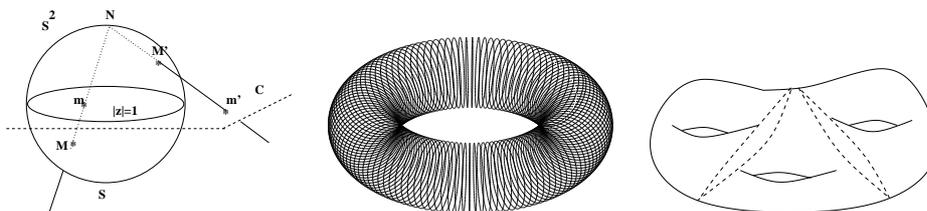


FIG. 1. Surfaces (orientables) sous-jacentes à une surface de Riemann (sphère : $g = 0$, tore : $g = 1$, surface de Riemann de genre $g = 3, \dots$)

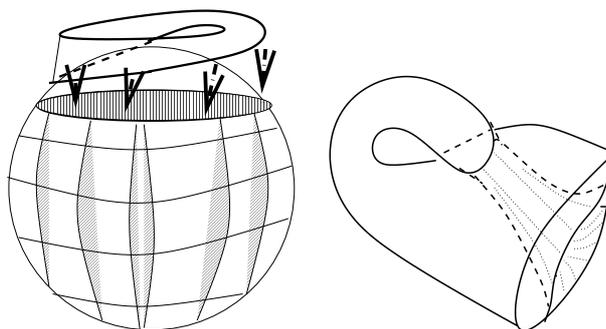


FIG. 2. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et la bouteille de Klein (non orientables, donc non équipables de structures de surface de Riemann!)

Riemann compactes). Il faut prendre garde au fait de ne pas confondre la structure de variété analytique complexe avec la structure de variété différentiable réelle sous-jacente! Cela vaut pour les surfaces de Riemann, comme pour les variétés analytiques complexes de dimension supérieure à 1. Ce qu'il convient de relever cependant est que, du fait que le jacobien d'une application holomorphe en n variables, considérée comme une application C^∞ de \mathbb{R}^{2n} dans \mathbb{R}^{2n} , est toujours positif, la variété différentiable sous-jacente à une variété analytique complexe de dimension n est toujours *orientable*. C'est par exemple, dans le cas des surfaces de Riemann, le cas de la sphère S^2 (sous-jacente à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$), du tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (sous-jacent aux surfaces de Riemann \mathbb{C}/Λ , où $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ est un réseau de \mathbb{C} , dites *courbes elliptiques*), plus généralement de la variété différentiable sous-jacente à une *surface de Riemann de genre topologique g* , dont la variété différentielle sous-jacente est la sphère S^2 équipée de g « poignées » (ou encore la chambre à air à g « trous »), voir par exemple la figure 1 ci-dessous).

En revanche, ni le plan projectif réel $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, obtenu en collant bord à bord une sphère S^2 « décalottée » avec un ruban de Möbius, ni la bouteille de Klein (voir la figure 2) ne sauraient être équipées d'une structure de surface de Riemann.

Si ω est une 1-forme différentielle s'exprimant en coordonnées locales hdz , avec $h > 0$, il existe une unique métrique hermitienne sur le fibré tangent holomorphe $T_{\mathbb{C}}(X) \simeq T_{\mathbb{R}}^{1,0}(X)$ de manière à ce que le champ de vecteurs holomorphe $\xi = \omega^* = (1/h)\partial/\partial z$ constitue un repère orthonormé pour cette métrique, celle qui est

associée au produit scalaire sur la fibre au dessus de z défini par

$$\langle \partial/\partial z, \partial/\partial z \rangle_z = h^2(z).$$

Si D est une connexion sur le fibré tangent holomorphe et si f est une section holomorphe de ce fibré (par exemple $f = \partial/\partial z$ localement), il existe une 1-forme ω_f telle que $D[f] = \omega_f \otimes f$; si en particulier $f_0 = \partial/\partial z$, on a $D[\partial/\partial z] = \omega_{\partial/\partial z} \otimes \partial/\partial z$. Si l'on suppose la compatibilité de la connexion D à la fois avec la structure complexe et avec la métrique (ce qui détermine, on le sait, D de manière unique), on voit que

$$\partial[\langle \partial/\partial z, \partial/\partial z \rangle_z] = \langle \partial/\partial z, \partial/\partial z \rangle \omega_{\partial/\partial z}(z) = h^2(z) \omega_{\partial/\partial z},$$

d'où ici $\omega_{\partial/\partial z} = \partial h^2/h^2$. On a donc

$$D[\xi] = D[1/h \partial/\partial z] = -dh/h^2 \otimes \partial/\partial z + (1/h)D[\partial/\partial z] = (\partial - \bar{\partial})[\log h] \otimes \xi$$

Le calcul de $\Theta(D)$ (via le calcul de $D^2[\xi]$) donne alors

$$(1.15) \quad \Theta(D) = -\frac{\Delta[h]}{2} dz \wedge d\bar{z} = -\partial\bar{\partial}[\log h^2].$$

Ce que nous avons fait ici se généralise : si e est une section holomorphe d'un fibré en droites $E \xrightarrow{\pi} X$ au dessus de X (ce fibré étant équipé d'une métrique $|\cdot|_h$) et si l'on note D la connexion de Chern de $(E, |\cdot|_h)$, on a, comme précédemment, si $D[e](z) = \sigma(z) \otimes e(z)$,

$$\partial[\langle e(z), e(z) \rangle_z] = \langle e(z), e(z) \rangle_{h,z} \sigma(z),$$

d'où

$$\sigma(z) = \frac{\partial[\langle e(z), e(z) \rangle_{h,z}]}{\langle e(z), e(z) \rangle_{h,z}}.$$

Le calcul de la courbure exprimée dans le repère (e) donne

$$D^2[e] = (d\sigma + \sigma \wedge \sigma) \otimes e = d\sigma \otimes e$$

puisque l'on a dans ce cas particulier $\sigma \wedge \sigma = 0$ pour des raisons de dimension (σ étant une 1-forme!). On a ici

$$d\sigma(z) = \bar{\partial}\partial[\log(\langle e(z), e(z) \rangle_{h,z})].$$

Puisque le fibré est de rang 1, la matrice de courbure est indépendante du repère et définit donc une 2-forme (en fait ici une (1,1)-forme) sur X , i.e. un élément de $C_{1,1}^\infty(X, \mathbb{C})$. Cet élément est donc ici, exactement comme dans le cas particulier qui nous a permis d'aboutir à la formule (1.15),

$$\Theta_{E, |\cdot|_h}(z) = -\partial\bar{\partial}[\log(\langle e(z), e(z) \rangle_{h,z})].$$

Nous pouvons introduire, toujours pour ce fibré holomorphe de rang 1 quelconque $E \rightarrow X$ au dessus de la surface de Riemann X , la notion de *section méromorphe* de E : il s'agit d'une section du fibré $E \rightarrow X$, notée $z \mapsto f(z)$, définie sur un ouvert dense, et telle que, pour toute trivialisatation θ_α au dessus d'un ouvert U_α , $\theta_\alpha(f(z)) = (z, f_\alpha(z))$, où f_α est une fonction méromorphe sur l'ouvert de trivialisatation U_α . Si $(U_\alpha \cap U_\beta, g_{\alpha,\beta})$ désigne le 1-cocycle holomorphe attaché au fibré $E \rightarrow X$ et subordonné au recouvrement de X par les U_α , on a donc $f_\alpha = f_\beta g_{\alpha,\beta}$ dans $U_\alpha \cap U_\beta$. On supposera de plus ici que f n'est pas identiquement nulle sur son ouvert de définition. Dans $U_\alpha \cap U_\beta$, les zéros-pôles de f_α et f_β sont les mêmes et l'on a, hors de cet ensemble de zéros pôles,

$$dd^c \log |f_\alpha|^2 = dd^c \log |f_\beta|^2 + dd^c \log |g_{\alpha,\beta}|^2 = dd^c \log |f_\beta|^2.$$

(la valeur absolue est ici la valeur absolue usuelle). Au sens des courants⁸, on s'aperçoit donc que les diverses déterminations

$$z \in U_\alpha \mapsto dd^c \log |f_\alpha(z)|^2$$

se recollent pour donner un $(1, 1)$ -courant sur X . Ce courant se calcule en utilisant la formule de Green-Riemann (plus précisément la formule de Cauchy-Pompeiu⁹ et l'on constate qu'il s'agit du $(1, 1)$ courant $[Z(f)]$, où $[Z(f)]$ désigne le *courant d'intégration* attaché au *diviseur* de f : les zéros-pôles ζ de f (lue dans les cartes, c'est à dire ceux des f_α), constituant un ensemble discret $ZP(f)$ (principe des zéros isolés) de X , sont affectés de multiplicités m_ζ (positives si ce sont des zéros, négatives si ce sont des pôles) et $[Z_f]$ est par définition le $(1, 1)$ courant sur X qui à une fonction-test C^∞ à support compact φ associe

$$\sum_{\zeta \in ZP(f)} m_\zeta \varphi(\zeta).$$

Si maintenant nous revenons au morphisme de trivialisatation et que nous introduisons la fonction (définie elle aussi globalement sur X) par

$$z \mapsto |f_\alpha(z) \otimes e_\alpha|_{h,z} = |f_\alpha(z)|^2 \langle e_\alpha(z), e_\alpha(z) \rangle_{h,z},$$

fonction que nous noterons donc

$$z \in X \mapsto |f(z)|_h^2,$$

nous constatons que l'on a la très importante *formule de Lelong-Poincaré* :

$$(1.16) \quad -dd^c \log |f|_h^2 + [Z(f)] = \frac{i}{2\pi} \Theta_{E,| \cdot |}.$$

La $(1, 1)$ forme fermée $(i/(2\pi))\Theta_{E,| \cdot |}$ est appelée *première forme de Chern* $c_1(E, | \cdot |)$ attachée au fibré holomorphe hermitien de rang 1 $(E \rightarrow X, | \cdot |)$. Nous allons introduire au paragraphe suivant la hiérarchie des formes (resp. des classes) de Chern d'un fibré holomorphe hermitien de rang fini et de base une variété analytique complexe. Cette *formule de Lelong-Poincaré*¹⁰, établie ici à titre d'exemple dans le cadre des surfaces de Riemann, sera appelée à jouer un rôle central dans la suite de ce cours.

REMARQUE 1.20. Les calculs qui viennent d'être faits dans l'exemple 1.19 ci-dessus peuvent être repris dans le contexte d'un fibré en droites holomorphe $E \rightarrow X$ au dessus d'une variété analytique quelconque. La *formule de Lelong-Poincaré* (1.16) sera reprise dans ce contexte dans la section 2.6 du chapitre 2 et généralisée sous la forme de la formule 2.58 dans le corps du théorème 2.55 bien plus général (en fin de chapitre 2).

⁸On peut ici se contenter de penser « au sens des formes différentielles à coefficients distributions » ; ceci sera précisé au chapitre 2, où nous introduirons en détails la théorie des courants sur une variété différentielle ou une variété analytique complexe.

⁹Voir la proposition I.1.1 dans le cours de P. Charpentier [**Charp**], qui assure qu'au sens des distributions, on a $(\partial/\partial\bar{z})(1/\zeta) = \pi\delta_0$.

¹⁰Notons que cette formule met en jeu simultanément un terme d'obédience analytique, $-\log |f|_h^2$, qui sera amené à jouer le rôle de *courant de Green* (voir la section 3.5) dans le contexte de $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, un terme d'obédience algébrique ($[Z(f)]$), lié à ce que l'on appellera le *diviseur* de la section f , voir la section 1.4.1), enfin un terme d'obédience géométrique, la *première forme de Chern*, ou *tenseur de courbure*, du fibré hermitien holomorphe $(E \rightarrow X, | \cdot |)$, équipé de sa *connexion de Chern*.

REMARQUE 1.21. En reprenant les calculs introduits dans la première partie de l'exemple 1.19, nous voyons que si $E \rightarrow X$ est un fibré complexe holomorphe de rang m équipé d'une métrique $|\cdot|_h$ et si $H_e(z)$ désigne la matrice de Gram

$$H_e(z) := \left[\langle e_j(z), e_k(z) \rangle_{h,z} \right]_{1 \leq j, k \leq m}$$

associée à la métrique exprimée dans un repère holomorphe $(e_1(z), \dots, e_m(z))$, la matrice de la connexion de Chern $D_{E,|\cdot|_h}$ exprimée dans le repère $(e_1(z), \dots, e_m(z))$ est la matrice de $(1,0)$ -formes

$$A_e(z) = [H_e(z)]^{-1} \cdot \partial[H_e(z)];$$

la matrice de courbure, exprimée dans ce repère holomorphe $(e_1(z), \dots, e_m(z))$, est donc

$$\Theta_{E,|\cdot|_h}(z) = \bar{\partial} \left([H_e(z)]^{-1} \cdot \partial[H_e(z)] \right),$$

comme on le voit par un calcul facile. On retrouve bien le fait qu'il s'agisse d'une matrice de $(1,1)$ -formes (voir la remarque 1.18).

Mentionnons ici le cas particulier des métriques sur le fibré tangent holomorphe $T(X)$ (i.e. sur la variété analytique complexe X elle-même), cas auquel nous serons confrontés au chapitre 3.

PROPOSITION 1.2. *Si $E = T(X) \simeq T_{\mathbb{R}}^{1,0}(\mathcal{X}) \rightarrow X$ désigne le fibré tangent holomorphe à une variété analytique complexe et que $|\cdot| = h$ est une métrique hermitienne sur $T(X)$ s'exprimant dans une base de sections $(\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$ (seulement C^∞ bien sûr) de $(T(X))^*$*

$$h = \sum_{1 \leq j, k \leq n} \xi_j^* \otimes \bar{\xi}_k^*.$$

Il existe une unique matrice A de 1-formes (de taille $n \times n$) telle que $A^ := {}^t \bar{A} = -A$ et que*

$$(1.17) \quad \begin{bmatrix} d\xi_1^* \\ \vdots \\ d\xi_n^* \end{bmatrix} = A \wedge \begin{bmatrix} \xi_1^* \\ \vdots \\ \xi_n^* \end{bmatrix} + \tau_h[\xi^*],$$

où $\tau_h[\xi^]$ désigne une matrice colonne de $(2,0)$ -colonnes dite matrice de torsion de la métrique h (exprimée dans le repère unitaire $\xi^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$ du fibré $(T(X))^*$). La matrice de la connexion de Chern $D_{T(X),|\cdot|}$ dans la base (ξ_1, \dots, ξ_n) duale de la base $(\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$ est égale à $-{}^t A$.*

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord l'existence et l'unicité de la matrice A réalisant (1.17). On cherche à déterminer A comme somme d'une matrice A' de $(1,0)$ formes et d'une matrice A'' de $(0,1)$ -formes. Si A résout (1.17), on a $\bar{\partial}\xi^* = A'' \wedge \xi^*$. Si l'on pose $\xi^* = B \cdot d\zeta$, où $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ sont des coordonnées holomorphes et B une matrice (n,n) de fonctions C^∞ , on voit que l'on doit nécessairement avoir $A'' = \bar{\partial}B \cdot B^{-1}$. La contrainte $A = -A^*$ achève de déterminer A , puisqu'il faut poser nécessairement pour la réaliser $A' = -{}^t \bar{A}''$.

Pour la seconde partie de l'énoncé, on sait que l'on peut associer à la connexion de Chern $D = D_{T(X),|\cdot|}$ sa connexion duale D^* ; la matrice de cette connexion duale D^* dans la base $(\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$ est égale à l'opposé de la transposée de la matrice de la connexion D dans la base de champs de vecteurs (ξ_1, \dots, ξ_n) (voir (1.5)). Cette

connexion D^* est compatible avec la structure complexe sur le fibré cotangent $(T(X))^*$ et l'on a $(D^*)'' = \bar{\partial}$. Si \tilde{A} désigne la matrice de D^* dans la base $(\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$, il vient donc que $A'' = \tilde{A}''$. Mais la matrice \tilde{A} vérifie, comme A , la relation $\tilde{A}^* = {}^t \tilde{A} = -\tilde{A}$. On en déduit que l'on a aussi $A' = \tilde{A}'$ et, par conséquent, $A = \tilde{A}$, ce qu'il fallait prouver. \square

1.3. Formes de Chern d'un fibré holomorphe ; classes caractéristiques

Soit $E \rightarrow X$ un fibré holomorphe $E \rightarrow X$ (voir la définition 1.14) de rang m au dessus d'une variété analytique complexe X de dimension (complexe) n . On suppose que E est équipé d'une métrique hermitienne $|\cdot|$ et l'on note D la connexion de Chern du fibré holomorphe hermitien ainsi construit, c'est-à-dire (voir la définition 1.17) l'unique connexion sur E compatible à la fois avec la structure complexe et avec la métrique hermitienne. Soit $\Theta_{E,|\cdot|} \in C_2^\infty(X, \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E, E))$ le tenseur de courbure de cette connexion, c'est-à-dire le tenseur de courbure de Chern du fibré holomorphe $E \rightarrow X$ équipé de sa métrique $|\cdot|$. Si (e_1, \dots, e_m) désigne un repère, ce tenseur de courbure s'exprime localement dans ce repère sous la forme

$$\Theta_{E,|\cdot|} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m a_{jk} e_j \otimes e_k^*$$

(on utilise ici, comme dans les indications suivant l'exercice 1.2, l'isomorphisme entre $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(E, E)$ et $E \otimes E^*$, $e_j(z) \otimes e_k^*(z)$ correspondant au \mathbb{C} -endomorphisme de E_z ayant pour matrice $[\delta_{jk, j'k'}]_{1 \leq j, k' \leq m}$ dans la base $(e_1(z), \dots, e_m(z))$, où les $a_{j,k}$ sont des éléments de $C_2^\infty(X, \mathbb{C})$ (i.e. des 2-formes différentielles¹¹ sur X). On peut écrire, en utilisant toujours le repère :

$$(1.18) \quad \det \left(\frac{i}{2\pi} \Theta_{E,|\cdot|} + \text{Id}_E \right) = \det \left(\frac{i}{2\pi} \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m a_{jk} e_j \otimes e_k^* \right) + \sum_{j=1}^m e_j \otimes e_j^* \right) \\ = 1 + \sum_{0 < p \leq m} c_p(E, |\cdot|) \in \bigoplus_{p \leq m} C_{2p}^\infty(X, \mathbb{C}),$$

où $c_p(E, |\cdot|) \in C_{2p}^\infty(X, \mathbb{C})$, $p = 1, 2, \dots$ est une $2p$ -forme différentielle¹² sur X .

DÉFINITION 1.22. Soit $(E \rightarrow X, |\cdot|)$ un fibré holomorphe de rang m au dessus d'une variété analytique complexe, équipé d'une métrique $|\cdot|$ de tenseur de courbure de Chern $\Theta_{E,|\cdot|}$. Les formes différentielles $c_1(E, |\cdot|)$, $c_2(E, |\cdot|)$, \dots définies par (1.18) sont appelées *formes de Chern* du fibré holomorphe $E \rightarrow X$ équipé de la métrique hermitienne $|\cdot|$.

Afin d'expliciter les calculs permettant de montrer que la *forme de Chern totale* définie comme

$$C(E, |\cdot|) := 1 + \sum_{p \leq m} c_p(E, |\cdot|)$$

(donc toutes les formes de Chern $c_p(E, |\cdot|)$, $0 < 2p \leq m$) est une forme fermée, nous donnons ici une interprétation légèrement différente de (1.18) (mais plus commode ultérieurement) de $C(E, |\cdot|)$, suivant ici la présentation de M. Andersson dans [And3], section 2.

¹¹Il s'agit même ici de $(1, 1)$ -formes différentielles, voir la remarque 1.18.

¹²En fait, dans ce cas, une (p, p) -forme différentielle, voir la note *supra* et la remarque 1.18.

On introduit pour cela le fibré vectoriel complexe de base X défini comme l'algèbre extérieure

$$\Lambda = \bigwedge \left((T_X^{1,0})^* \oplus (T_X^{0,1})^* \oplus E \oplus E^* \right)$$

Une forme différentielle s à valeurs dans E s'écrivant localement dans un repère pour E

$$s = \sum_{j=1}^m \sigma_j \otimes e_j$$

est identifiée à un unique élément de Λ *via* la correspondance

$$s = \sum_{j=1}^m \sigma_j \otimes e_j \longleftrightarrow \tilde{s} := \sum_{j=1}^m \sigma_j \wedge e_j \in \Lambda.$$

De la même manière, une forme différentielle S à valeurs dans $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(E, E)$ s'écrivant localement

$$S = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \Sigma_{j,k} \otimes e_j \otimes e_k^*$$

est identifiée à un unique élément de Λ *via* la correspondance

$$S = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \Sigma_{j,k} \otimes e_j \otimes e_k^* \longleftrightarrow \tilde{S} := \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \Sigma_{k,j} \wedge e_j \wedge e_k^*.$$

Une connexion arbitraire D sur E s'étend en une application \mathbb{R} -linéaire de l'ensemble $C_0^\infty(X, \Lambda)$ des sections de Λ dans lui-même; cette application (notée \tilde{D}) doit agir comme anti-dérivation par rapport au produit extérieur¹³; l'action de \tilde{D} est la suivante :

- c'est l'action de D sur les e_j ;
- c'est l'action de D^* (connexion duale de D , voir (1.5)) sur les e_k^* ;
- c'est enfin l'action de l'opérateur de de Rham d sur les facteurs provenant de $(T_X^{1,0})^* \oplus (T_X^{0,1})^*$.

On remarque immédiatement avec ces règles que

$$(1.19) \quad D_{\widetilde{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(E, E)}}[S] = \tilde{D}[\tilde{S}] \quad \forall S \in C_\bullet^\infty(X, \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E, E)).$$

L'égalité de Bianchi (1.7) implique donc, suivant (1.19), $\tilde{D}[\widetilde{\Theta_{E,|}}] = 0$ si $\Theta_{E,|}$ est le tenseur de courbure de Chern de $(E \rightarrow X, |)$. Toujours suivant (1.19), on a bien sûr aussi $\tilde{D}[\tilde{I}] = 0$ si

$$\tilde{I} := \sum_{j=1}^m e_j \wedge e_j^*$$

est l'élément de Λ identifié à Id_E . Une section ω du fibré $\Lambda \rightarrow X$ s'écrit dans le repère (e_1, \dots, e_m) de manière unique sous la forme

$$\omega = \omega' \wedge \frac{\tilde{I}^m}{m!} + \omega'',$$

où ω'' est de degré total strictement inférieur à m en les $e_j^*, e_k, 1 \leq j, k \leq m$. Si l'on convient de poser

$$\int_e \omega := \omega',$$

¹³Ceci signifie que l'on a la règle de Leibniz $\tilde{D}[\tilde{s} \wedge \tilde{t}] = D[\tilde{s}] \wedge \tilde{t} + (-1)^{\deg \tilde{s}} \tilde{s} \wedge \tilde{D}[\tilde{t}]$.

on constate que

$$(1.20) \quad C(E, | |) = \int_e \left(\frac{i}{2\pi} \tilde{\Theta}_{E, | |} + \tilde{I} \right)^m = \int_e \exp \left(\frac{i}{2\pi} \tilde{\Theta}_{E, | |} + \tilde{I} \right).$$

REMARQUE 1.23. Il résulte de ces calculs que chaque forme de Chern $c_p(E, | |)$, $p = 1, 2, \dots$, peut être considérée comme un élément de $C_{p,p}^\infty(X, E \otimes E^*)$ présentant la symétrie hermitienne, i.e. s'exprimant dans un repère orthonormé quelconque :

$$c_p(E, | |) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \left(\sum_{|L|=|P|=p} u_{jk;LP} dz_L \wedge \overline{dz_P} \right) e_j \otimes e_k^*$$

avec $u_{jk;PL} = \overline{u_{jk;LP}}$.

Nous sommes alors en mesure d'énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 1.3. *Si $(E \rightarrow X, | |)$ est un fibré holomorphe de rang m sur une variété analytique complexe X , équipé d'une métrique hermitienne $| |$, la classe totale de Chern $C(E, | |)$, donc aussi toutes les classes de Chern $c_p(E, | |)$ pour $0 < 2p \leq m$, est une forme d-fermée. De plus la classe de cohomologie de $C(E, | |)$ pour la cohomologie de de Rham sur X ne dépend pas du choix de la métrique hermitienne.*

DÉMONSTRATION. Nous suivons ici les calculs tels qu'ils sont détaillés par exemple dans la section 2 de [And3]. Compte tenu de ce que $\tilde{D}[\tilde{\Theta}_{E, | |}] = \tilde{D}[\tilde{I}] = 0$ on a, pour toute section ω de Λ ,

$$(1.21) \quad \int_e \tilde{D}\omega = \int_e \left(d\omega' \wedge \tilde{I}_m + \tilde{D}[\omega'] \right) = d\omega' = d \left[\int_e \omega \right].$$

Compte tenu d'une part de (1.21), d'autre part du fait que $\tilde{D}[\tilde{\Theta}_{E, | |}] = 0$ et de la formule de représentation (1.20), on a

$$d[C(E, | |)] = \int_e \tilde{D} \left[\left(\frac{i}{2\pi} \tilde{\Theta}_{E, | |} + \tilde{I} \right)^m \right] = 0,$$

ce qui prouve bien que la forme de Chern $C(E, | |)$ est fermée. Si l'on prend deux métriques $| |_0$ et $| |_1$, nous allons utiliser un argument basé sur l'homotopie pour montrer que les formes de Chern sont cohomologues pour la cohomologie de de Rham. On introduit une famille $(D_t)_t$ de connexions de E (permettant de passer de manière lisse de la connexion de Chern D_0 attachée à la métrique $| |_0$ à la connexion de Chern $| |_1$ attachée à la métrique $| |_1$). On introduit le *pull-back* \mathbf{E} du fibré E sur $X \times [0, 1]$. Alors $D_t + d_t$ est, pour tout t , une connexion sur \mathbf{E} , connexion dont le tenseur de courbure est, d'après (1.4), $\Theta_t + dt \wedge \dot{D}_t$ avec $\dot{D}_t := dD_t/dt$. En utilisant les formules de représentation précédente, il vient

$$d \left[\int_0^1 \left[\int_e \left(\frac{i}{2\pi} \tilde{D}_t \wedge \exp \left(\frac{i}{2\pi} \tilde{\Theta}_t + \tilde{I} \right) \right) dt \right] \right] = C(E, | |_1) - C(E, | |_0),$$

d'où le résultat annoncé. \square

DÉFINITION 1.24. Si $E \rightarrow X$ est un fibré holomorphe au dessus d'une variété analytique complexe, la classe pour la cohomologie de de Rham de toutes les formes de Chern $C(E, | |)$, lorsque $| |$ désigne une métrique hermitienne sur le fibré $E \rightarrow X$, est dite *classe caractéristique* ou aussi *classe de Chern* du fibré holomorphe $E \rightarrow X$.

REMARQUE 1.25. Tout ce que nous venons de faire dans cette section peut être fait pour un fibré vectoriel complexe au dessus d'une variété différentiable¹⁴. Nous pouvons associer une forme de Chern au fibré équipé d'une connexion D . Cette forme de Chern est d -fermée et sa classe de cohomologie ne dépend pas du choix de la connexion. C'est la *classe caractéristique du fibré vectoriel complexe*, ou encore la *classe de Chern* de ce fibré.

1.4. Les objets de la géométrie analytique complexe

1.4.1. Diviseurs de Cartier et/ou de Weil sur une variété analytique complexe. Les deux notions de *diviseur de Cartier* et de *diviseur de Weil* sur une variété analytique complexe X (donc lisse) sont étroitement imbriquées. Il se trouve d'ailleurs que dans ce contexte de lissité elles coïncident. Cependant, sur un espace analytique réduit (cadre que nous étudierons plus loin, où elles gardent encore toutes les deux un sens), ces deux notions diffèrent. La notion de *diviseur de Cartier* relève du point de vue *fonctionnel* (donc en un sens plus « analytique ») et est intrinsèquement liée à l'aspect que l'on pourrait qualifier de *faisceautique*, tandis que celle de *diviseur de Weil* relève, elle, du point de vue *géométrique*. Ces deux points de vue se marieront sans cesse dans ce cours de géométrie complexe. Nous privilégierons sans doute plus le point de vue géométrique, ce qui est une des raisons pour lesquelles nous utiliserons assez peu le cadre pourtant naturel (surtout lorsqu'il est question d'*espace analytique complexe* et non plus seulement de *variété analytique complexe*) de la théorie des *schémas*. Pour ce dernier point de vue (de fait très important, en particulier lorsqu'entrent en jeu des questions de nature algébrique ou arithmétique), nous renvoyons au ouvrages de référence classiques (par exemple [Ha1, EGA]).

DÉFINITION 1.26. On appelle *diviseur de Cartier* sur une variété analytique complexe X (supposée toujours connexe) la donnée :

- (1) d'une part, d'un recouvrement $(U_\alpha)_\alpha$ par des ouverts connexes de X ;
- (2) d'autre part, pour chaque α , d'une fonction f_α méromorphe (et non identiquement nulle) sur U_α , ce de manière à ce que, pour tout couple (α, β) d'indices, f_α/f_β se prolonge en une fonction holomorphe de $U_\alpha \cap U_\beta$ dans \mathbb{C}^* .

Se donner un diviseur de Cartier sur X revient donc à se donner une section globale du faisceau quotient $\mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*$; ici \mathcal{M}_X désigne le faisceau des fonctions *méromorphes* sur X , le corps $\mathcal{M}_{X,z}$ étant défini comme le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{O}_{X,z}$, anneau (intègre) des germes au point z des fonctions de fonctions holomorphes sur X . Le faisceau \mathcal{M}_X est dit aussi *faisceau des fonctions régulières* sur la variété analytique complexe X . Dans le langage de l'analyse pluricomplexe (lorsque $X = U$ est un ouvert de \mathbb{C}^n), la donnée d'un diviseur de Cartier sur $X = U$ revient à définir ce que l'on appelle une *donnée de Cousin* sur U .

À tout *diviseur de Cartier* d sur X correspond (à isomorphisme près) un *fibré en droites holomorphe* sur X , celui associé au 1-cocycle $(U_\alpha \cap U_\beta, (g_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta})$ défini par

$$z \in U_\alpha \cap U_\beta \mapsto g_{\alpha,\beta}(z) := f_\alpha(z)/f_\beta(z),$$

par exemple en procédant aux identifications $(z, \xi) \simeq (z, g_{\alpha,\beta}(z) \cdot \xi)$ chaque fois que $z \in U_\alpha \cap U_\beta$. On notera ce fibré en droites $[d]$ (ou aussi $\mathcal{O}(d)$). Le faisceau des

¹⁴Le seul point qui est perdu est le type (p, p) de la forme de Chern $c_p(E, D)$.

sections holomorphes de $[d]$ s'identifie, lui, avec le faisceau localement libre $\mathcal{K}(d)$, où

$$(1.22) \quad \mathcal{K}(d)|_{U_\alpha} = \mathcal{K}(d)(U_\alpha) := \frac{1}{f_\alpha} \mathcal{O}_X(U_\alpha),$$

faisceau dont les trivialisations au dessus des ouverts U_α sont les applications

$$\sigma \in \mathcal{K}(d)|_{U_\alpha} = \mathcal{K}(d)(U_\alpha) \longmapsto f_\alpha \sigma \in \mathcal{O}_X(U_\alpha).$$

D'autre part, le choix d'une section méromorphe globale $(f_\alpha)_\alpha$ d'un fibré en droites (section qui correspond à la donnée d'un diviseur de Cartier sur X) induit la construction du 1-cocycle $(g_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ ($g_{\alpha,\beta} = f_\alpha/f_\beta$ dans $U_\alpha \cap U_\beta$), donc détermine le fibré en droites (à isomorphisme près).

On peut donc définir, *via* ce qui précède, une application de l'ensemble des diviseurs de Cartier sur X dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés holomorphes en droites $L \rightarrow X$, ou encore une application de l'ensemble des diviseurs de Cartier sur X dans l'ensemble des faisceaux de \mathcal{O}_X -modules localement libres et de rang 1 (à la classe d'isomorphisme du fibré en droites L est attaché le faisceau $\mathcal{O}(L)$ des sections holomorphes de L , identifié, si la classe de $L \rightarrow X$ correspond au diviseur de Cartier d , avec le faisceau localement libre $\mathcal{K}(d)$ introduit en (1.22)).

L'ensemble des diviseurs de Cartier de X peut naturellement être équipé d'une addition : la somme de deux diviseurs de Cartier correspondant respectivement aux données $(U_{1,\alpha}, f_{1,\alpha})_\alpha$ et $(U_{2,\alpha}, f_{2,\alpha})_\alpha$ est le diviseur de Cartier correspondant à la donnée $(U_{1,\alpha} \cap U_{2,\alpha}, f_{1,\alpha} f_{2,\alpha})_\alpha$. L'ensemble des diviseurs de Cartier sur X , équipé de cette addition, hérite d'une structure de groupe, dit *groupe des diviseurs* de X , ou encore $\text{Div}(X)$. Un sous-groupe important de ce groupe est celui des *diviseurs principaux*, c'est-à-dire ceux qui proviennent d'une section méromorphe globale du faisceau \mathcal{M}_X^* , i.e. d'une fonction f méromorphe sur X , le diviseur principal $\text{div}(f)$ attaché à f étant le diviseur de Cartier associé au recouvrement $(U_\alpha, f|_{U_\alpha})$, où $(U_\alpha)_\alpha$ est un atlas cartographiant X . Deux diviseurs de Cartier d_1 et d_2 sur X sont dits équivalents si et seulement si $d_1 - d_2$ est un diviseur principal. On note $\text{Pr}(X)$ ou $\text{Div}_0(X)$ le sous-groupe de ces diviseurs de Cartier principaux.

L'ensemble des classes d'isomorphisme des fibrés holomorphes en droites¹⁵ sur X , équipé de l'opération qui aux classes de $L_1 \rightarrow X$ et $L_2 \rightarrow X$ associe celle de $(L_1 \otimes L_2) \rightarrow X$ (toutes les opérations entre classes d'isomorphismes de fibrés holomorphes étant définies à partir de constructions impliquant uniquement des 1-cocycles holomorphes), hérite aussi d'une structure de groupe.

PROPOSITION 1.4. *Le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés holomorphes en droites (ou encore de rang 1) sur X est isomorphe au quotient du groupe des diviseurs de Cartier $\text{Div}(X)$ par le sous-groupe $\text{Pr}(X)$ des diviseurs de Cartier principaux, ou encore au groupe de cohomologie $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ pour la cohomologie de Čech, c'est-à-dire au quotient*

$$\check{H}^1(X, \mathcal{O}^*) = \lim_{\overline{\mathcal{U}}} \frac{\check{Z}^1(X, \mathcal{U}, \mathcal{O}^*)}{\check{B}^1(X, \mathcal{U}, \mathcal{O}^*)}$$

¹⁵On dit que deux fibrés holomorphes en droites $L_1 \xrightarrow{\pi_1} X$ et $L_2 \xrightarrow{\pi_2} X$ au dessus d'une variété analytique complexe X sont *isomorphes* si et seulement si il existe une application biholomorphe $f : X \rightarrow X$, une application biholomorphe $F : L_1 \rightarrow L_2$ tels que $f \circ \pi_1 = \pi_2 \circ F$. Cette notion s'étend naturellement à la notion d'*isomorphisme entre deux fibrés holomorphes de même rang* $E_1 \rightarrow X$ et $E_2 \rightarrow X$.

obtenu comme limite inductive des quotients des groupes des 1-cocycles $\check{Z}^1(X, \mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$, attachés à un recouvrement \mathcal{U} de X , par leurs sous-groupes $\check{B}^1(X, \mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$ de 1-cobords¹⁶. Le groupe des classes d'isomorphismes de fibrés en droites est appelé groupe de Picard de la variété analytique complexe X .

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que deux fibrés holomorphes en droites sont isomorphes (en tant que \mathbb{C} -fibrés en droites holomorphes) si et seulement si les deux diviseurs de Cartier dont ils proviennent diffèrent d'un diviseur principal, ou encore, ce qui est équivalent, si et seulement si les 1-cocycles à valeurs dans \mathcal{O}_X^* correspondants diffèrent d'un cobord¹⁷. \square

Nous pouvons profiter de cette proposition pour définir ici (nous en aurons besoin ultérieurement, au chapitre 3) la *première classe de Chern* d'un fibré en droites $L \rightarrow X$ (non nécessairement holomorphe, mais juste C^∞) au dessus d'une variété analytique complexe X . Le cas des fibrés holomorphes en sera un cas particulier. Exactement comme nous l'avons fait pour démontrer la proposition 1.4, on peut montrer qu'il existe aussi une correspondance biunivoque entre les classes d'isomorphismes de fibrés en droites C^∞ et le groupe de cohomologie de Čech $\check{H}^1(X, \mathcal{E}_X^*)$, où \mathcal{E}_X désigne le faisceau des germes de fonctions C^∞ sur X : à la classe d'isomorphisme de $L \rightarrow X$, est associée la classe du 1-cocycle $(U_\alpha \cap U_\beta, g_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta}$ correspondant au fibré en droites $L \rightarrow X$. Nous disposons d'autre part de la suite exacte de faisceaux

¹⁶La *cohomologie de Čech* est définie sur un espace topologique X relativement à un *faisceau de groupes abéliens* (pour la notion de *faisceau de groupes abéliens* ou d'*anneaux commutatifs*, on se reportera à l'introduction de la section 1.4.3) ; les exemples de *faisceaux de groupes abéliens* que nous utiliserons ici seront les faisceaux constants $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (groupes *additifs*, les deux premiers étant discrets, les deux suivants continus) et les faisceaux $\mathcal{E}_X, \mathcal{O}_X$ (eux aussi faisceaux de groupes *additifs*) ou $\mathcal{E}_X^*, \mathcal{O}_X^*$ (faisceaux de groupes cette fois de groupes *multiplicatifs*). Étant donné un recouvrement $(U_\alpha)_\alpha$ de X , une *k-cochaîne* de Čech est par définition une application associant à chaque intersection $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$ des U_α pris $k+1$ à $k+1$ un élément $h_{\alpha_0, \dots, \alpha_k} \in \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k})$, i.e. une *section* du faisceau \mathcal{F} au dessus de $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$. Suivant l'addition sur les sections de \mathcal{F} , on peut définir une structure de groupe additif sur l'ensemble des *k-cochaines* ; on obtient ainsi le *groupe des k-cochaines* $\check{C}^k(X, \mathcal{U}, \mathcal{F})$ subordonné au recouvrement $\mathcal{U} = (U_\alpha)_\alpha$. On définit un morphisme bord $\delta = \delta_k$ du groupe $\check{C}^k(X, \mathcal{U}, \mathcal{F})$ dans le groupe $\check{C}^{k+1}(X, \mathcal{U}, \mathcal{F})$ de la manière suivante : pour $k=0$ par $(\delta_0 h)_{\alpha, \beta} := \delta^0 h(U_\alpha \cap U_\beta) = h(U_\beta)|_{U_\alpha \cap U_\beta} - h(U_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, pour $k=1$ par

$$(\delta^1 h)_{\alpha, \beta, \gamma} := \delta^1 h(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) = \left[h(U_\beta \cap U_\gamma) - h(U_\gamma \cap U_\alpha) + h(U_\alpha \cap U_\beta) \right]_{|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma}}, \text{ etc. ;}$$

on a bien sur $\delta_{k+1} \circ \delta_k = \delta \circ \delta = 0$ et l'image $\check{B}^k(X, \mathcal{U}, \mathcal{F})$ de $\check{C}^{k-1}(X, \mathcal{U}, \mathcal{F})$ par $\delta = \delta_{k-1}$ est un sous groupe (dit *sous-groupe des k-cobords*) du noyau $\check{Z}^k(X, \mathcal{U}, \mathcal{F})$ de $\delta = \delta_k$ (dit, lui, *sous-groupe des k-cocycles*). Le groupe quotient $\check{H}^k(X, \mathcal{U}, \mathcal{F}) := \check{Z}^k(X, \mathcal{U}, \mathcal{F}) / \check{B}^k(X, \mathcal{U}, \mathcal{F})$, qui matérialise l'obstruction pour qu'un *k-cocycle* soit un *k-cobord* est dit *k-ième groupe de cohomologie de Čech de X, à valeurs dans F, subordonné au recouvrement U*. Pour définir les groupes $\check{H}^k(X, \mathcal{F})$ (i.e. s'affranchir de la dépendance en le recouvrement \mathcal{U}), on prend les *limites inductives* (pour tous les recouvrements \mathcal{U} de X possibles, de plus en plus « fins », des groupes $\check{H}^k(X, \mathcal{U}, \mathcal{F})$: ceci revient à raisonner de la même manière que lorsque l'on passe des fonctions sur les ouverts d'un espace topologique aux germes de fonctions en un point de cet espace : on prend l'union disjointe des groupes $\check{H}^k(X, \mathcal{U}, \mathcal{F})$, puis on identifie (c'est une relation d'équivalence) un élément de $\check{H}^k(X, \mathcal{U}, \mathcal{F})$ et un élément de $\check{H}^k(X, \tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{F})$ lorsque les restrictions de ces classes de *k-cocycles* coïncident une fois « restreintes » à un raffinement commun aux deux recouvrements \mathcal{U} et $\tilde{\mathcal{U}}$ de X . On se reportera par exemple au livre de R.O. Wells, Appendix A [We0] (ou à [De0], section 5 du chapitre 4, ou bien encore à [GH], section 3 du chapitre 0) pour plus de détails.

¹⁷On peut adapter ici au cadre des fibrés en droites holomorphes (i.e. remplacer \mathcal{O}_X^* par \mathcal{E}_X^*) la preuve du théorème 8.2, chapitre 5 de [De0] ; c'est un exercice facile.

cohérents

$$(1.23) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{E}_X \xrightarrow{\exp(2i\pi(\cdot))} \mathcal{E}_X^* \longrightarrow 1.$$

Du fait que les groupes de cohomologie de Čech $\check{H}^1(X, \mathcal{E}_X)$ et $\check{H}^2(X, \mathcal{E}_X)$ sont nuls (à cause de la *platitude* du faisceau \mathcal{E}_X , en fait de la souplesse qu'autorise le cadre C^∞ en matière de *partition de l'unité*¹⁸), nous avons (se reporter à la section 5 du chapitre 4 de [De0], en particulier la proposition 5.11) :

$$\check{H}^1(X, \mathcal{E}_X) = \check{H}^2(X, \mathcal{E}_X) = \dots = 0.$$

Du fait de l'exactitude de la suite (1.23), nous avons un isomorphisme¹⁹ entre $\check{H}^1(X, \mathcal{E}_X^*)$ et $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$.

DÉFINITION 1.27. Si $L \rightarrow X$ est un \mathbb{C} -fibré en droites C^∞ au dessus d'une variété analytique complexe X , on appelle *première classe de Chern* de $L \rightarrow X$ (en fait de la classe d'isomorphisme de $L \rightarrow X$) l'image dans $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$ de la classe dans $\check{H}^1(X, \mathcal{E}_X^*)$ du cocycle attaché au fibré en droites $L \rightarrow X$.

REMARQUE 1.28. On peut ainsi attacher à un fibré en droites $L \rightarrow X$ au dessus d'une variété analytique complexe X deux êtres « caractéristiques » importants (à ne pas confondre!²⁰) :

- la *première classe caractéristique* de $L \rightarrow X$ telle qu'elle a été introduite à la définition 1.24, élément du groupe de cohomologie de de Rham $H_{\text{DR}}^2(X, \mathbb{R})$ (classe de cohomologie d'une forme de Chern induite par le choix d'une métrique et de la connexion de Chern associée) ;
- la *première classe de Chern* de $L \rightarrow X$, introduite à la définition 1.27, associée de fait à la classe d'isomorphisme du fibré, élément de $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$, la cohomologie prise ici étant la cohomologie de Čech.

On peut bien sûr associer ces deux objets à un fibré holomorphe en droites, mais on perd en faisant cela l'information concernant la structure holomorphe ; on préfère conserver pour les classes de fibrés en droites holomorphes l'isomorphisme avec le groupe de cohomologie de Čech $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ introduit dans la proposition 1.4.

¹⁸Ceci bien sûr n'est plus vrai dans le cadre holomorphe, du fait de la « rigidité » cette fois des objets !

¹⁹Il s'agit là d'un cas particulier d'un fait très important : si l'on dispose d'une suite exacte de faisceaux telles (1.23), on a automatiquement la suite longue induite de cohomologie de Čech :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \check{H}^0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{E}_X) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{E}_X^*) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{E}_X) \\ \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{E}_X^*) \rightarrow \check{H}^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^2(X, \mathcal{E}_X) \rightarrow \check{H}^2(X, \mathcal{E}_X^*) \rightarrow \check{H}^3(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Pour une preuve rapide de cette très importante propriété (ainsi qu'une présentation suffisante à nos besoins de la *cohomologie de Čech*), voir par exemple [GH], page 40.

²⁰Notons cependant que les deux groupes $H_{\text{DR}}^2(X, \mathbb{R})$ et $\check{H}^2(X, \mathbb{R})$ sont isomorphes (voir chapitre 4, section 6 de [De0]) et que l'élément de $\check{H}^2(X, \mathbb{R})$ correspondant à la première classe caractéristique de $L \rightarrow X$ via cet isomorphisme est en fait un élément de $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$, à savoir la première classe de Chern du fibré $L \rightarrow X$. Nous utiliserons cette remarque en fin du chapitre 3 lors de la formulation et de la preuve du théorème de Kodaira (théorème 3.41).

DÉFINITION 1.29. On appelle *diviseur de Weil* sur X toute combinaison localement finie et à coefficients entiers d'hypersurfaces analytiques $(H_\gamma)_\gamma$ irréductibles²¹ :

$$(1.24) \quad D = \sum_{\gamma} m_{\gamma} H_{\gamma}.$$

Dire que la combinaison linéaire ci-dessus (1.24) est « localement finie » signifie qu'étant donné un compact arbitraire K de X , il n'y a qu'au plus un nombre fini d'hypersurfaces H_γ rencontrant K et telles que $m_\gamma \neq 0$. Lorsque tous les m_γ sont positifs ou nuls, on dit que le diviseur D est *effectif*. L'ensemble de diviseurs de Weil hérite d'une structure de groupe commutatif pour l'addition, dit aussi *groupe des $(n-1)$ -cycles sur X* .

À tout diviseur de Cartier d sur X , il est naturellement possible d'associer un diviseur de Weil :

$$D = \sum_{H \text{ hypersurface de } X} \text{ordre}_H(d) \times H,$$

où l'ordre de $d = (f_\alpha)_\alpha$ suivant Y est défini dans une carte locale U_α intersectant l'hypersurface Y comme suit : en un point régulier²² ζ de $U_\alpha \cap H$ au voisinage duquel on peut supposer que localement $Y = \{z_n = 0\}$, l'ordre $\mu := \text{ordre}_H(d)$ est défini comme l'exposant $\mu = \mu_\zeta$ tel que, au voisinage de ζ , $f_\alpha(z) = z_n^\mu u_\alpha(z)$, u_α étant une fonction méromorphe non identiquement nulle sur $\{z_n = 0\}$; cet exposant ne dépend pas du point régulier ζ choisi sur H .

On peut en particulier associer un diviseur de Weil (noté aussi $\text{div}(f)$, comme le diviseur de Cartier correspondant) à une fonction méromorphe f non identiquement nulle sur X . On obtient ainsi ce que l'on appelle un *diviseur de Weil principal*. Le groupe des diviseurs de Weil, quotienté par le sous-groupe des diviseurs de Weil principaux, est appelé *groupe de Chow* $A_{n-1}(X)$ de la variété analytique complexe X . Dans le cas lisse où nous nous plaçons ici, ce groupe de Chow $A_{n-1}(X)$ s'identifie au groupe de Picard $\text{Pic}(X)$.

Réciproquement, *dans le contexte des variétés analytiques complexes*, il est possible, étant donné un diviseur de Weil D , de lui associer un diviseur de Cartier. Il suffit pour cela d'attacher localement à chaque H_γ une équation définissante h_{H_γ} et de définir le diviseur de Cartier à partir d de la donnée (locale) des fonctions méromorphes

$$\prod_Y h_{H_\gamma}^{m_\gamma}.$$

En revanche, *dans le cadre des espaces analytiques complexes* (que nous introduirons plus loin), nous verrons que, bien qu'il soit toujours possible de définir les deux concepts de *diviseur de Cartier* et de *diviseur de Weil* (et d'associer à un diviseur de Cartier un diviseur de Weil), il n'est plus en général possible d'identifier les deux points de vue : un diviseur de Weil peut ne pas provenir d'un diviseur de

²¹Une hypersurface de X est par définition un sous-ensemble fermé de X défini dans une carte au voisinage de chacun de ses points ζ par une équation locale $f_\zeta = 0$, où $f_\zeta \in \mathcal{O}_{X,\zeta}$. Dire que H est irréductible signifie que l'on ne peut écrire Y ensemblistement comme union de deux hypersurfaces H_1 et H_2 telles que $H_1 \neq H$ et $H_2 \neq H$.

²²L'ensemble des points singuliers de $U_\alpha \cap H$ est un sous-ensemble analytique fermé de dimension strictement inférieure à $n-1 = \dim H$ de U_α , voir par exemple [Ha1], chapitre 1, pour une justification de ce fait important au moins dans le contexte algébrique (la justification dans le contexte analytique est identique).

Cartier ! On peut concevoir les *diviseurs de Cartier* comme les diviseurs de Weil qui s'écrivent localement comme des *diviseurs de Weil principaux*.

EXEMPLE 1.30. L'exemple de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Sur la variété analytique $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, le diviseur de Cartier correspondant au système (U_j, f_j) , $j = 0, \dots, n$, où $U_j := \{[z_0 : \dots : z_n] ; z_j \neq 0\}$ et $f_j([z_0 : \dots : z_n]) = z_j/z_0$ induit le diviseur de Weil $-[z_0 = 0]$. La classe d'isomorphisme du fibré en droites correspondant dans le groupe de Picard $\text{Pic}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ est notée $\mathcal{O}(1)$. Les sections holomorphes du fibré en droites $(\mathcal{O}(1))^{\otimes m} := \mathcal{O}(m)$ s'expriment en coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ comme les fonctions polynomiales homogènes de degré m . Le dual de ce fibré est le fibré $\mathcal{O}(-1) := (\mathcal{O}(1))^*$, fibré en droites correspondant au diviseur de Weil effectif cette fois effectif $[z_0 = 0]$. Les sections holomorphes du fibré $\mathcal{O}(-m)$ pour $m > 0$ s'étendent naturellement à des fonctions homogènes de degré $-m$ sur \mathbb{C}^{n+1} , ce qui implique que l'espace des sections holomorphes du fibré $\mathcal{O}(-m)$ pour $m > 0$ soit réduit à $\{0\}$. On remarque aussi que le fibré $\mathcal{O}(-1) = (\mathcal{O}(1))^*$ est isomorphe au fibré tautologique sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, sous-fibré du fibré trivial $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{n+1}$, la fibre au dessus du point courant $[z_0 : \dots : z_n]$ étant la droite vectorielle de \mathbb{C}^{n+1} dirigée précisément par le vecteur (z_0, \dots, z_n) . Le groupe de Picard de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est ainsi isomorphe à \mathbb{Z} .

EXEMPLE 1.31. L'exemple des variétés toriques complètes lisses. Un exemple « jouet » important, extension naturelle du cadre de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, sera l'exemple des variétés toriques complètes et lisses, obtenues (sur le modèle de l'espace projectif) en « recollant » des copies de l'espace affine \mathbb{C}^n suivant des applications monoidales. La construction d'une variété torique repose sur l'introduction de ce que l'on appelle un *éventail* Σ , à savoir une collection finie de cônes rationnels stricts (i.e. engendrés par des éléments de \mathbb{Q}^n et ne contenant aucun sous-espace vectoriel non réduit à 0) σ partitionnant \mathbb{R}^n , ce de telle manière que l'intersection de deux cônes de la famille soit une face de chacun d'eux et que cette famille soit saturée par l'opération de prise de face. On suppose que les cônes de dimension n de la famille sont tous engendrés par une base de \mathbb{Z}^n (les n arêtes de chacun de ces cônes sont dirigées par des vecteurs à coordonnées entières dont le déterminant est égal à ± 1). L'éventail est alors dit *simple*. On réalise une variété analytique complexe compacte X en recollant des copies de \mathbb{C}^n correspondant à ces cônes suivant des applications monoidales : au cône engendré par les vecteurs primitifs (i.e. à coordonnées entières premières entre elles)

$$\eta_j = (\eta_{j1}, \dots, \eta_{jn}), \quad j = 1, \dots, n$$

est associée la transformation monoidale

$$(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \longmapsto \left(\prod_{j=1}^n \zeta_j^{\eta_{j1}}, \dots, \prod_{j=1}^n \zeta_j^{\eta_{jn}} \right)$$

(voir par exemple [Dan, Elh, Ew]). Les $n + r$ cônes ξ_1, \dots, ξ_{n+r} de dimension 1 de cet éventail peuvent être mis en correspondance ([Co1]) avec des « coordonnées homogènes » z_1, \dots, z_{n+r} de manière à ce que la variété analytique complexe X de

dimension n ainsi construite s'identifie au quotient géométrique

$$(1.25) \quad X \simeq \frac{\mathbb{C}^{n+r} \setminus \left\{ z \text{ t.q. } \prod_{\xi_j \text{ non face de } \sigma} z_j = 0; \sigma \in \Sigma, \dim(\sigma) = n \right\}}{\left\{ (t_1, \dots, t_{n+r}) \in \mathbb{C}^{n+r}; \prod_{j=1}^{n+r} t_j^{\xi_{jk}} = 1, k = 1, \dots, n \right\}}$$

de

$$\mathbb{C}^{n+r} \setminus \left\{ z; \prod_{\xi_j \text{ non face de } \sigma} z_j = 0; \sigma \in \Sigma, \dim(\sigma) = n \right\}$$

par le sous-groupe G (isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^r$)

$$G = \left\{ (t_1, \dots, t_{n+r}) \in \mathbb{C}^{n+r}; \prod_{j=1}^{n+r} t_j^{\xi_{jk}} = 1, k = 1, \dots, n \right\},$$

où $\xi_j = (\xi_{j1}, \dots, \xi_{jn})$ est un vecteur directeur à coordonnées entières et premières entre elles du cône de dimension un ξ_j . Il s'agit à d'une copie du modèle utilisé pour la description de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ comme quotient géométrique. Le groupe de Picard d'une telle variété analytique complexe est isomorphe à \mathbb{Z}^r . Si l'on suppose en effet que ξ_1, \dots, ξ_n sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n (cas auquel on peut se ramener aisément), les classes des diviseurs de Cartier en relation avec les diviseurs de Weil $\{z_{n+1} = 0\}, \dots, \{z_{n+r} = 0\}$ constituent une base de ce groupe additif. Notons que l'ouvert de \mathbb{C}^{n+r}

$$\mathbb{C}^{n+r} \setminus \left\{ z; \prod_{\xi_j \text{ non face de } \sigma} z_j = 0; \sigma \in \Sigma, \dim(\sigma) = n \right\}$$

(complémentaire de l'ensemble des zéros d'un certain idéal monomial) apparaît comme un « fibré en tores $(\mathbb{C}^*)^r$ » au dessus de la base X . Ce modèle nous servira de modèle « jouet » par la suite. Lorsque chacun des cônes de l'éventail est engendré par un système de vecteurs primitifs (à coordonnées entières et premières entre elles) que l'on peut compléter par des vecteurs de \mathbb{Z}^n en une base de \mathbb{R}^n (et non plus de \mathbb{Z}^n), l'objet réalisé comme le quotient géométrique (1.25) est une variété algébrique singulière, héritant d'une structure d'*orbifold*. Ce type de structure a fait l'objet de développements intensifs depuis les travaux de Thurston, les motivations étant le plus souvent liées à la physique mathématique (théorie des cordes, symétrie miroir, etc.). Une telle variété est dite dans ce cas (comme d'ailleurs l'éventail dont elle provient) *variété simpliciale*.

EXERCICE 1.32. Représenter sous forme de quotient géométrique (1.25) le produit $X = \mathbb{P}^{n_1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^{n_2}(\mathbb{C})$ de deux espaces projectifs. Montrer que le groupe de Chow $A_{n_1+n_2-1}(X)$ est isomorphe à \mathbb{Z}^2 et en donner une base en tant que \mathbb{Z} -module libre de rang 2.

1.4.2. Cycles analytiques d'une variété analytique complexe.

DÉFINITION 1.33. On appelle *sous-ensemble analytique (fermé)* d'une variété analytique complexe X de dimension n tout sous-ensemble fermé de X défini localement (dans un ouvert de carte U), et en coordonnées locales, comme le lieu des zéros communs d'une famille finie de fonctions holomorphes dans $V_\alpha = \tau(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$. Un tel sous-ensemble A est dit *irréductible* s'il est impossible de le décomposer comme union de deux sous-ensembles analytiques fermés A_1 et A_2 tels que $A_1 \neq A$ et $A_2 \neq A$.

Si A est un sous-ensemble analytique fermé, on peut lui associer un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_A \subset \mathcal{O}_X$, où

$$\mathcal{I}_A(U) := \{f \in \mathcal{O}_X(U); f = 0 \text{ sur } U \cap A\}.$$

Si z est un point de X , l'idéal $\mathcal{I}_{A,z} \subset \mathcal{O}_{X,z}$ des germes en z de fonctions holomorphes s'annulant sur A est un idéal radical, i.e. égal à son radical. Tout idéal \mathcal{I}_z de l'anneau noëthérien $\mathcal{O}_{X,z}$ admet une décomposition primaire (non nécessairement unique)

$$(1.26) \quad \mathcal{I}_z = \bigcap_{j=1}^{M_z} \mathfrak{Q}_{z,j},$$

où les idéaux $\mathfrak{Q}_{z,j}$ sont des idéaux primaires. Si cette décomposition n'est pas unique, ce qui l'est en revanche est la liste des idéaux premiers $\mathfrak{P}_{z,j} := \sqrt{\mathfrak{Q}_{z,j}}$, $j = 1, \dots, M_z$ ²³. Parmi ces idéaux (dits idéaux premiers associés à \mathcal{I}_z), on distingue les idéaux premiers qui se trouvent être éléments minimaux (dans cette liste) au sens de l'inclusion : les germes d'ensembles analytiques

$$V(\mathfrak{P}_{z,j}^{\text{isol}}) = \{z; f(z) = 0 \quad \forall f \in \mathfrak{P}_{z,j}^{\text{isol}}\}$$

correspondant sont appelés *composantes isolées* (de $\mathcal{O}_{X,z}/\mathcal{I}_z$). Du point de vue strictement géométrique, le germe de A en z est union de ses composantes isolées (qui sont des germes d'ensembles analytiques irréductibles). Dans le cas d'un idéal \mathcal{I}_z quelconque de $\mathcal{O}_{X,z}$, les autres idéaux premiers de la liste des idéaux premiers associés à \mathcal{I}_z génèrent, lorsque l'on considère leurs ensembles de zéros, des germes d'ensembles analytiques irréductibles que l'on appelle *composantes immergées* de $\mathcal{O}_{X,z}/\mathcal{I}_z$. Géométriquement, ces composantes immergées sont « invisibles », car « cachées » chacune dans une composante isolée ! Ceci traduit l'incapacité de la géométrie à rendre compte de toute l'information à caractère algébrique. Au travers des développements de l'analyse pluricomplexe (théorème de type Skoda, notion de contour apparent, etc.), on verra dans ce cours comment l'analyse peut permettre (tout au moins partiellement) de « rectifier » le tir !

Pour chacune des composantes (isolées) du germe de A au point z , on définit la *dimension de la composante au point z* comme la *dimension (de Krull)* de l'idéal \mathfrak{P} correspondant (i.e. la longueur de la plus grande chaîne strictement croissante d'idéaux premiers distincts que l'on puisse construire et dont \mathfrak{P} soit le premier maillon). La *dimension de A au point z* ($\dim A_z$) est définie comme le maximum des dimensions des composantes isolées du germe d'ensemble analytique A_z en ce point.

Si f_1, \dots, f_M engendrent un idéal premier de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ des germes de fonctions holomorphes à l'origine, de dimension de Krull p , on admettra (voir par exemple [Ha1, GRo]) que tous les mineurs de rang $n - p$ de la matrice jacobienne $D(f_1, \dots, f_M)/D(z_1, \dots, z_n)$ ne sauraient être identiquement nuls sur le germe d'ensemble $\{f_1 = \dots = f_M = 0\}$. Il en résulte que si A est un sous-ensemble analytique irréductible de X , l'ensemble des points singuliers de A (i.e. les points de A au voisinage desquels A ne peut être décrit comme une sous-variété, points constituant un sous-ensemble analytique A_{sing} inclus dans A) est tel que

²³On rappelle que le radical $\sqrt{\mathbb{J}}$ d'un idéal \mathbb{J} dans un anneau commutatif \mathbb{A} est défini comme l'ensemble des éléments $a \in \mathbb{A}$ tels qu'une puissance de a appartienne à \mathbb{J} . Un idéal *primaire* \mathfrak{Q} est un idéal dont le radical est un idéal *premier*. Un idéal *premier* \mathfrak{P} est idéal propre $\mathfrak{P} \neq \mathbb{A}$ tel que $ab \in \mathfrak{P}$ implique $a \in \mathfrak{P}$ ou $b \in \mathfrak{P}$. Si \mathfrak{Q} est primaire, son radical est un idéal premier \mathfrak{P} et on dit que \mathfrak{Q} est \mathfrak{P} -primaire.

le complémentaire $A \setminus A_{\text{sing}} = A_{\text{reg}}$ est dense dans A (en tout point de A_{sing} , on a en effet $\dim(A_{\text{sing}})_z < \dim A_z$). Les points non singuliers de A sont dits *points réguliers*. Lorsque A est irréductible, la fonction $z \mapsto \dim A_z$ est constante sur A_{reg} ; sa valeur définit la *dimension* de A (entre 0 et $n-1$). On dit que A est de *dimension pure* si toutes ses composantes irréductibles sont de même dimension.

DÉFINITION 1.34. Un *p-cycle* d'une variété analytique complexe de dimension n ($0 \leq p \leq n-1$) est par définition une combinaison linéaire formelle localement finie

$$C = \sum_{\gamma} m_{\gamma} C_{\gamma}$$

de sous-ensembles analytiques irréductibles C_{γ} de dimension p . L'ensemble des *p-cycles* de X hérite naturellement d'une structure de groupe commutatif pour l'addition. Le *p-cycle* est dit *effectif* si tous les coefficients m_{γ} sont positifs.

Parmi les configurations de sous-ensembles analytiques de dimension pure de X , une configuration sera particulièrement intéressante pour nous, dans la mesure où elle est induit la généralisation naturelle de diviseur de Weil effectif au cadre de la dimension quelconque p . C'est celle d'*intersection complète*. Nous distinguerons ici le point de vue local du point de vue global.

DÉFINITION 1.35. Un sous-ensemble analytique fermé A de dimension pure égale à $p \in \{0, \dots, n-1\}$ d'une variété analytique complexe X de dimension n est dit *intersection complète locale* si A peut être décrit localement dans un voisinage U_a de son point courant $a \in A$ comme l'intersection d'exactly $n-p$ hypersurfaces de U .

Pour introduire le point de vue global, il est commode d'utiliser la notion de fibré holomorphe.

DÉFINITION 1.36. Un sous-ensemble analytique fermé A de dimension pure égale à p ($0 \leq p \leq n-1$) d'une variété analytique complexe X de dimension n est dit *intersection complète globale* si et seulement si A est le lieu des zéros d'une section globale s d'un fibré holomorphe de rang exactement $n-p$ au dessus de X .

REMARQUE 1.37. Les deux aspects (local et global) diffèrent : dans le premier cas, étant donnés deux ouverts de carte U_{α} et U_{β} d'intersection non vide, il est parfaitement possible que A soit défini dans U_{α} par (f_1, \dots, f_{n-p}) , dans U_{β} par (g_1, \dots, g_{n-p}) , que $f \circ \tau_{\alpha}^{-1} = \Phi \cdot [g \circ \tau_{\alpha}^{-1}]$ dans $\tau_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$, Φ étant une matrice $(n-p, n-p)$ de fonctions holomorphes dans $\tau_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$, sans que $\det \Phi$ soit un inversible dans $\mathcal{O}(\tau_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}))$. Dans le second cas par contre (définition globale), f et g seront toujours ainsi reliées par une matrice de fonctions Φ , holomorphes dans $\tau_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$, et telle que $\det \Phi$ soit un inversible dans $\mathcal{O}(\tau_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}))$.

EXEMPLE 1.38. Une classe d'exemples d'intersections complètes globales dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est celle des sous-ensembles analytiques de dimension pure égale à p ($0 \leq p \leq n-1$) de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ qu'il est possible de définir comme le lieu des zéros de $n-p$ polynômes homogènes (P_1, \dots, P_{n-p}) (section d'un fibré du type $\mathcal{O}(D_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(D_{n-p})$, où D_1, \dots, D_{n-p} sont des entiers strictement positifs, $D_j = \deg P_j$, $j = 1, \dots, n-p$).

REMARQUE 1.39. Autant la notion d'*intersection complète* s'avère facile à décrire du point de vue géométrique, autant elle est plus difficile à exprimer du

point de vue algébrique : si f_1, \dots, f_{n-p} sont $n-p$ fonctions holomorphes dans un ouvert pseudoconvexe de \mathbb{C}^n (plus généralement, $n-p$ fonctions holomorphes sur une *variété de Stein* X , voir la définition dans la section 1.4.3 suivante), f_1, \dots, f_{n-p} définissent une *intersection complète* dans X (i.e. le sous-ensemble analytique fermé $\{z \in X; f_1(z) = \dots = f_{n-p}(z) = 0\}$ est de dimension $n-p$) si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour toute relation homogène

$$\sum_{i_1 + \dots + i_{n-p} = k} a_{i_1, \dots, i_{n-p}}(z) f_1^{i_1}(z) f_2^{i_2}(z) \dots f_{n-p}^{i_{n-p}}(z) \in [(f_1, \dots, f_{n-p}) \mathcal{O}_X(X)]^{k+1},$$

où les $a_{i_1, \dots, i_{n-p}}$ sont des fonctions holomorphes dans X et $\mathcal{O}_X(X)$ désigne l'anneau des fonctions holomorphes dans X , on a

$$\forall i_1, \dots, i_{n-p}, a_{i_1, \dots, i_{n-p}} \in (f_1, \dots, f_{n-p}) \mathcal{O}_X(X).$$

Pour formuler du point de vue algébrique la clause de complète intersection (qui se formule très simplement en termes de condition sur les dimensions du point de vue géométrique), il faut donc faire appel à un critère lourd à manier et impliquant une formulation asymptotique (« pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour toute relation, etc. »). Nous retrouverons pareille observation plusieurs fois dans ce cours.

1.4.3. La notion de cohérence et les théorèmes d'Oka et de Cartan.

Nous donnons dans paragraphe quelques rappels de notions importantes liées à la théorie des faisceaux. Rappelons ici la notion fondamentale de *cohérence*, \mathcal{O} désignant un *faisceau d'anneaux commutatifs*²⁴ sur un espace topologique X et \mathcal{F} une *faisceau de \mathcal{O} -modules sur X* . Dans toute la suite, nous prendrons $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$.

DÉFINITION 1.40. Le faisceau \mathcal{F} est dit *cohérent* (comme faisceau de \mathcal{O}_X -modules) si et seulement si :

- d'une part, il est localement de type fini, i.e. pour pour z dans X , il existe un voisinage U_z de z et q éléments s_1, \dots, s_q de $\mathcal{O}_X(U_z)$ tels que, pour tout $z' \in U_z$, le $\mathcal{O}_{X, z'}$ -module $\mathcal{F}_{z'}$ soit engendré par les germes $s_{j, z'}$, $j = 1, \dots, q$;
- d'autre part, pour tout ouvert U de X , pour tout choix de sections s_1, \dots, s_q de $\mathcal{F}(U)$, le $(\mathcal{O}_X)|_U$ -sous-faisceau de $(\mathcal{O}_X^{\oplus q})|_U$ des relations $\mathcal{R}_U(s_1, \dots, s_q)$, i.e. le noyau de l'homomorphisme de faisceaux

$$(g_1, \dots, g_q) \in \mathcal{O}_{X, z}^{\oplus q} \longmapsto \sum_{j=1}^q g_{j, z} s_{j, z} \in \mathcal{F}_z, \quad z \in U,$$

²⁴Se donner un *pré-faisceau* \mathcal{F} sur un espace topologique X revient à se donner, pour chaque ouvert U de X , un anneau commutatif $\mathcal{F}(U)$ (dit *anneau des sections du faisceau \mathcal{F} au dessus de l'ouvert U*), ainsi que, pour toute paire d'ouverts U, V tels que $U \subset V$, des morphismes « de restriction » $\rho_{U, V} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ sepliant à la règle de transitivité : $\rho_{U, V} \circ \rho_{V, W} = \rho_{U, W}$ si $U \subset V \subset W$, avec de plus $\rho_{U, U} = \text{Id}_E$. Le *pré-faisceau* devient un *faisceau* si l'on dispose en plus des deux axiomes de « recollement » :

- si (U_α) est un recouvrement de U et si $\rho_{U_\alpha, U}(F) = \rho_{U_\alpha, U}(G)$ pour tout α , les éléments F et G de $\mathcal{F}(U)$ sont égaux;
- si l'on dispose d'une famille $(F_\alpha)_\alpha$ avec $F_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ et que

$$\rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\alpha}(F_\alpha) = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\beta}(F_\beta),$$

les F_α se « recollent » en un élément $F \in \mathcal{F}(U)$ tel que $\rho_{U_\alpha, U}(F) = F_\alpha$.

Nous envisagerons plus loin des faisceaux d'anneaux non commutatifs tels le faisceau \mathcal{D}_X des opérateurs différentiels à coefficients analytiques sur une variété analytique complexe X de dimension n , ainsi que les \mathcal{D}_X -modules à gauche ; un tel cadre est cette fois non commutatif car les commutateurs $[\partial_j, z_k]$ sont égaux aux symboles de Kronecker δ_{jk} . Les références de base concernant la théorie des \mathcal{D}_X modules sont les livres de J.E. Björk [Bj1, Bj2].

est aussi localement de type fini.

Les exemples suivants seront essentiels pour nous dans la suite de ce cours :

- (1) D'après le théorème d'Oka (voir par exemple [De0], chapitre 2, section 3.3), si X est une variété analytique complexe de dimension n , le faisceau \mathcal{O}_X est un faisceau cohérent (comme faisceau de \mathcal{O}_X -modules sur lui-même). Il en est de même par conséquent de tout faisceau localement libre²⁵, donc (par exemple) du faisceau $\mathcal{F}(X, E) = \mathcal{O}_X(E)$ des sections holomorphes d'un fibré vectoriel holomorphe de rang m sur X .
- (2) Si A est un sous-ensemble analytique de X , le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_A \subset \mathcal{O}_X$ défini par

$$\mathcal{I}_{A,z} := \{g_z \in \mathcal{O}_{X,z}; g_z = 0 \text{ sur } A_z\},$$

est un faisceau cohérent (c'est un théorème de H. Cartan, voir par exemple [De0], chapitre 2, section 4.4). Il en est de même, puisque l'on dispose de la suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_A \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_A \rightarrow 0$$

dans laquelle deux des entrées sont cohérentes (voir [De0], chapitre 2, théorème 3.14), pour le faisceau quotient $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_A$.

- (3) Si $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ est un morphisme propre entre deux variétés analytiques complexes et si \mathcal{F} est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -modules sur \tilde{X} , le faisceau $\pi_*[\mathcal{F}]$, image directe du faisceau \mathcal{F} par π , est cohérent comme faisceau de \mathcal{O}_X -modules; il s'agit ici d'un théorème du à Grauert [Grau] que nous admettons ici (on trouvera une preuve détaillée dans la section 5 du chapitre 9 de [De0]).

Même s'il ne s'agit pas d'une correspondance parfaite²⁶, nous proposons, suivant J. Kollár [Ko2], avec la proposition suivante, une « mise en correspondance » entre faisceaux d'idéaux cohérents sur une variété analytique complexe X et cycles effectifs sur cette même variété.

PROPOSITION 1.5. *Soit X une variété analytique complexe. À tout cycle C de X effectif s'écrivant formellement*

$$C = C_0 + C_1 + \cdots + C_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\gamma} m_{j,\gamma} C_{j,\gamma},$$

où C_j est un j -cycle, les $C_{j,\gamma}$ des sous-ensembles analytiques fermés irréductibles de dimension j , et les $m_{j,\gamma}$ des entiers positifs (les sommes étant localement finies), on peut attacher naturellement le faisceau cohérent d'idéaux

$$(1.27) \quad \mathcal{I}(C) := \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{\gamma} (I_{C_{j,\gamma}})^{m_{j,\gamma}}.$$

²⁵Dire qu'un faisceau de \mathcal{O}_X -modules commutatifs est *localement libre* équivaut à dire que tout point z de X admet un voisinage U_z tel que $\mathcal{F}(U)$ soit isomorphe en tant que $\mathcal{O}(U)$ -module à $(\mathcal{O}(U))^{\oplus r}$ pour un certain $r = r(z)$. Ceci signifie qu'il existe des éléments s_1, \dots, s_r de $\mathcal{F}(U_z)$ tels que, pour tout $z' \in U_z$, l'application $(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathcal{O}_{X,z'}^{\oplus r} \mapsto \sigma_1 s_{1,z'} + \cdots + \sigma_r s_{r,z'}$ soit un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X,z'}$ modules. C'est le cas du faisceau des sections holomorphes d'un fibré holomorphe de rang m localement trivial.

²⁶Il aurait fallu pour cela introduire le point de vue de la *théorie des schémas*.

D'autre part, étant donné un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{J} \neq \mathcal{O}_X$, on note, pour $j = 0, \dots, n-1$, \mathcal{F}_j le sous-faisceau des sections s de $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ dont le support²⁷ est un ensemble analytique de dimension au moins égale à j . Si l'on note $C_{j,\gamma}$ les composantes irréductibles du support du faisceau $\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{j+1}$ et $z_{j,\gamma}$ un point générique sur $(C_{j,\gamma})_{\text{reg}}$, on peut associer au faisceau d'idéaux \mathcal{J} le cycle

$$(1.28) \quad C(\mathcal{J}) := \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\gamma} \text{longueur}(\mathcal{F}_{j,z_{j,\gamma}}) C_{j,\gamma},$$

ce qui permet²⁸ d'associer à \mathcal{J} un cycle $C(\mathcal{J})$ tel que $\mathcal{I}(C(\mathcal{J})) \subset \mathcal{J}$.

DÉMONSTRATION. Pour vérifier la dernière assertion (la seule assertion de fait à vérifier, les autres étant juste des définitions), il faut faire appel à des arguments d'algèbre commutative sur lesquels nous n'insisterons pas ici. Il suffit de remarquer que, pour tout $j = 0, \dots, n-1$, on a, par définition des nombres

$$m_{j,\gamma} := \text{longueur}(\mathcal{F}_{j,z_{j,\gamma}}), \quad z_{j,\gamma} \in (C_{j,\gamma})_{\text{reg}},$$

$$\mathcal{F}_j \times \prod_{\gamma} (\mathcal{I}(C_{j,\gamma}))^{m_{j,\gamma}} \subset \mathcal{F}_{j+1}.$$

Il en résulte

$$\mathcal{I}(C(\mathcal{J})) \subset \text{Ann}(\mathcal{O}/\mathcal{J}),$$

d'où l'inclusion $\mathcal{I}(C(\mathcal{J})) \subset \mathcal{J}$. □

Si X est une *variété de Stein*²⁹ de dimension n (qu'il est donc possible de plonger dans \mathbb{C}^{2n+1} d'après un résultat de K. Stein³⁰), on sait d'après le théorème A de Cartan que tout faisceau cohérent \mathcal{F} de \mathcal{O}_X -modules est engendré par ses sections globales (pour l'énoncé des théorèmes A et B de Cartan, voir par exemple [GRo],

²⁷Le support d'une section est l'adhérence du sous-ensemble de X sur lequel cette section ne s'annule pas; c'est, lorsqu'il s'agit comme ici d'une section de $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$, où \mathcal{J} désigne un faisceau cohérent d'idéaux de \mathcal{O}_X , un sous-ensemble analytique inclus dans le lieu des zéros communs des sections du faisceau \mathcal{J} .

²⁸On rappelle que la notion de *longueur* d'un \mathbb{A} -module lorsque \mathbb{A} est un anneau commutatif (ici $\mathbb{A} = \mathcal{O}_{X,z_{j,\gamma}}$), correspond à celle de *dimension* pour un \mathbb{K} -espace vectoriel (\mathbb{K} étant cette fois un corps commutatif).

²⁹Une *variété de Stein* est une variété analytique sur laquelle on dispose d'un éventail suffisamment riche de fonctions holomorphes, i.e. de sections globales du faisceau \mathcal{O}_X , à savoir une variété analytique complexe *holomorphiquement convexe* (l'enveloppe convexe holomorphe de tout compact est compacte) telle que, pour tout $z \neq z'$ dans X , il existe au moins une fonction holomorphe f sur X telle que $f(z) \neq f(z')$. L'espace \mathbb{C}^n et plus généralement tout ouvert pseudoconvexe de \mathbb{C}^n sont des variétés de Stein. En revanche, l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (plus généralement une variété analytique complexe connexe compacte quelconque) ne peuvent être des variétés de Stein, l'obstruction étant le principe du maximum.

³⁰Attention! Il s'agit ici d'un plongement holomorphe; d'après le *théorème de Whitney*, on sait que la variété différentiable sous-jacente (que X soit Stein ou non) peut toujours se plonger dans \mathbb{R}^{4n+1} , mais ce plongement n'est pas holomorphe! Les sous-variétés de \mathbb{C}^N (ou d'un ouvert pseudoconvexe de \mathbb{C}^N) sont, par contre, *de Stein*.

chapitre 8)³¹. D'autre part (théorème B de Cartan), tous les groupes de cohomologie $\check{H}^q(X, \mathcal{F})$ (au sens de Čech) sont nuls pour $q \geq 1$ (le groupe $\check{H}^0(X, \mathcal{O}_X)$ étant, lui, le groupe additif $\mathcal{O}(X)$ des fonctions holomorphes dans X , groupe des sections globales du faisceau \mathcal{O}_X). Ceci implique que tout faisceau cohérent \mathcal{F} de \mathcal{O}_X -modules sur une variété de Stein admet au moins, au voisinage de tout compact K , une *résolution libre*, c'est-à-dire qu'il existe une suite exacte d'homomorphismes de faisceaux au voisinage U de K :

$$(1.30) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus r_N} \xrightarrow{F_N} \mathcal{O}_U^{\oplus r_{N-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus r_2} \xrightarrow{F_2} \mathcal{O}_U^{\oplus r_1} \xrightarrow{F_1} \mathcal{O}_U^{\oplus r_0} \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0.$$

Si $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$, où \mathcal{I} désigne un \mathcal{O}_X faisceau d'idéaux cohérent, on a $\text{Im}(\mathcal{O}_U^{\oplus r_1} \rightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus r_0}) = \mathcal{I}_U$. Lorsque \mathcal{I} est un faisceau cohérent d'idéaux de \mathcal{O}_X , une résolution libre de $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ est dite par extension *résolution libre* de \mathcal{I} .

Puisque toute variété analytique complexe est localement de Stein, on peut définir, au niveau des germes en un point z de X , la *longueur minimale d'une résolution* de \mathcal{F}_z lorsque \mathcal{F} est un faisceau cohérent de \mathcal{O}_X -modules (*i.e.* le plus petit entier N tel qu'existe une résolution (1.30)). Ce nombre est par définition $n - \text{profondeur}(\mathcal{F}_z)$ (c'est la définition de la notion de *profondeur* en un point $z \in X$ d'un faisceau \mathcal{F}) et cette longueur minimale est majorée par la codimension au point z du support du faisceau \mathcal{F} . L'exactitude du complexe (1.30) équivaut en effet (voir par exemple [Eis1], théorème 20.9) au fait que

$$\text{codim} \{z \in X; \text{rank}(F_j(z)) < r_k - r_{k+1} + \dots \pm r_N\} \geq j$$

pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. Si $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$, où \mathcal{I} est un faisceau d'idéaux, cette longueur minimale est donc majorée par la codimension en z de l'ensemble analytique défini comme le lieu des zéros des éléments de \mathcal{I}_z ³².

DÉFINITION 1.41. Un faisceau cohérent sur une variété analytique complexe X est dit *Cohen-Macaulay* si et seulement si, en tout point de z du support de \mathcal{F} , la longueur minimale ν_z d'une résolution libre du faisceau \mathcal{F}_z est égale à la codimension

³¹L'une des conséquences les plus marquantes du théorème A est la suivante : si F, f_1, \dots, f_m désignent $m+1$ fonctions holomorphes sur une *variété de Stein* X , telles que localement, en tout point $z \in X$, on ait $F_z \in (f_{1,z}, \dots, f_{m,z})\mathcal{O}_{X,z}$ au niveau des germes de fonctions, alors il existe a_1, \dots, a_m holomorphes dans X telles que l'on ait une identité globale $F \equiv \sum_{j=1}^m a_j f_j$ dans X toute entière. Un exemple important est celui de $X = U \times U \subset \mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w^n$, où U est un ouvert pseudoconvexe de \mathbb{C}_z^n , et où $f_j(z, w) := z_j - w_j$, $j = 1, \dots, n$; si f est une fonction holomorphe dans U , il existe n fonctions g_1, \dots, g_n holomorphes dans $U \times U$ telles que

$$F(z, w) := f(z) - f(w) = \sum_{j=1}^n (z_j - w_j) g_j(z, w), \quad \forall (z, w) \in U \times U.$$

Une telle formule est dite *formule de division d'Hefer*; elle est facile à obtenir dans un ouvert convexe, car il suffit d'utiliser la formule de Taylor avec reste intégral

$$(1.29) \quad f(z) - f(w) = \int_0^1 \frac{d}{dt} [f(tz + (1-t)w)] dt = \sum_{j=1}^n (z_j - w_j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z_j} (tz + (1-t)w) dt,$$

mais pas du tout évidente dans un ouvert pseudoconvexe U !

³²La recherche d'une résolution libre du type (1.30) pour $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$, où \mathcal{I} est un faisceau cohérent d'idéaux, consiste en ce que l'on appelle la *détermination des syzygies* (voir [Eis2]) du quotient $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$; la connaissance des syzygies fournit une information complète concernant les questions d'effectivité dans lesquelles le faisceau cohérent d'idéaux \mathcal{I} se trouve impliqué; malheureusement, elle s'avère en général en général impossible à conduire algorithmiquement en temps polynomial.

du support de \mathcal{F}_z en ce point. Si \mathcal{I} est un faisceau cohérent d'idéaux tel que $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ soit Cohen-Macaulay, on dit alors par extension que *le faisceau cohérent d'idéaux \mathcal{I} est Cohen-Macaulay*.

REMARQUE 1.42. Si \mathcal{I} est Cohen-Macaulay, la décomposition primaire de \mathcal{I}_z (voir (1.26)) ne saurait faire apparaître de composantes immergées. Le point de vue géométrique traduit donc dans ce cas fidèlement (hormis le calcul des multiplicités sur lequel on reviendra) le point de vue algébrique.

EXEMPLE 1.43. Si f_1, \dots, f_{n-p} sont $n-p$ éléments de \mathcal{O}_X définissant (comme ensemble de zéros communs) un sous-ensemble analytique fermé de dimension p ($f = (f_1, \dots, f_{n-p})$, considérée comme section d'un fibré vectoriel de rang $n-p$, définit donc une intersection complète globale, au sens de la définition 1.36), le faisceau d'idéaux $(f_1, \dots, f_{n-p})\mathcal{O}_X$ est Cohen-Macaulay; une résolution libre minimale en est donnée (sur X) par le *complexe de Koszul* (que l'on introduira plus tard dans ce cours dans le contexte des fibrés vectoriels) construit à partir des f_j (voir la section 2.5.3 dans le chapitre 2).

Si la tractabilité de la notion de résolution libre est dans la pratique extrêmement difficile, savoir qu'un faisceau cohérent admet toujours localement (et même au voisinage de tout compact lorsque X est de Stein) une résolution libre s'avère très important en géométrie analytique complexe. Nous serons amenés à l'exploiter au chapitre 4.

1.4.4. La géométrie locale des ensembles analytiques. Il sera très important pour nous par la suite d'être à même de décrire géométriquement comment se présente localement, au voisinage d'un point z d'une variété analytique X , un sous-ensemble analytique fermé A de X . En utilisant un ouvert de carte U au voisinage de z , on se ramène évidemment à la description géométrique d'un sous-ensemble analytique d'un ouvert V de \mathbb{C}^n au voisinage de l'un de ses points (que l'on suppose pour simplifier être l'origine).

a). *Le cas des hypersurfaces : la « préparation à la Weierstrass ».*

Le cas particulier de la description locale des hypersurfaces repose sur le *théorème de préparation* de Weierstrass. Décrivons ici la méthode et le résultat. Si f est une fonction holomorphe non identiquement nulle au voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^n , telle que $f(0) = 0$, on peut écrire, au voisinage de l'origine,

$$f(z_1, \dots, z_{n-1}, w) = f_{\tilde{\mu}}(z_1, \dots, z_{n-1}, w) + o(|(z_1, \dots, z_{n-1}, w)|^{\tilde{\mu}}),$$

où $f_{\tilde{\mu}}$ est polynôme homogène non nul de degré $\tilde{\mu} \in \mathbb{N}^*$. Si l'on effectue un changement de variables linéaire générique, on peut supposer qu'au voisinage de l'origine dans \mathbb{C}_w (i.e. dans un disque $\overline{\delta_w(0, \epsilon)}$ avec $\epsilon \ll 1$ assez petit)

$$f(0, 0, \dots, 0, w) = w^{\tilde{\mu}} h(w), \quad |h(w)| \geq \delta > 0, \quad \forall w \in \overline{\delta_w(0, \epsilon)}.$$

D'après le théorème de Rouché, pour $\|z\| = \|(z_1, \dots, z_{n-1})\|$ assez petit (fonction de ϵ , i.e. dans un polydisque Δ_z), la fonction

$$w \mapsto f(z, w)$$

admet exactement $\tilde{\mu}$ zéros (comptés avec leurs multiplicités) $w_j(z)$, $j = 1, \dots, \tilde{\mu}$, dans le disque fermé $\overline{\delta_w(0, \epsilon)}$, tous ces zéros étant à l'intérieur du disque ouvert.

Pour $k = 1, \dots, \mu$, on a, grâce à la formule des résidus,

$$\sum_{j=1}^{\tilde{\mu}} [w_j(z)]^k = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=\epsilon} \zeta^k \frac{\frac{\partial f}{\partial z_n}(z, \zeta)}{f(z, \zeta)} d\zeta,$$

ce qui montre que les sommes de Newton

$$z \mapsto \Phi_k(z) := \sum_{j=1}^{\tilde{\mu}} [w_j(z)]^k, \quad k = 1, \dots, \tilde{\mu},$$

des racines $w_j(z)$, $j = 1, \dots, N$, sont des fonctions holomorphes de z au voisinage de $z = 0$; il en est de même, grâce aux formules de Newton, des fonctions symétriques $z \mapsto \varphi_1(z), \dots, z \mapsto \varphi_{\tilde{\mu}}(z)$, de ces racines. Si l'on forme la fonction

$$(z, w) \mapsto P(z, w) := w^{\tilde{\mu}} - \varphi_1(z)w^{\tilde{\mu}-1} + \dots + (-1)^{\tilde{\mu}}\varphi_{\tilde{\mu}}(z),$$

on constate que

$$(z, w) \mapsto \frac{f(z, w)}{P(z, w)}$$

est une fonction holomorphe ne s'annulant pas au voisinage de l'origine de \mathbb{C}^n . Décrire l'ensemble des zéros de f au voisinage de l'origine revient à décrire celui de la fonction $(z, w) \mapsto P(z, w)$, qui se présente comme un *revêtement* à $\tilde{\mu}$ feuillets au dessus d'un voisinage de l'origine dans \mathbb{C}_z^{n-1} . Si $\sigma(z)$ désigne le discriminant de $P(X, z)$, ce revêtement est une variété lisse de dimension $n - 1$ au dessus de $\{z; \sigma(z) \neq 0\}$; l'ensemble $\{\sigma(z) = 0\}$ au dessus duquel ce revêtement est ramifié est dit *lieu discriminant*. C'est cette présentation locale que nous nous proposons d'étendre ici pour des sous-ensembles analytiques de dimension $1 \leq p < n - 1$. Le nombre $\tilde{\mu}$ de feuillets du revêtement est égal, lorsque f est supposé irréductible dans \mathcal{O}_{X, z_0} , à la *multiplicité* $\mu_{z_0}(f)$ de f en z_0 , i.e. au degré de la composante homogène de plus bas degré de $\zeta \mapsto f(z_0 + \zeta)$ (on appelle aussi ce degré la *valuation* de f en z_0).

b) Le cas général : la « préparation à la Noether ».

La proposition suivante (que nous admettrons ici, voir [GrR], p. 72) nous permet de nous ramener au cas des intersections complètes locales (voir la définition 1.35). Cette proposition est d'autant plus importante pour nous que nous verrons ultérieurement combien le contexte « intersection complète » est de nature à faciliter les choses dans les problèmes de géométrie analytique complexe (et plus généralement de géométrie complexe).

PROPOSITION 1.6. *Soit $A \subset U$ un sous-ensemble analytique fermé (de dimension pure $p \in \{0, \dots, n - 1\}$) d'un voisinage ouvert U de l'origine dans \mathbb{C}^n avec $0 \in A$; il existe un voisinage V de l'origine dans U , $n - p$ fonctions f_1, \dots, f_{n-p} holomorphes dans V , définissant dans V une intersection complète*

$$\tilde{A} = \{f_1 = \dots = f_{n-p} = 0\},$$

de telle manière que $A \cap V$ soit union d'un nombre fini μ de composantes irréductibles \tilde{A}_j du sous-ensemble analytique $\tilde{A} \subset V$, avec de plus $df_1 \wedge \dots \wedge df_{n-p} \neq 0$ sur \tilde{A}_j pour tout j .

Si f_1, \dots, f_{n-p} sont $n-p$ fonctions holomorphes au voisinage de l'origine et définissant dans ce voisinage une intersection complète \tilde{A} , le lemme de normalisation d'E. Noëther (on pourra se reporter à la section 4.2 du chapitre 2 de [De0] ou aussi au livre de J.E. Björk [Bj1], chapitre 8, section 5.4, pour une présentation claire de la méthode dans le cadre algébrique, présentation qu'il est aisé de transcrire au cadre analytique), on peut faire un changement linéaire de coordonnées $\zeta = (z_1, \dots, z_p, w_1, \dots, w_{n-p})$ de manière à ce que, si $W \subset V \subset \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w$ est un polycylindre ouvert $\Delta_z \times \delta_w$ centré en $(0, 0)$, la projection

$$\pi : (z, w) \in \tilde{A} \cap (\Delta_z \times \delta_w) \longmapsto z \in \Delta_z$$

soit une application propre ; le changement linéaire de coordonnées peut d'ailleurs être choisi générique et le degré de cette application est génériquement constant (égal à $\tilde{\mu}$, sa valeur minimale) lorsque l'on opère un tel changement de variable générique : par exemple, si $n = 2$, $p = 1$ et $f(z, w) = z^2 - w^3$, la valeur générique est $\tilde{\mu} = 2$, et non $\tilde{\mu} = 3$! Le nombre de composantes irréductibles de \tilde{A} dans un voisinage suffisamment petit de l'origine est majoré par $\tilde{\mu}$, dont on verra au chapitre 2 qu'il représente le *nombre de Lelong* du courant d'intégration sur l'ensemble \tilde{A} en 0. Du fait que $df_1 \wedge \dots \wedge df_{n-p} \neq 0$ sur \tilde{A}_j , on peut même assurer (toujours si le changement de variables est générique) que

$$J(z, w) := \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-p})}{\partial(w_1, \dots, w_{n-p})} \neq 0$$

sur $\tilde{A}_j \cap (\Delta_z \times \delta_w)$ pour tout j . On suppose que l'hypersurface $\{\tilde{\sigma} = 0\}$ est le *lieu discriminant* dans Δ_z de la projection π et que $\{\sigma = 0\} \subset \{\tilde{\sigma} = 0\}$ est celui de $\pi|_A$. Notons que σ est l'équation de la projection sur Δ_z de l'ensemble

$$A \cap \{(z, w) \in \Delta_z \times \delta_w ; J(z, w) = 0\}.$$

Au dessus du complémentaire de $\{\tilde{\sigma} = 0\}$ dans Δ_z , $\tilde{A} \cap (\Delta_z \times \delta_w)$ se présente comme $\tilde{\mu}$ feuilletés disjoints de sous-variété de dimension p et l'on a, pour tout $z \in \Delta_z$,

$$\pi^{-1}(z) \cap \tilde{A} = \{(z, w^{(1)}(z)), \dots, (z, w^{(\tilde{\mu})}(z))\}.$$

Il existe d'autre part des fonctions holomorphes en z d'une part, en u, w d'autre part, respectivement dans Δ_z et δ_w , telles que

$$f_j(z, u) - f_j(z, w) = \sum_{k=1}^{n-p} h_{jk}(z, u, w)(u_j - w_j), \quad j = 1, \dots, n-p$$

(du fait de la convexité des polycylindres, ce sont des formules d'Hefer, voir (1.29)). Si h est une fonction holomorphe sur la sous-variété $A_{\text{reg}} \cap (\Delta_z \times \delta_w)$, il est aisé (de part la proposition 1.6) de la prolonger en une fonction holomorphe sur la sous-variété $\tilde{A}_{\text{reg}} \times (\Delta_z \times \delta_w)$ en posant $h = 0$ aux points de $(\tilde{A}_{\text{reg}} \setminus A_{\text{reg}}) \cap (\Delta_z \times \delta_w)$. On constate alors que la fonction

$$\tilde{H} : (z, w) \in \Delta_z \times \delta_w \longmapsto \sum_{j=1}^{\tilde{\mu}} h(z, w^{(j)}(z)) \det[h_{jk}](z, w, w^{(j)}(z))$$

est en fait une fonction holomorphe en (z, w) dans $(\Delta_z \setminus \{\sigma = 0\}) \times \delta_w$. La restriction de cette fonction à $A \cap (\Delta_z \times \delta_w)$ est égale à $hJ|_A$. Si la fonction h est bornée sur

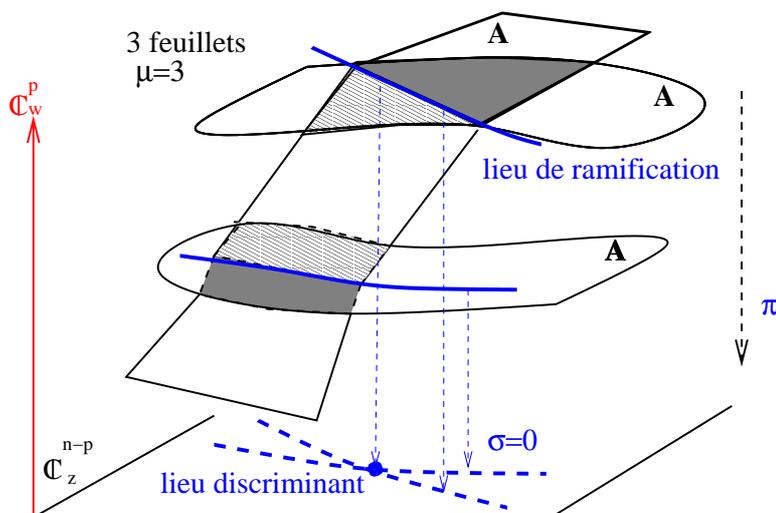


FIG. 3. La présentation locale « à la Noether » d'un sous-ensemble analytique

A_{reg} , le théorème de Riemann assure que la fonction \tilde{H} se prolonge en une fonction holomorphe dans $\Delta_z \times \delta_w$ et l'on voit alors que

$$\forall (z, w) \in A \cap (\Delta_z \cap \delta_w), h(z, w) = \frac{\tilde{H}(z, w)}{J(z, w)},$$

ce qui prouve que h se représente comme la restriction à $A \cap (\Delta_z \times \delta_w)$ d'une fonction méromorphe dans $\Delta_z \cap \delta_w$, avec comme dénominateur J (qui est indépendant de h).

La figure 3 résume la présentation locale sous forme d'un revêtement à μ feuillets du sous-ensemble analytique A .

Nous avons ici prouvé, tenant compte de notre description géométrique, l'existence du *dénominateur universel* d'Oka. Il s'agit là d'un résultat très important (voir, avec une approche voisine, le théorème 7.2 de [De0], chapitre 2).

THEOREME 1.44. Existence d'un dénominateur universel local (Oka).

Soit X une variété analytique complexe, A un sous-ensemble analytique fermé, h une fonction holomorphe sur la sous-variété A_{reg} . Si h se prolonge à A en une fonction localement bornée, h s'exprime localement comme la restriction à A d'une fonction méromorphe (au voisinage de A dans la variété ambiante) et le dénominateur de ce prolongement méromorphe peut être choisi universel (i.e. indépendant de h).

Si A est un sous-ensemble analytique (fermé) d'une variété analytique complexe X , on peut lui associer un faisceau cohérent d'idéaux \mathcal{I}_A . Le support des sections du faisceau quotient $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_A$ est supporté par A . Si C est un p -cycle analytique effectif de X

$$C := \sum_{\gamma} m_{\gamma} C_{\gamma},$$

où la somme est localement finie, les m_{γ} positifs ou nuls, et les C_{γ} des sous-ensembles irréductibles de dimension p , on peut associer à C (voir la proposition 1.5) le faisceau

d'idéaux cohérents défini par

$$\mathcal{I}(C) := \prod_{\gamma} (\mathcal{I}_{C_{\gamma}})^{m_{\gamma}}.$$

Cependant nous verrons (lorsque nous serons confrontés à des problèmes d'intersection que nous chercherons à traduire en termes de multiplication de courants positifs au chapitre 2) que ce faisceau d'idéaux est en un certain sens « trop gros » pour pouvoir rendre compte d'une quelconque (mais néanmoins bien souvent intéressante!) information en relation avec la donnée d'équations définissantes pour chaque C_{γ} . C'est la raison pour laquelle nous allons introduire, pour chaque sous-ensemble irréductible C_{γ} , le *faisceau d'idéaux de Chow* $\mathcal{I}_{C_{\gamma}}^{\text{chow}}$, sous-faisceau de $\mathcal{I}_{C_{\gamma}}$ (on aura, pour chaque point z de X , $\mathcal{I}_{C_{\gamma},z}^{\text{chow}} \subset \mathcal{I}_{C_{\gamma},z}$), puis le *faisceau d'idéaux de Chow* du cycle C , défini naturellement par

$$\mathcal{I}^{\text{chow}}(C) := \prod_{\gamma} (\mathcal{I}_{C_{\gamma}}^{\text{chow}})^{m_{\gamma}}.$$

On trouvera par exemple une introduction à cet important concept dans [Kol1], section 4 (dans le contexte algébrique). Cette notion rend compte d'une notion intermédiaire en quelque sorte entre le point de vue géométrique (trop réducteur, car seuls sont visibles géométriquement les êtres isolés et non ceux qui se trouvent « immergés ») et le point de vue algébrique trop précis (il n'y a pas unicité de la décomposition primaire d'un idéal de $\mathcal{O}_{X,z}$ pour $z \in A$), celle de *contour apparent*. Nous aurons tout d'abord besoin de définir, en un point z d'un sous-ensemble analytique irréductible A d'une variété analytique complexe X , la notion de *projection admissible* relative au germe de sous-ensemble analytique A_z .

DÉFINITION 1.45. Soit A un sous-ensemble analytique irréductible de X de dimension p , z un point de A . Une projection $\pi_z : U_z \mapsto \mathbb{C}^{p+1}$ d'un voisinage U_z de z et à valeurs dans \mathbb{C}^{p+1} , telle que $\pi_z(z) = 0$, est dite *admissible* relativement au point z et à l'ensemble analytique A si la restriction de π_z à $U \cap A$ est une application propre de $U_z \cap A$ dans \mathbb{C}^{p+1} .

Il résulte du *théorème de Remmert-Stein* (voir par exemple [De0], chapitre 8, section 8.2) que nous admettons ici, que l'image par une telle projection admissible π_z de l'ensemble analytique $U \cap A$ est un sous-ensemble analytique fermé de l'ouvert $\pi_z(U)$ de \mathbb{C}^{p+1} . En nous restreignant au voisinage de points de A_{reg} , nous constatons même que $\pi_z(U \cap A)$ est en fait une hypersurface de $\pi_z(U)$ (puisque $\dim A = p$). Cette hypersurface est localement définie par une équation réduite $\{\sigma_{\pi_z} = 0\}$. Notons d'ailleurs qu'une projection π est génériquement admissible. Cette clause de généralité est liée *a priori* à la présentation géométrique (lemme de Noëther) du germe d'ensemble analytique irréductible A_z .

DÉFINITION 1.46. Soit A un sous-ensemble analytique irréductible de dimension p d'une variété analytique complexe. On définit un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I}_A^{\text{chow}}$ en posant $\mathcal{I}_{A,z}^{\text{chow}} = \mathcal{O}_{X,z}$ si $z \notin A$ et en définissant $\mathcal{I}_{A,z}^{\text{chow}}$ lorsque z est un point de A comme l'idéal de $\mathcal{O}_{X,z}$ engendré par tous les germes en z des fonctions $\zeta \mapsto \sigma_{\pi_z}(\pi_z(\zeta))$ lorsque π_z balaye la famille des projections $\pi : U \rightarrow \mathbb{C}^{p+1}$, avec U suffisamment petit, admissibles relativement à z et au sous-ensemble analytique A .

1.4.5. Espaces analytiques complexes, normalisation. Soient $A \subset U \subset \mathbb{C}^n$ et $B \subset V \subset \mathbb{C}^m$ deux sous-ensembles analytiques fermés d'ouverts respectivement de \mathbb{C}^n et \mathbb{C}^m . Une application continue $f : A \rightarrow B$ est dite *morphisme d'ensembles analytiques* de A dans B si et seulement si, pour chaque $z \in A$, il existe un voisinage U_z de z dans U , une fonction holomorphe F_z holomorphe de U_z dans \mathbb{C}^m , telle que $(F_z)|_{A \cap U} = f|_{A \cap U}$. Si tel est le cas, on peut donc définir, pour chaque $z \in A$, une application

$$f_z^* : \mathcal{O}_{B,f(z)} := \frac{\mathcal{O}_{V,f(z)}}{\mathcal{I}_{B,f(z)}} \longrightarrow \mathcal{O}_{A,z} := \frac{\mathcal{O}_{U,z}}{\mathcal{I}_{A,z}}$$

par $f_z^*(\dot{g}_{f(z)}) = (g \circ \dot{F}_z)_z$. L'application f_z^* est dite *comorphisme* de f au point z .

Le concept d'espace analytique complexe (ou encore *espace analytique complexe réduit*) est calqué sur celui de variété différentielle, mais au lieu de « recoller » les cartes locales (U_α, τ_α) définissant l'atlas, donc les ouverts V_α équipés chacun de leur faisceau \mathcal{O}_{V_α} , on recolle des copies d'ensembles analytiques $A_\alpha \subset V_\alpha \subset \mathbb{C}^{n_\alpha}$, chacun d'eux étant équipé du faisceau cohérent $\mathcal{O}_{V_\alpha}/\mathcal{I}_{A_\alpha} := \mathcal{O}_{A_\alpha}$. Plus précisément, voici la définition :

DÉFINITION 1.47. Un *espace analytique complexe réduit* est la donnée :

- d'un espace topologique séparé X localement compact, dénombrable à l'infini (i.e. union dénombrable croissante de compacts) ;
- d'un faisceau \mathcal{O}_X de fonctions continues ;

ce de façon à ce que l'on puisse cartographier X grâce à un atlas (U_α, τ_α) , où, pour chaque α , τ_α est un homéomorphisme surjectif entre U_α et un sous-ensemble analytique fermé $A_\alpha \subset V_\alpha \subset \mathbb{C}^{n_\alpha}$, tel que le comorphisme

$$\tau_\alpha^* : \mathcal{O}_{A_\alpha} \longrightarrow \mathcal{O}|_{U_\alpha},$$

qui à $\dot{g}_{\tau_\alpha(z)}$ (pour $z \in U_\alpha$) associe $(g \circ \tau_\alpha)_z$ ($z \in U_\alpha$), réalise un isomorphisme entre faisceaux d'anneaux. Le faisceau \mathcal{O}_X est dit *faisceau structural* de l'espace analytique réduit (X, \mathcal{O}_X) .

Si X est un *espace analytique complexe réduit*, le sous-ensemble X_{reg} des points *réguliers* de X (i.e. des points au voisinage desquels X se décrit comme une variété analytique complexe, ce qui signifie que l'on puisse trouver une carte locale (U, τ) au voisinage du point telle que $\tau(U)$ soit un ouvert de \mathbb{C}^n pour un certain $n \in \mathbb{N}$, avec la convention $\mathbb{C}^0 := \{0\}$) est dense dans X (un point isolé de X étant automatiquement considéré comme régulier). On note $X_{\text{sing}} = X \setminus X_{\text{reg}}$. Les adhérences des composantes connexes de X_{reg} sont dites *composantes irréductibles* de l'espace analytique. L'union de ces composantes est égale à X . En un point z de X , la *dimension* de X en z , notée $\dim_z X$ est égale à $\dim_{\tau_\alpha(z)}(A_\alpha)$ si (U_α, τ_α) est une carte locale autour de z (ceci ne dépend pas du choix de la carte). La fonction $z \mapsto \dim_z X$ reste constante sur les composantes irréductibles de X (on peut donc se contenter de ne la calculer qu'aux points réguliers de chaque composante). On dit que X est de *dimension pure égale à p* si toutes ses composantes irréductibles sont de dimension p .

EXEMPLE 1.48. Tout sous-ensemble analytique fermé A d'une variété analytique complexe X hérite bien sûr d'une structure d'espace analytique complexe réduit ; le faisceau $\mathcal{O} = \mathcal{O}_A$ est dans ce cas le faisceau $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_A$. On peut aussi donner des exemples d'espaces analytiques complexes non définis comme « plongés »

dans une variété analytique complexe : les modèles de variétés toriques complètes simpliciales (mais non lisses), définis dans l'exemple 1.31 comme des *orbifold* (on peut d'ailleurs les représenter comme des quotients géométriques suivant (1.25)), sont des exemples de tels espaces analytiques complexes ; ce sont en fait des modèles de variétés algébriques singulières ; on ne peut pas nécessairement les plonger dans un espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ et ce ne sont donc pas toujours des variétés projectives (cela dépend en fait de l'éventail).

Sur un espace analytique complexe réduit, on peut définir le *faisceau* $\tilde{\mathcal{O}}_X$ des *fonctions holomorphes sur X_{reg} et localement bornées*. Si X est irréductible, les anneaux $\mathcal{O}_{X,z}$ sont intègres et l'on peut définir leurs corps des fractions $\mathcal{M}_{X,z}$ et donc le faisceau \mathcal{M}_X correspondant, dit *faisceau des fonctions méromorphes* (ou *régulières*) sur X ³³.

D'après le théorème 1.44, on a $\tilde{\mathcal{O}}_X \subset \mathcal{M}_X$ (avec d'ailleurs existence de dénominateurs universels locaux). Pour $z \in X$, $\tilde{\mathcal{O}}_{X,x}$ est en fait la *clôture intégrale* de $\mathcal{O}_{X,z}$ dans $\mathcal{M}_{X,z}$, i.e. pour chaque $z \in X$, $\tilde{\mathcal{O}}_{X,z}$ est l'ensemble des éléments φ_z de $\mathcal{M}_{X,z}$ satisfaisant une *relation de dépendance intégrale* « monique » (i.e. à coefficient dominant égal à 1) : $\varphi_z^M + o_1 \varphi_z^{M-1} + \dots + o_M$, $o_1, \dots, o_M \in \mathcal{O}_{X,z}$.

On connaît d'autre part le célèbre *théorème de Riemann* affirmant que, si X est une variété analytique complexe de dimension n , A un sous-ensemble analytique de X de codimension 1, et f une fonction holomorphe dans $X \setminus A$ telle que

$$(1.31) \quad \forall z \in X, \exists U_z \subset\subset X, \sup_{\zeta \in U_z \setminus A} |f(\zeta)| < +\infty,$$

alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur X tout entière ³⁴. Lorsque A est de codimension supérieure ou égale à 2, l'hypothèse (1.31) est d'ailleurs superflue, puisque l'on sait, d'après le *théorème de Hartogs* (voir le cours de P. Charpentier, théorème II.3.1, pour un cas particulier, et [De0], chapitre 2, proposition 6.1, pour

³³Si X n'est plus irréductible, \mathcal{M}_X est simplement un faisceau d'anneaux, l'anneau des fractions $\mathcal{M}_{X,z}$ de $\mathcal{O}_{X,z}$ étant réalisé en quotientant les éléments de $\mathcal{O}_{X,z}$ par les éléments non diviseurs de zéro dans cet anneau ; ce qui suit reste vrai.

³⁴À ce propos, il nous paraît important de mentionner ici qu'il est équivalent de dire que f admet un prolongement à $\mathcal{D}'(X)$ en tant que *distribution* sur X et que f est la restriction à $X \setminus A$ d'une fonction *méromorphe* sur X , de lieu polaire inclus dans A . Ce résultat important (trop peu connu, même en dimension 1, par exemple dans un ouvert de \mathbb{C}), qui met en lumière toute la force de la *théorie des distributions et des courants* que nous reprendrons au chapitre 2 au service de la géométrie complexe, résulte d'un célèbre théorème de Laurent Schwartz [Sch], que l'on peut même préciser comme suit (à la lumière des approches plus récentes [HL, CoH]) : si A est défini localement comme $\{h_A = 0\}$, un prolongement au sens des distributions de la fonction méromorphe f , à pôles le long de A , est donné par

$$\varphi \in \mathcal{D}'(X) \mapsto \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|h_A| \geq \epsilon} f(z) \varphi(z) dV_X(z),$$

où dV_X est la (n, n) -forme volume sur X . Réciproquement, si une fonction f , holomorphe dans $X \setminus A$, admet un prolongement T_f au sens des distributions dans X tout entière, alors, dans un ouvert relativement compact arbitraire U où A est défini comme le lieu des zéros de la fonction holomorphe $h_{A,U}$, $h_{A,U}^N T_f$ est telle que $\bar{\partial}(h_{A,U}^N T_f) \equiv 0$ pour N assez grand (dépendant de l'ouvert relativement compact sur lequel on se place), d'où il résulte (par hypoellipticité de l'opérateur $\bar{\partial}$, voir le cours de P. Charpentier [Charp]) que $h_{A,U}^N T_f$ représente en tant que distribution, dans cet ouvert U , une fonction holomorphe g_U , ce qui implique que $f = g_U / h_{A,U}^N$ est bien méromorphe dans U , à pôles le long de $A \cap U$.

l'énoncé général) qu'il est toujours possible de prolonger une fonction holomorphe sur une variété analytique complexe au travers d'un sous-ensemble analytique de codimension au moins égale à 2 .

Au contraire de ce qui se passe sur une variété analytique complexe X (équipée de son faisceau structurel \mathcal{O}_X), le théorème de Riemann s'avère en défaut sur un espace analytique complexe réduit (X, \mathcal{O}_X) : il est en effet possible qu'il existe des fonctions holomorphes sur X_{reg} (sous-ensemble dense de X) au voisinage d'un point singulier z de X , ce qui est aisé à définir puisque X_{reg} est une variété analytique complexe, bornées sur X_{reg} au voisinage de z , mais ne définissant pas un élément de $\mathcal{O}_{X,z}$ ³⁵. C'est pour pallier à ce défaut que l'on introduit, pour un espace analytique complexe réduit (X, \mathcal{O}_X) , les concept de *normalité en un point z donné* et de *normalité en tout point*. On souhaite en effet disposer sur un espace analytique complexe réduit (X, \mathcal{O}_X) du *théorème de Riemann*.

DÉFINITION 1.49. Un espace analytique complexe réduit est dit *normal en un point z* si et seulement si $\tilde{\mathcal{O}}_{X,z} = \mathcal{O}_{X,z}$. L'espace est dit *normal* si et seulement si cela est vrai en tout point z de X .

Lorsqu'un espace analytique complexe réduit n'est pas normal, on peut le *normaliser* au sens suivant :

THEORÈME 1.50. (dû encore à Oka). *Soit X un espace analytique complexe réduit. Il existe toujours une normalisation de X , c'est-à-dire une paire (\bar{X}, π) constituée d'un espace analytique normal \bar{X} et d'une projection propre $\pi : \bar{X} \rightarrow X$ à fibres $\pi^{-1}(\{z\})$ finies pour tout z , tels que $\bar{X} \setminus \pi^{-1}(X_{\text{sing}})$ soit dense dans \bar{X} et que π réalise un isomorphisme analytique entre $\bar{X} \setminus \pi^{-1}(X_{\text{sing}})$ et X_{reg} . De plus, s'il existe deux telles normalisations (\bar{X}_1, π_1) et (\bar{X}_2, π_2) , \bar{X}_1 et \bar{X}_2 sont isomorphes en temps qu'espaces analytiques complexes, ce qui assure l'unicité (à isomorphisme près) de la normalisation de X .*

DÉMONSTRATION. Nous esquissons juste ici une preuve, essentiellement pour indiquer une méthode effective de construction. Nous indiquons juste ici le principe de la réalisation de la normalisation dans le cas où X est un sous-ensemble analytique irréductible A d'un voisinage U de $0 \in A$ dans \mathbb{C}^n . On suppose le voisinage assez petit pour que l'on puisse disposer du dénominateur universel h d'Oka (théorème 1.44) et que les germes des fonctions f_1, \dots, f_m (comme fonctions méromorphes au voisinage de A) en un point quelconque $z \in A$ constituent des représentants d'un système de générateurs de $\tilde{\mathcal{O}}_{A,z}$ ($\tilde{\mathcal{O}}_{A,z} = \mathcal{O}_{A,z}[\dot{f}_1, \dots, \dot{f}_m]$). Notons que l'on peut supposer A_{reg} connexe, écrire $f_j = g_j/h$ sur A_{reg} , g_1, \dots, g_m étant des fonctions holomorphes dans X , et toujours supposer que chaque f_j , $j = 1, \dots, m$, satisfait une équation de dépendance intégrale « monique »

$$(1.32) \quad f_j^{M_j} + A_{j,1}(z)f_j^{M_j-1} + \dots + A_{j,M_j}(z) \equiv 0$$

dans A , $A_{j,1}, \dots, A_{j,M_j}$ étant des fonctions holomorphes sur A , i.e. des sections globales du faisceau structurel \mathcal{O}_A (quitte à restreindre A à un voisinage de l'origine).

³⁵Par exemple $\varphi : t \in D(0, \epsilon) \mapsto (t^3, t^2)$ est une paramétrisation holomorphe injective au voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^2 du sous-ensemble analytique A défini par l'équation $z_1^2 - z_2^3 = 0$ (car 2 et 3 sont premiers entre eux). La fonction $z \mapsto \varphi^{-1}(z)$ est holomorphe sur A_{reg} , bornée sur A , mais il ne saurait exister de fonction H holomorphe au voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^2 telle que $H(t^3, t^2) = t$, ce qui prouve que φ^{-1} ne peut donc pas définir au niveau des germes en $(0, 0)$ un élément de $\mathcal{O}_{A,(0,0)}$.

La normalisation \bar{A} de A au voisinage de 0 s'obtient en prenant l'adhérence \bar{A} dans $A \times \mathbb{C}^m$ du graphe de

$$z \mapsto (f_1(z), \dots, f_m(z))$$

au dessus de A_{reg} , la projection π étant alors la projection de ce sous-ensemble analytique de $A \times \mathbb{C}^m$ sur l'espace des n premières coordonnées. On a

$$\bar{A} := \{(z, w) \in X \times \mathbb{C}^m ; h(z)w_j = g_j(z), j = 1, \dots, m\}.$$

La projection π est propre de \bar{A} dans A du fait que les f_j satisfassent les équations de dépendance intégrale (1.32). Si q est une fonction holomorphe bornée sur \bar{A}_{reg} , $z \mapsto q(z, f(z))$ est une fonction holomorphe bornée sur A_{reg} , donc définit au voisinage de 0 une section de $\tilde{\mathcal{O}}_X$, section qui s'écrit

$$q(z, f(z)) = Q(z, f_1(z), \dots, f_m(z)),$$

où $Q(\cdot, \Xi_1, \dots, \Xi_m)$ est un polynôme, ce qui implique que q se prolonge bien en une fonction holomorphe sur \bar{A} . Ceci implique la normalité et donc le fait que $\bar{A} \xrightarrow{\pi} A$ soit une normalisation au dessus d'un voisinage de l'origine. Il suffit ensuite de recoller les normalisations locales pour construire une normalisation globale. Pour plus de détails, voir [De0], chapitre 2, section 7.3. \square

1.4.6. Éclatements, résolution des singularités. Le concept géométrique d'*éclatement* jouera pour nous un rôle important. Étant donné un faisceau cohérent d'idéaux \mathcal{I} sur une variété analytique complexe, nous serons en effet amenés à exploiter l'*éclatement normalisé* de \mathcal{X} suivant le faisceau d'idéaux \mathcal{I} (ou encore de *centre* le faisceau d'idéaux \mathcal{I}). Il nous faut donc ici définir ce que l'on entend par là, d'autant plus qu'il s'agit (à « isomorphisme près ») d'une construction géométrique intrinsèquement liée au faisceau d'idéaux \mathcal{I} . Il s'agit de la concaténation de deux opérations :

- l'*éclatement* de X suivant \mathcal{I} (ou de *centre* \mathcal{I}), consistant en la réalisation d'un espace analytique complexe irréductible $X_{\mathcal{I}}$ (de même dimension que X), couplé avec la donnée d'une projection holomorphe surjective $\pi : X_{\mathcal{I}} \rightarrow X$, telle que le faisceau image inverse $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X_{\mathcal{I}}}$ de \mathcal{I} par π soit inversible (le support de $\mathcal{O}_{X_{\mathcal{I}}}/\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X_{\mathcal{I}}}$ est une hypersurface $H_{\mathcal{I}}$ de $X_{\mathcal{I}}$) et que π réalise un biholomorphisme entre $X \setminus \text{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ et $X_{\mathcal{I}} \setminus H_{\mathcal{I}}$;
- la *normalisation* $\bar{X}_{\mathcal{I}} \xrightarrow{\pi_N} X_{\mathcal{I}}$ de l'espace analytique complexe $X_{\mathcal{I}}$, telle qu'elle est décrite au théorème 1.50.

L'*éclatement normalisé* de \mathcal{X} suivant \mathcal{I} est dans ce cas $\bar{X}_{\mathcal{I}} \xrightarrow{\pi \circ \pi_N} X$ et le faisceau image inverse $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathcal{I}}}$ via $\pi \circ \pi_N$ est encore inversible (le support du faisceau quotient est une hypersurface H de $\bar{X}_{\mathcal{I}}$). On note $\pi_{\mathcal{I}, N} = \pi \circ \pi_N$ et H_{γ} les composantes irréductibles de l'hypersurface H ainsi construite.

Comme $\bar{X}_{\mathcal{I}}$ est normal, et donc que les anneaux $\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathcal{I}}, z}$ sont réguliers en codimension 1³⁶, on peut associer un diviseur de Weil

$$(1.33) \quad D_{\mathcal{I}} := \sum_{\gamma} m_{\gamma} H_{\gamma}$$

³⁶Ceci permet aussi d'assurer qu'ici les notions de diviseur de Weil et de diviseur de Cartier coïncident et qu'à tout H_{γ} , on sait associer un certain diviseur de Cartier $D_{\gamma} = (U_{\alpha}, s_{\alpha})$. Il reste à déterminer, en un point régulier ζ_{γ} de H_{γ} , quelle puissance minimale m_{γ} des $s_{\alpha, x_{\gamma}}$ divise tous les $(f \circ \pi_{\mathcal{I}, N})_{\zeta_{\gamma}}, f \in \mathcal{I}$.

au faisceau cohérent d'idéaux $\pi_{\mathcal{I},N}^*[\mathcal{I}]$; pour cela, on pose par définition (voir aussi en bas de page la note *supra*) :

$$(1.34) \quad m_\gamma = \text{longueur} \left(\frac{\mathcal{O}_{\overline{X_{\mathcal{I}},\zeta_\gamma}}}{\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X_{\mathcal{I}},\zeta_\gamma}}} \right)$$

si $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X_{\mathcal{I}},\zeta_\gamma}}$ désigne le faisceau image inverse de \mathcal{I} via l'application $\pi_{\mathcal{I},N}$ et ζ_γ le point générique de H_γ . Ce diviseur est appelé *diviseur exceptionnel de l'éclatement normalisé* $\overline{X_{\mathcal{I}}} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{I},N}} X$. Voir aussi bien sûr [Hir] et également [Te1, Te2] pour un approfondissement de ces notions.

Le caractère intrinsèque de l'éclatement normalisé lui est conféré par la *propriété d'universalité* suivante (cette propriété essentielle en assure l'unicité à isomorphisme entre espaces analytiques près).

PROPOSITION 1.7. (universalité de l'éclatement normalisé) *Soit X une variété analytique complexe, \mathcal{I} un faisceau cohérent d'idéaux de \mathcal{O}_X . L'éclatement normalisé $\overline{X_{\mathcal{I}}} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{I},N}} X$ de \mathcal{X} suivant \mathcal{I} a la propriété d'universalité suivante : si $\overline{X} \xrightarrow{\tau} X$ est un morphisme d'espaces analytiques tel que \overline{X} soit normal et le faisceau image inverse $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X}}$ inversible, alors τ se factorise de manière unique en $\tau = \pi_{\mathcal{I},N} \circ \tau_{\mathcal{I}}$, où $\tau_{\mathcal{I}}$ est un morphisme d'espaces analytiques de \overline{X} dans l'éclatement normalisé $\overline{X_{\mathcal{I}}}$.*

Nous mentionnerons ici sous deux angles différents (géométrique, puis algébrique) comment réaliser effectivement l'éclatement d'une variété analytique complexe X suivant un faisceau cohérent d'idéaux \mathcal{I} .

a) *Le cas où $\mathcal{I} = \mathcal{I}_Y$, où Y est une sous-variété.*

La construction est par exemple présentée au chapitre 7, paragraphe 12, de [De0]. L'éclatement de X suivant Y (ou « le long de Y ») est défini géométriquement comme un fibré holomorphe de base Y et de rang $\text{codim } Y$. La fibre au dessus de $y \in Y$ est le *projectivisé* $\mathbb{P}(N_y)$ de l'espace N_y de toutes les directions orthogonales à Y au point y (i.e. le \mathbb{C} -espace vectoriel obtenu en quotientant $N_y \setminus \{0\}$ par la relation de colinéarité). Le fibré ainsi construit au dessus de Y est le fibré quotient $T(X)|_Y/T(Y)$, où $T(X)$ est le fibré tangent complexe à X et $T(Y)$ le fibré tangent complexe à Y , considéré comme sous-fibré de la restriction $T(X)|_Y$ du fibré $T(X)$ au dessus de la sous-variété Y . Si la sous-variété Y (de dimension p) est définie dans un ouvert U comme

$$Y := \{z \in X ; f_1(z) = \cdots = f_{n-p}(z) = 0\},$$

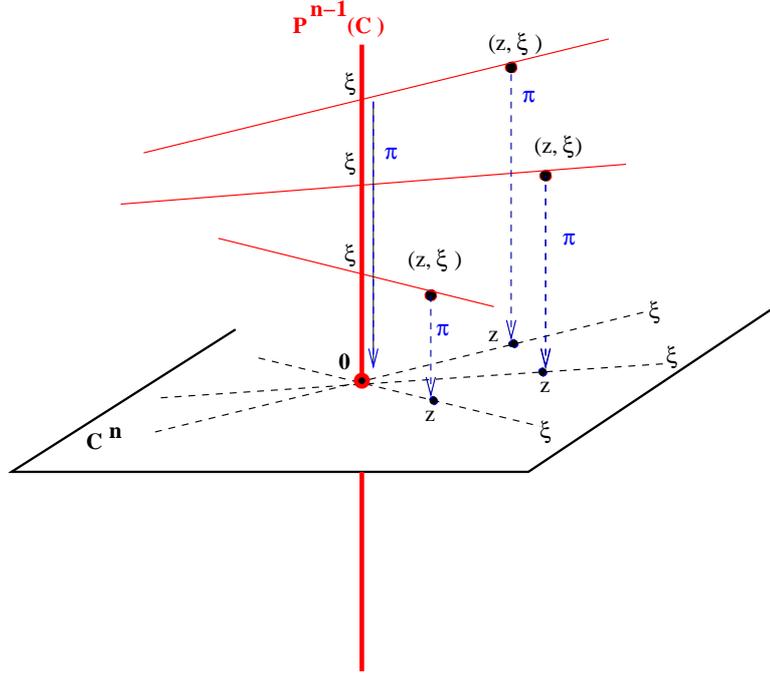
où f_1, \dots, f_{n-p} sont des fonctions holomorphes dans U telles que $df_1 \wedge \cdots \wedge df_{n-p} \neq 0$ sur $Y \cap U$, l'éclatement de U suivant $\mathcal{I}_{Y \cap U}$ peut être décrit à isomorphisme de variétés analytiques près comme l'adhérence dans $U \times \mathbb{P}^{n-p-1}(\mathbb{C})$ du graphe de l'application

$$z \in U \setminus Y \mapsto [f_1(z) : \cdots : f_{n-p}(z)].$$

Ce graphe est défini comme l'ensemble des points $(z, [w_1 : \cdots : w_{n-p}])$ de la variété $U \times \mathbb{P}^{n-p-1}(\mathbb{C})$ tels que

$$w_1 f_2(z) - w_2 f_1(z) = w_2 f_3(z) - w_3 f_2(z) = \cdots = w_{n-p-1} f_{n-p}(z) - w_{n-p} f_{n-p-1}(z) = 0.$$

Il s'agit d'un sous-ensemble analytique (en fait une sous-variété) de $U \times \mathbb{P}^{n-p-1}(\mathbb{C})$ définie comme une intersection complète globale de dimension n (par $n - p - 1$

FIG. 4. L'éclatement de \mathbb{C}^n le long de $Y = \{0\}$

équations dans une variété analytique complexe de dimension $n + (n - p - 1)$). La projection $\pi : U_{\mathcal{I}_U} \rightarrow U$ est alors donnée par la projection

$$(z, [w_1 : \cdots : w_{n-p}]) \mapsto z \in U.$$

L'image réciproque $\pi^{-1}(Y)$ est l'hypersurface lisse $H_{Y,U} := (Y \cap U) \times \mathbb{P}^{n-p-1}(\mathbb{C})$ et π réalise bien un biholomorphisme entre $X_{\mathcal{I}_U} \setminus H_{Y,U}$ et $U \setminus Y$. La construction de l'éclatement de \mathbb{C}^n suivant l'origine est figurée schématiquement sur la figure 4 ci-dessus. Celui, plus généralement, de X suivant une sous-variété Y , est illustré sur la figure 5.

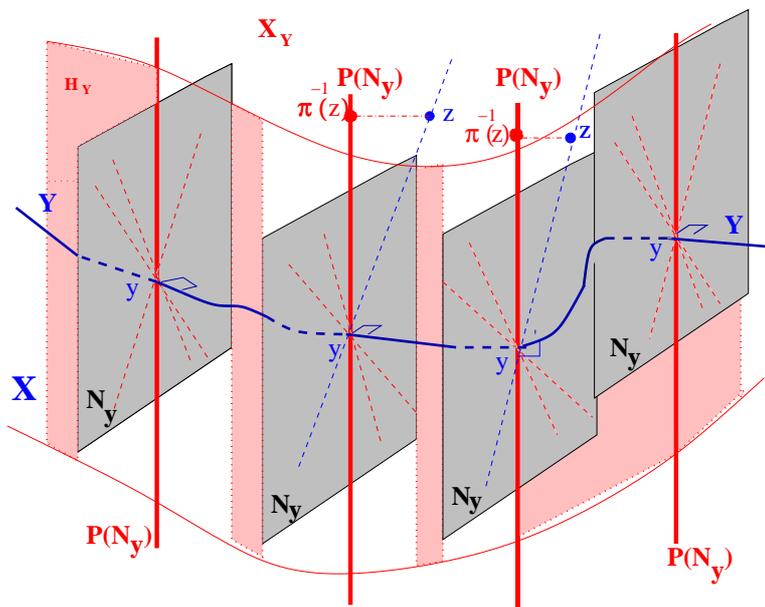
b) L'éclatement de X suivant un faisceau cohérent d'idéaux quelconque.

Pour donner une vision concrète de l'espace analytique $X_{\mathcal{I}} \xrightarrow{\pi} X$ complexe construit par ce procédé d'éclatement (en même temps que la projection π), nous présentons la description géométrique proposée par exemple dans [Smi1], section 7.4. Si U est un ouvert de X tel que (f_1, \dots, f_m) soient m éléments de $\mathcal{O}(U)$ de manière à ce que $\mathcal{I}_z = ((f_1)_z, \dots, (f_m)_z)$ pour tout $z \in U$, l'éclatement $U_{\mathcal{I}_U}$ de U suivant \mathcal{I}_U peut être décrit (à isomorphisme entre espaces analytiques près) comme l'adhérence dans $U \times \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ du graphe de l'application

$$z \in U \setminus \text{Supp}(\mathcal{O}_U/\mathcal{I}_U) \mapsto [f_1(z) : \cdots : f_m(z)].$$

La projection $\pi : U_{\mathcal{I}_U} \rightarrow U$ est alors donnée par la projection

$$(z, [w_1 : \cdots : w_m]) \mapsto z \in U.$$

FIG. 5. L'éclatement de X le long d'une sous-variété Y

Il n'est pas évident (et nous l'admettons) que cette construction d'espace analytique complexe au dessus de U ne dépende (à isomorphisme entre espaces analytiques près) que du faisceau cohérent \mathcal{I}_U et non du système de générateurs (f_1, \dots, f_m) choisi dans $\mathcal{O}(U)$! L'image réciproque par π du support du faisceau quotient $\mathcal{O}_U/\mathcal{I}_U$ (i.e. le lieu des zéros communs des f_j , $j = 1, \dots, m$, dans U) est une hypersurface de $U \times \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$. Il s'agit en effet d'un sous-ensemble analytique de $U \times \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$. Ce sous-ensemble analytique ne saurait en effet présenter de composante irréductible de codimension supérieure ou égale à deux en vertu du théorème de Hartogs (voir par exemple la proposition 6.1 dans [De0]) : si tel était le cas, la fonction $z \mapsto [f_1(\pi(z)) : \dots : f_m(\pi(z))]$ resterait bornée au voisinage d'un point z_0 générique d'une telle composante, ce qui contredirait le fait qu'au point $\pi(z_0)$, on ait $f_1(\pi(z_0)) = \dots = f_m(\pi(z_0)) = 0$! L'ensemble analytique $\pi^{-1}(\text{Supp}(\mathcal{O}_U/\mathcal{I}_U))$ est donc bien une hypersurface $H_{\mathcal{I}_U}$ et π réalise un biholomorphisme entre $U_{\mathcal{I}_U} \setminus H_{\mathcal{I}_U}$ et $U \setminus \{f_1 = \dots = f_m = 0\} = U \setminus \text{Supp}(\mathcal{O}_U/\mathcal{I}_U)$. Cette description géométrique de l'éclatement $U_{\mathcal{I}_U}$ de U suivant le faisceau d'idéaux cohérent \mathcal{I}_U suffira ultérieurement à nos besoins (bien que non *schématique*, donc ne rendant qu'imparfaitement compte des propriétés de nature algébrique).

La notion de *clôture intégrale* d'un idéal dans un anneau commutatif (ou ici d'un faisceau cohérent d'idéaux \mathcal{I} dans \mathcal{O}_X) est très liée à celle d'*éclatement normalisé*. Comme elle est aussi étroitement liée à un ingrédient important de la géométrie complexe, le théorème de Briançon-Skoda ([BriS]), nous devons la rappeler ici.

Commençons par une définition très algébrique :

DÉFINITION 1.51. Soit \mathbb{A} un anneau commutatif et \mathbb{I} un idéal de \mathbb{A} ; on appelle *clôture intégrale* de \mathbb{I} dans \mathbb{A} l'idéal $\bar{\mathbb{I}}$ de \mathbb{A} constitué des éléments a de \mathbb{A} satisfaisant

une équation de dépendance intégrale « homogène » :

$$a^N + u_1 a^{N-1} + \cdots + u_N = 0,$$

avec $u_k \in \mathbb{I}^k$, $k = 1, 2, \dots, N$, ce qui est aussi équivalent à dire que aT , considéré comme élément de l'algèbre graduée $\mathbb{A}[T]$, est entier sur l'algèbre de Rees

$$\tilde{\mathbb{I}} := \mathbb{A} \oplus \mathbb{I}T \oplus \mathbb{I}^2 T^2 \oplus \cdots = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{I}^k T^k \subset \mathbb{A}[T],$$

i.e. satisfait une relation de dépendance intégrale « monique » :

$$(aT)^M + \sum_{j=1}^M (aT)^{M-j} \tilde{u}_j(T), \quad u_1(T), \dots, u_M(T) \in \tilde{\mathbb{I}}.$$

Si X est une variété analytique complexe, \mathcal{I} un faisceau cohérent d'idéaux, nous pouvons considérer le faisceau cohérent $\overline{\mathcal{I}}$, où, pour chaque $z \in X$, $\overline{\mathcal{I}}_z$ désigne la clôture intégrale de \mathcal{I}_z dans $\mathcal{O}_{X,z}$. La cohérence du faisceau d'idéaux $\overline{\mathcal{I}}$ ainsi défini résulte par exemple du théorème de Grauert sur le transport de la cohérence par image directe [Grau], tel qu'il a été présenté dans la section 1.4.3, couplé avec l'énoncé de la proposition 1.8 suivante.

PROPOSITION 1.8. *Soit U un ouvert de X et f une section globale du faisceau d'idéaux $\overline{\mathcal{I}}$ dans U . Si $\pi : \overline{X_{\mathcal{I}}} \rightarrow X$ désigne l'éclatement normalisé et $D_{\mathcal{I}}$ le diviseur exceptionnel de cet éclatement (voir (1.33), le diviseur de Cartier $\text{div}(f \circ \pi)$ est tel que*

$$\text{div}(f \circ \pi) \geq D_{\mathcal{I}},$$

ce qui signifie que, pour chaque composante H_{γ} de $\pi^{-1}(\text{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))$ intersectant $\pi^{-1}(U)$, on ait

$$(1.35) \quad \text{longueur} \left(\frac{(\mathcal{O}_{\overline{X_{\mathcal{I}}}, x_{\gamma}})_{|\pi^{-1}(U)}}}{f \cdot (\mathcal{O}_{\overline{X_{\mathcal{I}}}, x_{\gamma}})_{|\pi^{-1}(U)}} \right) \geq m_{\gamma}$$

au point générique x_{γ} de H_{γ} , où les m_{γ} ont été définis en (1.34). Ceci équivaut à l'inclusion

$$(1.36) \quad f(\mathcal{O}_{\overline{X_{\mathcal{I}}}})_{|\pi^{-1}(U)} \subset \mathcal{I} \cdot (\mathcal{O}_{\overline{X_{\mathcal{I}}}})_{|\pi^{-1}(U)}.$$

Réciproquement, si les conditions (1.35) ou (1.36) sont remplies, f est une section globale du faisceau d'idéaux $\overline{\mathcal{I}}$ dans U .

DÉMONSTRATION. La première affirmation résulte de la remarque importante suivante : si f_z est dans $\overline{\mathcal{I}}_z$, il résulte de l'existence d'une relation de dépendance intégrale

$$f^N + u_1 f^{N-1} + \cdots + u_N \equiv 0$$

dans un voisinage de z , avec $u_k \in (\mathcal{I}_z)^k$ pour $k = 1, \dots, N$, que

$$|f| \leq C \sup(|f_1|, \dots, |f_m|)$$

au voisinage de z si $(f_1)_z, \dots, (f_m)_z$ sont des générateurs de \mathcal{I}_z . En remontant sur l'éclatement normalisé $\overline{X_{\mathcal{I}}}$ par composition à droite avec π , on constate que la fonction $f \circ \pi$ s'annule le long de chaque composante H_{γ} de $\pi^{-1}(\text{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))$ intersectant $\pi^{-1}(U)$ à un ordre au moins égal au minimum de ceux auxquels s'annulent sur H_{γ} les éléments de $\mathcal{I}(\mathcal{O}_{\overline{X_{\mathcal{I}}}})_{|U}$. La seconde affirmation (réciproque) est plus délicate et fera appel au théorème de Briançon-Skoda que nous mentionnerons

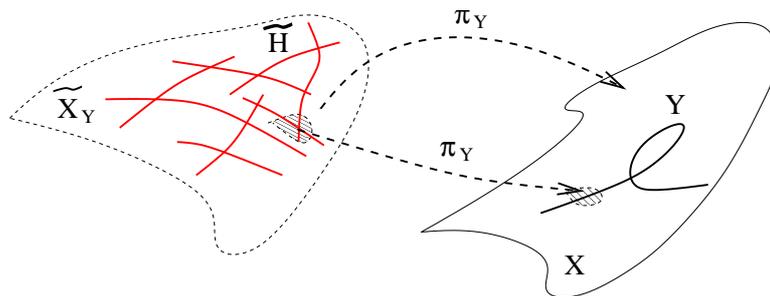


FIG. 6. Le théorème de résolution des singularités de H. Hironaka (1964) : d'un faisceau $\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$ à un faisceau inversible à croisements normaux $\mathcal{I}_Y \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$

au chapitres 2 (section 2.5.4). Sa preuve nécessitera en fait le recours aux méthodes L^2 (développées par H. Skoda dans [Skod]) et nous la donnerons en toute fin de chapitre 4 (corollaire 4.10). \square

REMARQUE 1.52. Nous n'entrerons pas dans ce cours dans la *théorie des schémas*. Il nous paraît néanmoins important de mentionner que l'éclatement de X suivant un faisceau cohérent d'idéaux \mathcal{I} se réalise du point de vue schématique comme

$$X_{\mathcal{I}} = \text{Proj} \left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{I}^k \right),$$

tandis que l'éclatement normalisé se réalise, lui, schématiquement par

$$\overline{X}_{\mathcal{I}} = \text{Proj} \left(\overline{\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{I}^k} \right) = \text{Proj} \left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} \overline{\mathcal{I}^k} \right).$$

Nous renvoyons à [LeT] pour plus de détails ici et à [Ha1] pour l'introduction au langage des *schémas*.

Le théorème de résolution des singularités, prouvé par H. Hironaka dans [Hir], nous sera très souvent utile, quand bien même ce ne serait que comme outil intermédiaire pour justifier l'existence d'objets (courants résiduels, holonomie au sens de J.E. Björk des courants d'intégration, etc.) qui pour nous seront précieux. En voici donc l'énoncé, illustré schématiquement sur la figure 6. Nous l'admettrons bien sûr.

THEOREME 1.53. (résolution des singularités) Soit X un espace analytique complexe irréductible de dimension n et Y un sous-espace analytique contenant X_{sing} . Il existe une variété analytique complexe \tilde{X}_Y de dimension n , une application holomorphe propre $\pi_Y : \tilde{X}_Y \rightarrow X$, telles que, si $\tilde{H} = \pi_Y^{-1}(Y)$:

- l'application π_Y réalise un biholomorphisme entre $\tilde{X}_Y \setminus \tilde{H}$ et $X \setminus Y$;
- le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_Y \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}_Y}$, image inverse par π_Y du faisceau d'idéaux \mathcal{I}_Y de \mathcal{O}_X , est un faisceau inversible tel que le support du faisceau quotient $\mathcal{O}_{\tilde{X}_Y} / \mathcal{I}_Y \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}_Y}$ soit une hypersurface localement à croisements normaux, i.e. dont l'équation en coordonnées locales $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ dans une carte au voisinage de tout point est donnée par un monôme en ζ_1, \dots, ζ_n .

REMARQUE 1.54. D'après la propriété universelle de l'éclatement normalisé (proposition 1.7), si \mathcal{I} est un faisceau cohérent d'idéaux sur une variété analytique complexe X et si Y désigne le support de $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$, une résolution $\tilde{\pi}_Y : \tilde{X}_Y \rightarrow X$ des singularités se factorise de manière unique en $\tilde{\pi}_Y = \pi_{\mathcal{I},N} \circ \theta_{\tilde{X}_Y}$, où $\theta_{\tilde{X}_Y}$ est un morphisme d'espaces analytiques de \tilde{X} dans l'éclatement normalisé $\overline{X_{\mathcal{I}}}$. Cette remarque sera pour nous essentielle lorsque nous voudrons (à partir d'une résolution des singularités) travailler sur des objets qui ne dépendent pas du choix de cette résolution.

Application : les diviseurs de Weil principaux sur un espace analytique complexe irréductible X . Un exemple typique d'application du théorème 1.53 est celui où $Y = X_{\text{sing}}$. Si l'on considère un élément f de $\mathcal{M}(X)$, on peut lui associer un diviseur de Weil (i.e. un $(n-1)$ -cycle de X) dès qu'aucune des composantes irréductibles du lieu des zéros-pôles $Y(f)$ de f n'est incluse dans X_{sing} (on prend les composantes irréductibles de l'hypersurface $Z(f)$ et, à chacune d'elles $Z_{\gamma}(f)$, on associe l'ordre de F_z le long de $(Z_{\gamma}(f))_z$ en un point z régulier). Si en revanche une composante $(Z(f))_{\gamma}$ est entièrement dans X_{sing} , on a recours à une résolution des singularités³⁷ $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ (ici $Y = X_{\text{sing}}$) et l'on calcule l'ordre de $f \circ \pi$ sur les composantes irréductibles $W_{\tilde{\gamma}}$ du support de $\mathcal{O}_{\tilde{X}}/\mathcal{I}_Y \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$. Les images par $\tilde{\pi}$ des $W_{\tilde{\gamma}}$ sont des sous-ensembles analytiques irréductibles de X (d'après le théorème de Remmert-Stein). Il y a certainement ici énormément de redondance, mais l'on retrouve parmi ces images $\pi(W_{\tilde{\gamma}})$ la liste des $Z_{\gamma}(f)$ qui se trouvaient être des composantes irréductibles de X_{sing} . C'est l'ordre de $f \circ \pi$ le long de l'une (arbitraires) des $W_{\tilde{\gamma}}$ se projetant par π en $Z_{\gamma_0}(f)$ qui nous donnera l'ordre m_{γ_0} de f le long de $Z_{\gamma_0}(f)$. On peut ainsi associer à f un diviseur de Weil, noté $\text{div}(f)$. Le sous-groupe de du groupe des $(n-1)$ -cycles qui est engendré par les diviseurs de Weil du type $\text{div}(f)$, $f \in \mathcal{M}_X$, dits *diviseurs de Weil principaux*, est appelé *sous-groupe des diviseurs de Weil principaux*.

DÉFINITION 1.55. Si X est un espace analytique complexe irréductible de dimension n , le *groupe de Chow* $A_{n-1}(X)$ est le quotient du groupe des diviseurs de Weil par le sous-groupe des diviseurs de Weil principaux. On définit par induction le *groupe de Chow* $A_p(X)$, $p = n-1, n-2, \dots, 1, 0$, comme le quotient du groupe des p -cycles de X par le sous-groupe engendré par les diviseurs principaux $\text{div}_Y(f)$, $f \in \mathcal{M}(Y)$, sur les sous-ensembles analytiques irréductibles Y de dimension $p+1$ de X .

Les groupes de Chow jouent un rôle majeur en théorie de l'intersection et nous les retrouverons plus loin dans le contexte des variétés algébriques telles $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ou, plus généralement, les variétés toriques complètes simpliciales (voir l'exemple 1.31).

Nous concluons ici ce chapitre de présentation des principaux outils de la géométrie complexe, qu'elle soit différentielle, hermitienne, ou analytique, telle que nous l'étudierons dans ce cours.

³⁷C'est ici une manière de faire, mais elle revient à utiliser un marteau-pilon ! De fait, on pouvait se contenter de prendre la normalisation $\overline{X} \xrightarrow{\pi} X$ et d'utiliser le fait qu'un espace analytique réduit normal soit en tout point régulier en codimension 1, ce qui assure que l'on puisse définir l'ordre de $f \circ \pi$ au point générique de toute hypersurface de la forme $\pi^{-1}(H)$, où H est une hypersurface analytique irréductible de X . C'est cet ordre que l'on prend pour $\text{ordre}_H(f)$. Pour plus de détails, voir [Ha1], Appendix A.

Le concept de positivité en géométrie complexe et ses avatars

2.1. Formes différentielles, courants, courants positifs

2.1.1. Formes positives ou fortement positives sur un \mathbb{C} -espace vectoriel. Tout \mathbb{C} -espace vectoriel V admet une orientation canonique, la règle étant que la forme

$$\frac{1}{(2i)^n} \bigwedge_{j=1}^n d\bar{z}_j \wedge dz_j = \bigwedge_{k=1}^n (dx_k \wedge dy_k)$$

soit une *forme volume* ; cette orientation est préservée par changement holomorphe de coordonnées. Le fait que l'on puisse ainsi définir une *orientation canonique* sur un \mathbb{C} -espace vectoriel V (donc en particulier sur l'espace tangent complexe $T_z(X)$ au point courant z d'une variété analytique complexe de dimension n) implique l'*orientabilité* d'une variété analytique complexe arbitraire X de dimension finie, ce qui équivaut à disposer sur une telle variété d'une (n, n) *forme volume* positive et ne s'annulant pas¹. Savoir profiter de cette notion de *positivité* (que matérialise le jeu des deux systèmes (z_1, \dots, z_n) et $(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ de coordonnées *holomorphes* et *anti-holomorphes*) sera pour nous précieux ; la géométrie différentielle réelle n'a pas à son service un tel outil !

DÉFINITION 2.1. Si V est un \mathbb{C} -espace vectoriel complexe équipé de son orientation canonique, une (p, p) -forme $\varphi \in \bigwedge^{p,p} V^* := \bigwedge^p V^* \otimes \overline{\bigwedge^p V^*}$ est dite *positive*² si et seulement si $\varphi \wedge \bigwedge_{j=1}^{n-p} (i\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_j)$ est une (n, n) -forme positive quelque soient les éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-p}$ du dual V^* . La forme ω est dite *fortement positive* si elle se présente comme combinaison linéaire à coefficients positifs de formes du type $\bigwedge_{j=1}^p (i\beta_j \wedge \bar{\beta}_j)$, où $\beta_1, \dots, \beta_p \in V^*$.

REMARQUE 2.2. Toute forme *fortement positive*, donc aussi par dualité toute forme *positive*, est réelle, i.e. satisfait $\varphi = \bar{\varphi}$. Une $(1, 1)$ -forme $i \sum_{j,k} h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$ sur un \mathbb{C} -espace vectoriel V est positive si et seulement si

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{jk} dz_j \otimes \overline{dz_k} : \xi \mapsto \sum_{j,k} h_{jk} \xi_j \bar{\xi}_k$$

¹Une variété différentiable réelle de dimension N est dite *orientable* si et seulement si le fibré déterminant $\bigwedge^N T^*(\mathcal{X})$ est trivialisable, i.e. s'il existe une section globale de ce fibré en droites ne s'annulant pas, soit une *forme volume*. L'existence d'une telle *forme volume* permet, sur cette variété, de disposer d'une *théorie de l'intégration*.

²Ici, il faut comprendre « positif » par « positif ou nul » ; à ne pas confondre donc avec les concepts de positivité, au sens de Griffiths ou de Nakano, qui seront introduits au chapitre 3 (définition 3.27).

est une métrique hermitienne semi-positive sur V .

REMARQUE 2.3. Les notions de *positivité* et de *forte positivité* pour une (p, p) -forme diffèrent pour $2 \leq p \leq n-2$. Une (p, p) -forme positive $i^{p^2} \beta \wedge \bar{\beta}$ n'est fortement positive que si β se présente comme scindée comme produit extérieur de p éléments de V^* . Ceci n'est pas toujours le cas lorsque $2 \leq p \leq n-2$!

EXERCICE 2.4. Vérifier l'assertion de la remarque 2.3 et donner un exemple de (p, p) -forme positive non fortement positive sur un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n > 2$.

Le produit extérieur de formes toutes fortement positives est bien sûr une forme fortement positive. Si toutes sauf une sont fortement positives, le produit extérieur est une forme positive.

2.1.2. Courants sur une variété analytique complexe ; courants positifs. Dans cette section, on considère une variété analytique complexe X de dimension n , un fibré vectoriel complexe $E \rightarrow X$ (non nécessairement holomorphe) localement trivial et de rang m . Pour tout (p, q) , $0 \leq p, q \leq n$, on note $\mathcal{D}^{n-p, n-q}(X, E)$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des sections globales du fibré $(T_X^{n-p, n-q})^* \otimes E$ qui se trouvent être C^∞ et à support compact.

DÉFINITION 2.5. Le dual du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathcal{D}^{n-p, n-q}(X, E)$ est par définition le \mathbb{C} -espace des *courants de bidegré* (p, q) (on les appelle aussi (p, q) -courants) et de *dimension* $(n-p, n-q)$, à valeurs dans le fibré dual $E^* \rightarrow X$.

REMARQUE 2.6. On note en général ce dual indifféremment $\mathcal{D}'_{n-p, n-q}(X, E^*)$ ou $\mathcal{D}'^{p, q}(X, E^*)$. On privilégiera plutôt dans ce cours la seconde notation, le point de vue étant, dans le cas où $E \rightarrow X$ est le fibré trivial $X \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, de pouvoir concevoir les courants de bi-degré (p, q) comme les (p, q) -formes différentielles à coefficients distributions ; ceci s'avère souvent commode.

Si (e_1, \dots, e_m) est un repère pour le fibré $E \rightarrow X$ au dessus de l'ouvert de carte U et si $\varphi \in \mathcal{D}^{n-p, n-q}(U, E)$, on peut exprimer φ en coordonnées locales (z_1, \dots, z_n) dans $V = \tau(U) \subset \mathbb{C}^n$ sous la forme $\varphi = \sum_{j=1}^m \varphi_j \otimes e_j$, où

$$\varphi_j := \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-p} \leq n \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_{n-q} \leq n}} \varphi_{j, J, K} dz_{J_1} \wedge \dots \wedge dz_{J_{n-p}} \wedge d\bar{z}_{K_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{K_{n-q}}, \quad \varphi_{j, J, K} \in \mathcal{D}(V, \mathbb{C}),$$

en convenant que J et K sont respectivement les $(n-p)$ -uplets et $(n-q)$ -uplets ordonnés de manière strictement croissante $\{j_1, \dots, j_{n-p}\}$ et $\{k_1, \dots, k_{n-q}\}$ et que

$$dz_J := \bigwedge_{l=1}^{n-p} dz_{j_l}, \quad d\bar{z}_K := \bigwedge_{l=1}^{n-q} d\bar{z}_{k_l}.$$

Un élément de $\mathcal{D}'^{p, q}(X, E^*)$ se représente, lui, dans l'ouvert U (en coordonnées locales dans $V = \tau(U)$), sous la forme $T = \sum_{j=1}^m T^j \otimes e_j^*$, où l'on peut convenir d'exprimer chaque T^j sous la forme

$$T^j := \sum_{\substack{1 \leq j'_1 < \dots < j'_p \leq n \\ 1 \leq k'_1 < \dots < k'_q \leq n}} T^{j, J', K'} dz_{J'_1} \wedge \dots \wedge dz_{J'_p} \wedge d\bar{z}_{K'_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{K'_q}, \quad T^{j, J', K'} \in \mathcal{D}'(V, \mathbb{C}).$$

On conviendra alors que le crochet de dualité $\langle T, \varphi \rangle$ est défini par

$$\langle T, \varphi \rangle = (-2i)^n \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{|J|=n-p \\ |K|=n-q}} \epsilon_{J,K} T^{j,J^c,K^c}(\varphi_{j,J,K}),$$

où $J^c := \{1, \dots, n\} \setminus J$, $K^c := \{1, \dots, n\} \setminus K$ (ordonnés de manière strictement croissante) et $\epsilon_{J,K} = \pm 1$ est défini par

$$i^n dz_{J^c} \wedge d\bar{z}_{K^c} \wedge dz_J \wedge d\bar{z}_K = 2^n \epsilon_{J,K} \bigwedge_{k=1}^n (dx_k \wedge dy_k).$$

Lorsque E est le fibré trivial $X \times \mathbb{C} \rightarrow X$, la notion de *courant positif* jouera un très grand rôle. On notera $\mathcal{D}^{n-p,n-q}(X, \mathbb{C}) = \mathcal{D}^{n-p,n-q}(X)$ et $\mathcal{D}'^{p,q}(X, \mathbb{C}) = \mathcal{D}'^{p,q}(X)$.

DÉFINITION 2.7. Un courant $T \in \mathcal{D}'^{p,p}(X, \mathbb{C})$ est dit *positif*³ si et seulement $\langle T, \varphi \rangle \geq 0$ pour toute $(n-p, n-p)$ forme $\varphi \in \mathcal{D}^{n-p,n-p}(X)$ telle que, pour chaque z dans X , $\varphi(z)$ soit une forme *fortement positive* en tant qu'élément de $(T^{n-p,n-q})_{X,z}^*$. Le courant est dit *fortement positif* si ceci est vrai pour toutes les formes $\varphi \in \mathcal{D}^{n-p,n-p}(X)$ qui sont seulement *positives* en tout point z de X .

REMARQUE 2.8. Si $T = \sum_{J,K} T^{J,K} dz_J \wedge d\bar{z}_K$ est un (p,p) -courant positif, les mesures $i^{p^2} T^{J,J}$ sont des mesures positives (il suffit de tester T sur la forme fortement positive $i^{(n-p)^2} dz_{J^c} \wedge d\bar{z}_{J^c}$), les mesures complexes $T^{J,K}$ vérifient $T^{K,J} = \overline{T^{J,K}}$ (par dualité, puisque T est réel sur les formes positives) et, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des coefficients positifs ou nuls arbitraires, on a l'importante inégalité entre mesures :

$$(2.1) \quad \lambda_J \lambda_K |T^{J,K}| \leq 2^{n-p} \sum_{K \cap J \subset M \subset K \cup J} \lambda_M^2 T^{M,M}, \quad \lambda_L := \prod_{l \in L} \lambda_l \text{ si } L \subset \{1, \dots, n\}.$$

On admet ici cette inégalité (on peut l'établir en exercice en testant convenablement T sur $i^{(n-p)^2} dz_{J^c} \wedge d\bar{z}_{K^c}$). On trouvera la preuve dans [De0] (proposition 1.14, chapitre 3).

EXERCICE 2.9. Reprendre en exercice la preuve de la proposition 1.14 de [De0] (chapitre 3) conduisant aux inégalités (2.1). Si l'on note τ_n la forme volume canonique sur \mathbb{C}^n définie par $\tau_n := \bigwedge_k (dx_k \wedge dy_k)$, on fera les estimations après avoir noté

$$T^{J,K} \tau_n = \sum_{\varphi = (\varpi_1, \dots, \varpi_{n-p}) \in \mathbb{F}_4^{n-p}} \epsilon_\varpi T \wedge \gamma_\varpi,$$

où $\epsilon_\varpi = \pm 1, \pm i$ et

$$\gamma_\varpi = \prod_{l=1}^{n-p} \frac{i}{4} (dz_{j_l} + i^{\varpi_l} dz_{k_l}) \wedge (\overline{dz_{k_l} + i^{\varpi_l} dz_{j_l}}).$$

On aboutit ainsi à l'inégalité

$$|T^{J,K}| \tau_n \leq T \wedge \bigwedge_{l=1}^{n-p} (idz_{j_l} \wedge d\bar{z}_{j_l} + idz_{k_l} \wedge d\bar{z}_{k_l})$$

qui permet de conclure.

³Même remarque que dans la définition 2.1; « positif » signifie toujours ici « positif ou nul ».

REMARQUE 2.10. Le fait qu'un (p, p) -courant positif fermé T sur une variété analytique complexe soit nécessairement (voir la remarque 2.8) à coefficients mesures a cette (souvent utile) conséquence : il est d'ordre 0. Si en plus il est fermé ($dT = 0$), il est identiquement nul dès que son support est porté par un sous-ensemble analytique de X de codimension strictement supérieure à p . Ceci se voit en « testant » l'action du courant au voisinage d'un point régulier de son support (supposé de dimension strictement inférieure à $n - p$). Nous utiliserons cette remarque fréquemment dans la suite du cours ; elle vaut bien sûr pour tout (p, p) -courant d'ordre 0 (i.e. à coefficients mesures) sur X tel que dT soit aussi d'ordre 0 ; un tel courant est dit *normal* (voir le théorème 2.10 dans [De0], chapitre 3, et son corollaire 2.11).

EXEMPLE 2.11. Si u est localement une fonction *plurisousharmonique*⁴ et est localement intégrable dans X , le courant $dd^c u := (i/2\pi)\partial\bar{\partial}u$ est un courant positif fermé. De plus, localement sur X , tout $(1, 1)$ -courant T positif fermé s'écrit $dd^c u$, où u est plurisousharmonique et localement intégrable. On peut en effet localement (dans U , que l'on suppose tel que $\tau(U) = V$ soit un voisinage étoilé de l'origine dans \mathbb{C}^n) écrire $-iT = dS$, où $S = S^{1,0} + S^{0,1}$ est un 1-courant (c'est le lemme de Poincaré dans le voisinage étoilé V) ; comme T est positif, $-iT$ est réel (remarque 2.8), donc S aussi, d'où $S^{0,1} = \overline{S^{1,0}}$. On a donc $\bar{\partial}S = 0$, d'où, d'après le lemme de Dolbeault (exactitude locale du complexe de Dolbeault⁵, quitte à restreindre U et à supposer que V est un polydisque), $S = \bar{\partial}v$, $v \in \mathcal{D}'(U, \mathbb{C})$; on remarque que $-iT = \partial\bar{\partial}[2\operatorname{Re} v]$. La positivité de T implique que la distribution $2\operatorname{Re}(v)$ admet un représentant localement intégrable de plus plurisousharmonique (voir le théorème 5.8, chapitre 1, paragraphe 5, de [De0]), ce qui implique que le $(1, 1)$ -courant positif fermé T puisse s'écrire $dd^c u$, avec u plurisousharmonique.

EXEMPLE 2.12. Les $(1, 1)$ courants positifs fermés (donc localement de la forme $dd^c u$, avec u plurisousharmonique, voir l'exemple 2.11) peuvent être multipliés suivant un procédé d'« intégration par parties », à condition toutefois que les fonctions plurisousharmoniques u_j , $j = 1, \dots, p$ en jeu soient toutes localement bornées :

$$(2.2) \quad dd^c u_p \wedge \cdots \wedge dd^c u_1 = dd^c \left[u_p dd^c u_{p-1} \wedge \cdots \wedge dd^c u_1 \right] ;$$

le membre de droite dans l'égalité ci-dessus a un sens (au sens distributions) par induction, à condition que l'on sache montrer que si T est un courant positif fermé, il en est de même du courant $dd^c u \wedge T := dd^c[uT]$ lorsque u est une fonction plurisousharmonique localement bornée. Ceci dernier fait se prouve par régularisation de u par convolution, ce qui permet de remplacer u par la fonction plurisousharmonique régularisante $u^{(k)} = u * \rho_k$, où $(\rho_k)_k$ est une approximation C^∞ de la masse de Dirac dans \mathbb{C}^n . Par convergence faible de $dd^c[u^{(k)}T]$ vers $dd^c[uT]$, on voit que $dd^c[uT]$ est un courant positif. Le scénario inductif (2.2) permet donc de définir les courants positifs fermés

$$dd^c u_p \wedge \cdots \wedge dd^c u_1$$

lorsque les u_j , $j = 1, \dots, p$, sont des fonctions plurisousharmoniques localement bornées.

⁴Soit une fonction à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$, semi-continue supérieurement, et sous-harmonique sur la trace de toute droite complexe sur l'ouvert de définition.

⁵On applique ici le lemme de Dolbeault, voir le cours de P. Charpentier [Charp], proposition II.3.2, ou aussi [De0], chapitre 1, section 3E.

EXEMPLE 2.13. (une construction géométrique à titre d'exercice). Il est naturel de vouloir s'affranchir de l'hypothèse contraignante que les fonctions plurisousharmoniques u_j impliquées dans la construction inductive (2.2) soient localement bornées. Un exemple particulier important est celui où X est un ouvert U de \mathbb{C}^n et où $T = dd^c[\log(|f_1|^2 + \cdots + |f_m|^2)]$, où f_1, \dots, f_m sont des fonctions holomorphes dans U . La fonction $\log \|f\|^2 = \log(|f_1|^2 + \cdots + |f_m|^2)$ est bien une fonction *plurisousharmonique* localement intégrable⁶ dans U , ce qui implique que T soit un courant positif fermé (exemple 2.11). Cependant, la méthode proposée dans l'exemple 2.12 pour construire les puissances extérieures successives $T, T \wedge T, \dots$, du courant T se trouve prise en défaut ici car $\log \|f\|^2$ n'est plus une fonction localement bornée ! Il est néanmoins possible de mettre en œuvre le procédé d'intégration par parties introduit dans l'exemple 2.12 pour calculer $dd^c u_k \wedge \cdots \wedge dd^c u_1$ pour $k = 1, \dots, p$, pourvu que les ensembles $\text{Sing}(u_1), \dots, \text{Sing}(u_p)$ des « lieux singuliers » des fonctions u_1, \dots, u_p ($\text{Sing}(u_j)$ est par définition le complémentaire de l'ensemble des points de X au voisinage desquels u_j est localement bornée) soient tels que $\text{Sing}(u_j) \subset A_j$, où A_j est un sous-ensemble analytique fermé de X , avec

$$(2.3) \quad \forall k = 1, \dots, p, \quad \forall 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq p, \quad \text{codim}(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}) \leq k.$$

Pour une preuve de ce résultat difficile (fondé sur le recours aux inégalités de Chern-Nirenberg), nous renvoyons au théorème 4.5 (corollaire 4.11) dans [De0]. Pour revenir au cas du courant $T = dd^c \log[\|f\|^2]$ lorsque f_1, \dots, f_m sont m fonctions holomorphes dans un ouvert U de \mathbb{C}^n , le calcul (suivant le procédé décrit dans l'exemple 2.12) des puissances extérieures de T est donc possible (si l'on admet le résultat mentionné ici) jusqu'à l'ordre $p = \text{codim} \{f_1 = \cdots = f_m = 0\}$. En effet, la condition (2.3) est bien remplie puisque $\text{Sing}(\log \|f\|^2) = \{f_1 = \cdots = f_m = 0\}$ et que tous les A_j , $j = 1, \dots, p$ peuvent être pris égaux à $\{f_1 = \cdots = f_m = 0\}$ dans ce cas particulier. Au delà de la puissance extérieure p -ième, la condition (2.3) est en défaut et on ne peut plus l'invoquer pour construire $T^{\wedge k}$ pour

$$k > p = \text{codim}(\{f_1 = \cdots = f_m = 0\}).$$

Nous allons ici présenter à titre d'exercice une démarche différente, plus géométrique dans la mesure où elle permet de donner un sens à toutes les puissances successives de T lorsque $T = dd^c[\log |s|^2]$, s désignant une section holomorphe d'un fibré hermitien holomorphe $(E \rightarrow X, |\cdot|)$ de rang m au dessus d'une variété analytique complexe X . Le cas mentionné ci-dessus correspond au cas où $(E \rightarrow X, |\cdot|)$ est le fibré trivial $X \times \mathbb{C}^m$, la métrique étant la métrique usuelle dans \mathbb{C}^m ; notons toutefois que, même dans ce cas, nous ne limiterons pas notre définition des puissances successives de T à un ordre au plus égal à la codimension du lieu des zéros de la section s . Le courant $(dd^c[\log |s|^2])^k$, s'il reste un courant ∂ et $\bar{\partial}$ -fermé n'est d'ailleurs plus en général un courant positif et il n'est nullement évident (nous le montrerons néanmoins ci-dessous) qu'il s'agit d'un courant à coefficients « mesures », comme c'est le cas lorsque $m = 1$ du fait de la *formule de Lelong-Poincaré* (1.16). Pour tout $k = 1, \dots, n$, nous indiquons un procédé inspiré de celui proposé dans l'exemple 2.12 pour définir de manière naturelle la k -ème puissance extérieure de $dd^c[\log |s|^2]$ en en « séparant » la contribution localisée sur le lieu singulier (ici le sous-ensemble

⁶Les singularités sont logarithmiques, donc intégrables. Pour une justification de la locale intégrabilité de $\log \|f\|^2$ (cela vaudra aussi plus loin pour $\log |s|^2$), on peut invoquer (voir l'exemple 2.15) l'inégalité de Lojasiewicz (2.9) mentionnée précisément à propos de cet exemple 2.15 à venir.

analytique $Y \subset X$ où la section s s'annule) de la contribution « diffuse » sur le lieu régulier (à savoir l'ouvert $X \setminus Y$).

Soit donc $k \in \{1, \dots, n\}$, $n := \dim X$. Étant donné un paramètre complexe λ de partie réelle arbitrairement grande⁷, nous pouvons définir un (k, k) courant dans tout ouvert relativement compact U de X en posant

$$\begin{aligned}
(dd^c)_\lambda^k(\log |s|^2)|_Y &:= \left(\frac{1}{2i\pi}\right) \bar{\partial}|s|^{2\lambda} \wedge \partial[\log |s|^2] \wedge (dd^c[\log |s|^2])^{k-1} \\
&= \lambda |s|^{2\lambda} \frac{\bar{\partial}|s|^2}{|s|^2} \wedge \frac{\partial|s|^2}{|s|^2} \wedge (dd^c[\log |s|^2])^{k-1} \\
(2.4) \qquad \qquad \qquad &= dd^c \left[\frac{|s|^{2\lambda}}{\lambda} (dd^c[\log |s|^2])^{k-1} \right] - |s|^{2\lambda} (dd^c[\log |s|^2])^k.
\end{aligned}$$

Nous souhaitons faire en sorte que le paramètre complexe λ puisse être pris égal à 0 et que l'on puisse ainsi récupérer un $(1, 1)$ -courant d -fermé (même en fait ∂ et $\bar{\partial}$ fermé), non nécessairement positif (à moins que le fibré ne soit trivial), mais en tout cas à coefficients « mesures », de support dans le sous-ensemble analytique fermé Y de X défini comme le lieu des zéros de la section s .

Pour ce faire, nous allons invoquer un outil « marteau-pilon » (malheureusement inévitable ici), le théorème 1.53 de *résolution des singularités* d'Hironaka, l'ensemble Y étant ici le lieu des zéros communs de la section s , et la désingularisation

$$\tilde{X}_Y \xrightarrow{\pi_Y} X.$$

Nous pouvons, une fois cette *désingularisation* réalisée, la faire suivre d'un *éclatement normalisé* (voir la section 1.4.6) de \tilde{X}_Y suivant le faisceau cohérent d'idéaux $\tilde{\mathcal{J}}[s] := \mathcal{J}[s] \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}_Y}$, où $\mathcal{J}[s]$ est un faisceau cohérent d'idéaux sur X que nous allons définir.

Considérons pour cela le fibré $E^* = \bigwedge^1 E^* \rightarrow X$ et le morphisme de « contraction » (dit aussi *produit intérieur*)

$$\lrcorner_s : E^* = \bigwedge^1 E^* \mapsto \bigwedge^0 E := X \times \mathbb{C}$$

défini au dessus d'un ouvert U de X où existe un repère local (e_1, \dots, e_m) , par

$$\lrcorner_s[(\xi_1 e_1^*(z) + \dots + \xi_m e_m^*(z))] := \sum_{j=1}^m \xi_j \sigma_j(z)$$

si

$$s(z) := \sum_{j=1}^m \sigma_j(z) e_j(z), \quad \forall z \in U.$$

Le faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{J}[s]$ est défini de la manière suivante : un élément h_z de $\mathcal{O}_{X,z}$ est dans $(\mathcal{J}[s])_z$ si et seulement si il existe une section holomorphe a de E^* au voisinage de z telle $(\lrcorner_s[a])_z = h_z$.

Notons maintenant

$$\tilde{X}_{Y, \tilde{\mathcal{J}}[s]} \xrightarrow{\pi_{Y, \tilde{\mathcal{J}}[s]}} X$$

⁷Le choix de $\operatorname{Re} \lambda$ assez grand dépend *a priori* de l'ouvert relativement compact U où l'on choisit de définir ce courant, vu que l'on tâche de faire en sorte que $|s|^{2\lambda}$ s'annule suffisamment sur $\{s = 0\}$ pour compenser les singularités de la forme $\partial[\log |s|^2] \wedge (dd^c[\log |s|^2])^{p-1}$ ici exprimée sur $\{s \neq 0\}$.

l'enchaînement de la désingularisation $\tilde{X}_Y \xrightarrow{\pi_Y} X$ et de l'éclatement

$$\tilde{X}_{Y, \tilde{\mathcal{J}}[s]} \xrightarrow{\pi_{\tilde{\mathcal{J}}[s]}} \tilde{X}_Y$$

($\pi_{Y, \tilde{\mathcal{J}}[s]} = \pi_Y \circ \pi_{\tilde{\mathcal{J}}[s]}$) (notons que la projection ainsi construite est topologiquement propre). Localement (dans un ouvert de carte \tilde{U}_α) sur la variété $\tilde{X}_{Y, \tilde{\mathcal{J}}[s]}$, nous avons

$$(\pi_{Y, \tilde{\mathcal{J}}[s]})^* s = \tilde{s}_{0, \alpha} \tilde{s}'_\alpha,$$

où \tilde{s}'_α est, au dessus de \tilde{U}_α , une section ne s'annulant pas du fibré $(\pi_{Y, \tilde{\mathcal{J}}[s]})^*(E)$ et $\tilde{s}_{0, \alpha}$ est un monôme. Si l'on utilise un atlas de $\tilde{X}_{Y, \tilde{\mathcal{J}}[s]}$, nous voyons que les $\tilde{s}_{0, \beta} / \tilde{s}_{0, \alpha}$ définissent sur $\tilde{X}_{Y, \tilde{\mathcal{J}}[s]}$ le diviseur de Cartier dont le diviseur de Weil associé est le diviseur exceptionnel $D_{\tilde{\mathcal{J}}[s]}$ (effectif) associé à l'éclatement de \tilde{X}_Y suivant l'idéal $\tilde{\mathcal{J}}[s]$. Les données $(\tilde{U}_\alpha, |s'_\alpha|^2)$ déterminent, elles, une certaine métrique hermitienne sur le fibré en droites $\tilde{L}_{\tilde{\mathcal{J}}[s]}$ correspondant à ce diviseur exceptionnel effectif $D_{\tilde{\mathcal{J}}[s]}$. La première forme de Chern de ce fibré en droites s'exprime dans l'ouvert de carte \tilde{U}_α comme $-dd^c[\log |s'_\alpha|^2] := \tilde{c}_{\tilde{\mathcal{J}}[s], 1}$. Les $dd^c[\log |s'_\alpha|^2]$ se recollent donc en la première forme de Chern $\tilde{c}_{\tilde{\mathcal{J}}[s], 1}^*$ du fibré hermitien dual $\tilde{L}_{\tilde{\mathcal{J}}[s]}^*$, équipé de la métrique duale de celle définie sur le fibré en droites $\tilde{L}_{\tilde{\mathcal{J}}[s]}$. On constate d'autre part que

$$(\pi_{Y, \tilde{\mathcal{J}}[s]})^* \left[(dd^c)_\lambda^k (\log |s|^2)|_Y \right] = \frac{\lambda}{(2i\pi)} |s_0|^{2\lambda} \frac{\overline{\partial s_0}}{s_0} \wedge \frac{\partial s_0}{s_0} \wedge (\tilde{c}_{\tilde{\mathcal{J}}[s], 1}^*)^{k-1}$$

(il s'agit ici, notons le, du *pull-back* d'une forme différentielle). On en déduit alors que la fonction

$$\lambda \mapsto (dd^c)_\lambda^k (\log |s|^2)|_Y$$

(comprise cette fois comme une fonction à valeurs dans $\mathcal{D}'^{k, k}(X)$) se prolonge en une fonction holomorphe dans un demi-plan $\operatorname{Re} \lambda > -1/r$ pour un certain entier $r \in \mathbb{N}^*$, et que la valeur en $\lambda = 0$ de ce prolongement vaut

$$(2.5) \quad \left[(dd^c)_\lambda^k (\log |s|^2)|_Y \right]_{\lambda=0} = (\pi_{Y, \tilde{\mathcal{J}}[s]})^* \left[D_{\tilde{\mathcal{J}}[s]} \wedge (\tilde{c}_{\tilde{\mathcal{J}}[s], 1}^*)^{k-1} \right],$$

où l'on a pris à droite l'image directe⁸ du courant obtenu par multiplication du « courant d'intégration » (multiplicités prises en compte) le long d'un diviseur à croisements normaux (cette notion est immédiate à définir dans ce contexte particulier⁹ car le support du diviseur est défini localement comme le lieu des zéros d'un monôme) par une $(k-1, k-1)$ -forme C^∞ . Nous avons donc pu, avec les formules (2.5), donner un sens au courant « valeur en $\lambda = 0$ » de $\lambda \mapsto (dd^c)_\lambda^k (\log |s|^2)|_Y$.

⁸L'action de $\pi_* T$ sur une forme test φ est définie comme l'action de T sur la forme $\varphi \circ \pi$; cette définition est licite si la projection π est propre, ce qui est le cas ici.

⁹L'intégration d'une $(n-1, n-1)$ forme test φ relativement au diviseur mH , où H est une sous-variété (e.g. un hyperplan de coordonnées) est immédiatement définie par

$$\langle [mH], \varphi \rangle := m \int_H \varphi.$$

L'application $\varphi \in \mathcal{D}^{n-1, n-1}(X) \mapsto \langle [mH], \varphi \rangle$ définit ici un $(1, 1)$ -courant que nous convenons d'appeler le « courant d'intégration » sur le diviseur mH et de noter $[mH]$. Si D est une somme de tels diviseurs, $[D]$ est défini comme la somme des $[mH]$. Nous définirons le *courant d'intégration* $[C]$ correspondant à un p -cycle C d'un espace analytique complexe dans une section suivante (section 2.3).

L'ambiguïté reste ici toutefois que l'explicitation de ce courant fait appel à une résolution des singularités, dont dépendent à la fois

$$D_{\widetilde{\mathcal{J}}[s]}, \quad \widetilde{c}_{\widetilde{\mathcal{J}}[s],1}^*, \quad \pi_{Y,\widetilde{\mathcal{J}}[s]}.$$

On lèvera partiellement cette ambiguïté ultérieurement, en développant une approche différente (dans l'exemple 2.35), une fois armés d'une meilleure connaissance de la pratique des courants positifs fermés.

On note toutefois que si l'explicitation du courant $[(dd^c)_\lambda^k(\log |s|^2)|_Y]_{\lambda=0}$ dépend de la résolution des singularités introduite, sa définition au travers du prolongement analytique, elle, n'en dépend pas ! Le courant ainsi construit est un courant fermé (même ∂ et $\bar{\partial}$ -fermé), d'ordre 0 (donc à coefficients « mesures »), de support inclus dans le support du faisceau quotient $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}[s]$, i.e. le lieu des zéros de la section holomorphe s . Au travers de cet exemple, nous avons vu poindre l'intérêt des outils puissants de géométrie analytique tels le théorème 1.53 ou le procédé d'éclatement normalisé. Le mécanisme décrit ici, suggère, au travers de l'identité « formelle »

$$\begin{aligned} (dd^c)_\lambda^k(\log |s|^2)|_Y &= dd^c \left[\frac{|s|^{2\lambda}}{\lambda} (dd^c[\log |s|^2])^{k-1} \right] - |s|^{2\lambda} (dd^c[\log |s|^2])^k \\ &= dd^c \left[\left(\frac{1}{\lambda} + \log |s|^2 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\log |s|^2)^l}{l!} \lambda^l \right) (dd^c[\log |s|^2])^{k-1} \right] \\ &\quad - |s|^{2\lambda} (dd^c[\log |s|^2])^k \\ &= dd^c \left[\left(\log |s|^2 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\log |s|^2)^l}{l!} \lambda^l \right) (dd^c[\log |s|^2])^{k-1} \right] \\ &\quad - |s|^{2\lambda} (dd^c[\log |s|^2])^k, \end{aligned}$$

et en suivant la démarche proposée dans l'exemple 2.12, la possibilité de définir la puissance k -ième du courant $dd^c[\log |s|^2]$ comme

$$(2.6) \quad (dd^c[\log |s|^2])^k := \left[(dd^c)_\lambda^k(\log |s|^2)|_Y \right]_{\lambda=0} + \left[|s|^{2\lambda} [dd^c[\log |s|^2]]^k \right]_{\lambda=0}.$$

En suivant la démarche développée pour l'étude du prolongement jusqu'en $\lambda = 0$ de $\lambda \mapsto (dd^c)_\lambda^k(\log |s|^2)|_Y$ (et le calcul de la « valeur » en $\lambda = 0$), on montrerait de même que la fonction $\lambda \mapsto |s|^{2\lambda} (dd^c \log |s|^2)^k$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de $\lambda = 0$, de valeur cette fois en ce point

$$(2.7) \quad \left[|s|^{2\lambda} [dd^c[\log |s|^2]]^k \right]_{\lambda=0} = (\pi_{Y,\widetilde{\mathcal{J}}[s]})_* \left[(\widetilde{c}_{\widetilde{\mathcal{J}}[s],1}^*)^k \right];$$

il s'agit d'un courant d'ordre 0, à coefficients mesures, toujours ∂ et $\bar{\partial}$ -fermé, image directe d'un courant défini par une (k, k) -forme de classe C^∞ sur $\widetilde{X}_{Y,\widetilde{\mathcal{J}}[s]}$. Le « candidat » à être le produit $(dd^c \log |s|^2)^k$ est ici la somme des deux courants de bidegré (k, k) , fermés et d'ordre 0, définis respectivement en (2.5) et (2.7) ; les deux contributions à la décomposition (2.6), l'une « localisée » sur le sous-ensemble analytique fermé $Y = \text{Supp } \mathcal{O}_X/\mathcal{J}[s]$, l'autre « diffuse » sur son complémentaire ouvert $X \setminus Y$, sont données précisément par les (k, k) courants fermés et d'ordre 0 définis respectivement en (2.5) et (2.7). Le concept d'*holonomie* que nous dégagerons dans la section 2.3.3 et le fait que le courant $(dd^c[\log |s|^2])^k$ défini en (2.6) ait la *propriété d'extension standard* (voir la section 2.3.3) nous assure que la décomposition (2.6)

est bien la décomposition « robuste » :

$$(2.8) \quad (dd^c[\log |s|^2])^k = (dd^c[\log |s|^2])^k \cdot \mathbf{1}_Y + (dd^c[\log |s|^2])^k \cdot \mathbf{1}_{X \setminus Y},$$

ce indépendamment du choix de la résolution des singularités qui a permis la construction et le scindage du courant $(dd^c[\log |s|^2])^k$.

2.1.3. Prolongement de courants positifs fermés. Cette section est en grande partie consacrée à l'important *théorème de prolongement des courants positifs fermés* de H. El Mir [EIM].

DÉFINITION 2.14. On appelle *sous-ensemble pluripolaire* d'une variété analytique complexe X tout sous-ensemble de X qui peut localement être défini comme $u^{-1}(\{-\infty\})$, où u est une fonction plurisousharmonique localement intégrable.

EXEMPLE 2.15. Tout sous-ensemble analytique A d'une variété analytique complexe X , défini localement comme le lieu des zéros communs à m fonctions holomorphes f_1, \dots, f_m , est *pluripolaire* puisque la fonction

$$z \mapsto \log |f| := \frac{\log(|f_1|^2 + \dots + |f_m|^2)}{2}$$

est plurisousharmonique et localement intégrable. L'intégrabilité locale de cette fonction est (par exemple) une conséquence de *l'inégalité de Lojasiewicz locale* : si f_1, \dots, f_m sont m fonctions holomorphes dans un voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^n , définissant un sous-ensemble analytique A de ce voisinage, il existe (voir par exemple [BoR, Lo, Tou]) un exposant minimal $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$(2.9) \quad \sup_{j=1, \dots, m} |f_j(z)| \geq \kappa_\epsilon [d(z, A)]^{\alpha + \epsilon}, \quad \kappa_\epsilon > 0,$$

au voisinage de l'origine. Ce résultat, complété avec la description locale des sous-ensembles analytiques après la « préparation à la Noether » (voir la sous-section 1.4.4 et en particulier la proposition 1.6), implique la locale intégrabilité de $\log \|f\|$. Nous profitons ici de mentionner *l'inégalité de Lojasiewicz* s'avère un outil important en géométrie analytique complexe.

L'important théorème d'extension de H. El Mir [EIM] assure que les ensembles pluripolaires ne sauraient constituer un obstacle à l'extension des courants positifs fermés. Nous l'exploiterons en particulier pour les *courants d'intégration sur les ensembles analytiques* (section 2.3).

THEORÈME 2.16. *Soit X une variété analytique complexe de dimension n , E un sous-ensemble pluripolaire fermé, T un (p, p) -courant positif fermé (donc à coefficients mesures) dans l'ouvert $X \setminus E$. Si T a une masse finie au voisinage de tout point de E (i.e. la somme des masses totales des mesures coefficients de $i^p T$, considérés comme mesures positives au voisinage de ce point, la masse étant prise dans ce voisinage, est finie), le courant positif obtenu trivialement en prolongeant les mesures coefficients de T par 0 sur E reste un courant positif fermé.*

REMARQUE 2.17. Si T est un courant positif fermé sur X et si E est un sous-ensemble pluripolaire fermé, le courant obtenu en prolongeant trivialement (par 0) la restriction de T à l'ouvert $X \setminus E$ est noté $T \cdot \mathbf{1}_{X \setminus E}$. Le courant (lui aussi positif fermé) $T \cdot \mathbf{1}_E := T - T \cdot \mathbf{1}_{X \setminus E}$ est un courant supporté par l'ensemble pluripolaire E . Cette opération de « restriction » $T \mapsto T \cdot \mathbf{1}_E$ des courants positifs fermés sur X à un sous-ensemble pluripolaire fermé sera particulièrement importante lorsqu'il s'agira

des courants d'intégration (voir la section 2.3.1) et, plus tard, de courants résiduels (section 2.5.4). Signalons d'ailleurs que nous avons utilisé ce type de restriction dans l'exemple 2.13 : le courant $(dd^c([\log |s|^2]))^k \cdot \mathbf{1}_{X \setminus Y}$ s'obtient par exemple en prolongeant trivialement par 0 le (k, k) courant (à coefficients localement intégrables dans X et C^∞ dans Y) de l'ouvert $X \setminus Y$ défini comme $(dd^c[\log |s|^2])^k$, Y désignant ici le lieu des zéros de la section s , si l'on reprend les notations utilisées dans l'exemple 2.13 ; ce courant n'est pas positif, mais il est fermé et satisfait une propriété d'holonomie (voir la section 2.3.3) qui assure que la « restriction » existe comme dans le contexte du théorème 2.16.

DÉMONSTRATION. On se place au voisinage V_a d'un point a de l'ensemble pluripolaire E . Tout d'abord, on remarque (quitte à restreindre V_a) que l'on peut construire une suite croissante $(u_k)_k$ de fonctions plurisousharmoniques dans V_a , à valeurs dans $[0, 1]$, C^∞ dans $V_a \setminus E$, convergeant uniformément vers 1 sur tout compact de $V_a \setminus E$, avec de plus $u_k \equiv 0$ au voisinage de $V_a \cap E$. On admettra ce point technique ici (pour une preuve, voir le lemme 2.2 de [De0], chapitre 3 ; on peut faire pour s'en convaincre l'exercice 2.18 en fin de sous-section, traitant du cas particulier important où E est un sous-ensemble analytique).

On fait la preuve dans un premier temps lorsque T est un $(n-1, n-1)$ -courant ($p = n-1$). On introduit une fonction (de classe C^∞) $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, nulle sur $[0, 1/3]$, croissante, égale à 1 sur $[2/3, 1]$, et l'on pose $\varphi_k := \theta \circ u_k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Le prolongement \tilde{T} de T proposé ici s'approche dans V_a au sens de la topologie faible sur l'espace des courants (p, p) positifs (donc en particulier tels que $i^{p^2}T$ soit à coefficients mesures) par la suite $(T_k)_k$ de courants positifs « tronqués » près de E et définis par $T_k = \varphi_k T$. Pour prouver le théorème 2.16, il suffit donc de prouver que la suite $(\partial\varphi_k \wedge T)_k$ converge vers 0 dans V_a au sens de la topologie faible lorsque k tend vers $+\infty$ (le même résultat vaudra par conjugaison vu la positivité de T si ∂ est remplacé par $\bar{\partial}$). Comme T est positif, $\gamma \mapsto \langle T, i\gamma \wedge \bar{\gamma} \rangle$ est une forme hermitienne positive sur $\mathcal{D}^{(1,0)}(V_a)$. Il en résulte par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que si $\varphi \in \mathcal{D}^{1,0}(V_a)$, on a

$$(2.10) \quad |\langle T, \partial\varphi_k \wedge \bar{\varphi} \rangle|^2 \leq \langle T, (\theta'(u_k))^2 i\varphi \wedge \bar{\varphi} \rangle \times \langle T, \psi i\partial u_k \wedge \bar{\partial} u_k \rangle$$

si ψ est une fonction test de $\mathcal{D}(V_a)$ identiquement égale à 1 au voisinage du support de φ . Le fait que T ait une masse finie dans $V_a \setminus E$ (d'après l'hypothèse), combiné avec la convergence uniforme vers 0 de $(\theta'(u_k))_{k \geq 0}$ sur V_a , implique

$$(2.11) \quad \lim_{k \rightarrow 0} \langle T, (\theta'(u_k))^2 i\varphi \wedge \bar{\varphi} \rangle = 0$$

grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue. D'autre part,

$$dd^c u_k^2 = 2u_k dd^c u_k + \frac{i}{\pi} \partial u_k \wedge \bar{\partial} u_k \geq \frac{i}{\pi} \partial u_k \wedge \bar{\partial} u_k$$

puisque u_k est plurisousharmonique positive. On en déduit donc

$$(2.12) \quad \langle T, i\psi \partial u_k \wedge \bar{\partial} u_k \rangle \leq \pi \langle T, \psi dd^c(u_k^2) \rangle.$$

Par intégration par parties, et puisque $u_k \equiv 0$ au voisinage de E et que $\partial T = \bar{\partial} T \equiv 0$ sur $V_a \setminus E$ (par hypothèses aussi, T étant supposé fermé sur $X \setminus E$), on a

$$(2.13) \quad \langle T, \psi dd^c(u_k^2) \rangle = \langle T, u_k^2 dd^c \psi \rangle \leq C \int_{V_a \setminus E} \|T\| < +\infty$$

puisque T a une masse finie dans $V_a \setminus E$. Si l'on injecte les informations (2.11) et (2.13) (couplée avec l'inégalité (2.12)) dans l'inégalité (2.10), on en déduit bien la convergence vers 0 de $\partial\varphi_k \wedge T$.

Si T est un (p, p) courant, on se ramène au cas précédent en appliquant le résultat (dont on sait maintenant qu'il est valable pour $p = n - 1$) à tous les courants positifs et fermés dans $X \setminus E$ de la forme

$$T \wedge (i\beta_1 \wedge \bar{\beta}_1) \wedge \cdots \wedge (i\beta_{n-p-1} \wedge \bar{\beta}_{n-p-1}),$$

où $\beta_1, \dots, \beta_{n-p-1}$ sont des $(1, 0)$ -formes à coefficients constants arbitraires. \square

EXERCICE 2.18. Construire une telle suite $(u_k)_k$ comme indiqué en début de preuve lorsque $u = \log|f|^2$, f_1, \dots, f_m étant des fonctions holomorphes dont l'ensemble des zéros communs au voisinage de $a \in E$ coïncide avec E dans ce voisinage ($|f|$ est ici la norme euclidienne sur \mathbb{C}^m). On choisira une fonction χ , de classe C^∞ sur $[0, 1]$, à valeurs dans $[0, 1]$, nulle sur $[0, 1/2]$, croissante et telle que $\chi(1) = 1$, puis on prendra, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u_k = \max_{1 \leq j \leq k} (\chi(|f|^{1/j}) * \rho_{\epsilon_j}),$$

où $(\rho_{\epsilon_j})_j$ désigne une approximation de la masse de Dirac dans \mathbb{C}^n .

2.2. Nombres de Lelong d'un (p, p) -courant positif fermé

Dans cette section, nous supposons que la variété analytique complexe X sur laquelle nous allons travailler est une *variété de Stein*, ce que nous interpréterons en supposant ici que X peut s'écrire comme union croissante d'une suite d'ensembles $\{u_0 < N\}$, $N = 1, 2, \dots$, tous relativement compacts dans X , u_0 étant une fonction strictement plurisousharmonique¹⁰. Comme nous avons en tête dans cette section essentiellement des aspects locaux, l'hypothèse faite ici sur X ne sera nullement contraignante (localement, X se présente toujours comme une variété de Stein). N'oublions pas cependant qu'une variété analytique complexe compacte ne saurait être de Stein!

Soit T un (p, p) courant positif fermé sur une variété analytique complexe et $u : X \rightarrow [-\infty, \infty[$ une fonction continue plurisousharmonique, semi-exhaustive sur le support de T , i.e. telle qu'il existe $R > 0$ de manière à ce que

$$(2.14) \quad \text{Supp } T \cap \{z \in X ; u(z) < R\} \subset\subset X.$$

EXEMPLE 2.19. Un exemple typique de telle fonction u sera $z \mapsto \log|z - z_0|^2$, où z_0 est un point du support du courant T . Notons que dans ce cas $dd^c u$ est le *pull-back* de la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ (considéré ici comme hyperplan à l'infini de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, voir l'exemple 1.11) sur la carte affine \mathbb{C}^n de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, *via* l'application qui à un point de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ associe précisément l'intersection de la droite vectorielle dirigée par ce point (vue comme droite de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$) avec le « monde à l'infini » $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ (plus une translation par z_0). Notons aussi que la $(1, 1)$ forme $dd^c(e^{2u})$ correspond (par la correspondance mentionnée en remarque 2.2) à la métrique hermitienne « plate » dans \mathbb{C}^n .

¹⁰Pour la définition des *variétés de Stein*, on se référera à la note dans la section 1.4.3. Les théorèmes A et B de Cartan sont des théorèmes majeurs dans ce contexte. Pour la construction d'une fonction plurisousharmonique u_0 d'*exhaustion*, nous renvoyons au chapitre 1 de [De0], notamment au théorème 6.14 (combiné avec le lemme 6.17) de cette monographie, où l'existence d'une telle fonction d'exhaustion u_0 (lorsque X est une *variété de Stein*) est présentée.

PROPOSITION 2.1. *Si T et u sont fixés comme ci-dessus et que R est tel que (2.14) soit remplie, alors la fonction*

$$r \in]-\infty, R[\mapsto \nu(T, u, r) := \int_{\{z \in X; u(z) < r\}} T \wedge (dd^c u)^{n-p}$$

est une fonction positive croissante de r sur $]-\infty, R[$. La limite de cette fonction lorsque r tend vers $-\infty$ existe donc et vaut

$$\nu(T, u) := \int_{\{u = -\infty\}} T \wedge (dd^c u)^{n-p}.$$

Cette limite (positive) est appelée nombre de Lelong (généralisé) de T suivant la fonction plurisousharmonique semi-exhaustive u .

DÉMONSTRATION. La croissance de la fonction $r \mapsto \nu(T, u, r)$ lorsque $r \in]-\infty, R[$ résulte du fait que T est un courant positif et de ce que les ensembles $\{u < r\}$ sont emboîtés en croissant lorsque r croît. L'existence de la limite lorsque r tend vers $-\infty$ résulte donc de la monotonie de cette fonction et du fait qu'elle soit minorée par 0. \square

Si χ est une fonction affine $\chi : t \mapsto \alpha t + \beta$, $\alpha > 0$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on constate que, pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\{u < r\}} T \wedge (dd^c[\chi \circ u])^{n-p} = \alpha^{n-p} \int_{\{u < r\}} T \wedge (dd^c[\chi \circ u])^{n-p}.$$

Ceci reste vrai pour une enveloppe supérieure de telles fonctions affines croissantes, i.e. pour une fonction convexe croissante $\chi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, et l'on a, pour une telle fonction,

$$\int_{\{u < r\}} T \wedge (dd^c[\chi \circ u])^{n-p} = (\chi'_-(r))^{n-p} \int_{\{u < r\}} T \wedge (dd^c[\chi \circ u])^{n-p},$$

où χ'_- désigne la dérivée à gauche de χ . En particulier, si $\chi(t) = \exp(2t)$, il vient

$$(2.15) \quad \int_{\{u < r\}} T \wedge (dd^c[\exp(2u)])^{n-p} = (2e^{2r})^{n-p} \int_{\{u < r\}} T \wedge (dd^c[\exp(2u)])^{n-p}.$$

On remarque aussi que, bien que la fonction $u : z \mapsto \log |z - z_0|$ ne soit pas continue en z_0 , la formule (2.15) permet de définir le nombre de Lelong $\nu(T, u)$ comme la limite, lorsque r tend vers 0^+ , de

$$r \mapsto \frac{\int_{\{e^u < r\}} T \wedge (dd^c[\exp(2u)])^{n-p}}{(2r^2)^{n-p}}$$

lorsque $\exp(2u)$ est une fonction continue (u pouvant présenter la singularité $-\infty$ en $z = z_0$, comme c'est le cas pour la fonction $u : z \mapsto \log |z - z_0|$ (voir l'exemple suivant 2.20).

EXEMPLE 2.20. Si z_0 est un point du support de T et que $u(z) := \log |z - z_0|$, le nombre de Lelong ainsi défini est appelé *nombre de Lelong du courant T au point z_0* et noté $\nu_{z_0}(T)$. C'est un nombre réel strictement positif (sauf bien sûr si T est le courant nul au voisinage de z_0). En utilisant l'égalité (2.15), on constate que le nombre de Lelong $\nu_{z_0}(T)$ au point z_0 s'obtient aussi comme la limite, lorsque r tend

vers 0 en décroissant, du quotient de la « masse » de T dans la boule euclidienne de centre 0 et de rayon r

$$\frac{\pi^{n-p}}{(n-p)!} \int_{X \cap \{|z-z_0| \leq r\}} T \wedge (dd^c |z-z_0|^2)^{n-p}$$

par le volume $(n-p)$ -dimensionnel de cette boule euclidienne, soit

$$\frac{\pi^{n-p}}{(n-p)!} r^{2(n-p)}.$$

En résumé,

$$(2.16) \quad \nu_{z_0}(T) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{r^{2(n-p)}} \int_{X \cap \{|z-z_0| \leq r\}} T \wedge (dd^c |z-z_0|^2)^{n-p} \right).$$

2.3. Courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique

2.3.1. Construction et premières propriétés. Si A est un sous-ensemble analytique irréductible de dimension $n-p$, il résulte de la présentation locale « à la Noëther » des sous-ensembles analytiques, telle qu'elle est décrite dans la sous-section 1.4.4 (voir la proposition 1.6), que le courant positif (p, p) défini sur $X \setminus A_{\text{sing}}$ par

$$\langle [A], \varphi \rangle := \int_A \varphi = \int_{A_{\text{reg}}} \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}^{n-p, n-p}(X \setminus A_{\text{sing}})$$

est de masse finie au voisinage de tout point de A_{sing} . Comme ce courant (défini sur l'ouvert $X \setminus A_{\text{sing}}$) est fermé sur cet ouvert et que le sous-ensemble analytique A_{sing} est pluripolaire (exemple 2.15), on peut prolonger $[A]$ en un (p, p) -courant fermé positif sur X (suivant le théorème 2.16), ce en posant

$$\langle [A], \varphi \rangle := \int_{A_{\text{reg}}} \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}^{n-p, n-p}(X).$$

Ce courant ainsi prolongé (noté toujours $[A]$) est appelé *courant d'intégration sur l'ensemble irréductible A* .

DÉFINITION 2.21. Si A désigne un sous-ensemble analytique irréductible de dimension $n-p$ d'une variété analytique complexe de dimension n , on définit le *courant d'intégration* $[A]$ sur A comme l'extension triviale (au sens du théorème 2.16) du courant positif fermé sur $X \setminus A$:

$$\varphi \in \mathcal{D}^{n-p, n-p}(X \setminus A) \mapsto \int_{X \setminus A_{\text{sing}}} \varphi.$$

C'est un courant positif fermé sur X , de support le sous-ensemble analytique A . Si C désigne un $(n-p, n-p)$ -cycle

$$C = \sum_{\gamma} m_{\gamma} C_{\gamma},$$

le courant d'intégration $[C]$ sur le cycle C est par définition le (p, p) -courant fermé¹¹ (non plus positif, mais toujours à coefficients mesures) défini par

$$\langle [C], \varphi \rangle := \sum_{\gamma} m_{\gamma} [C_{\gamma}].$$

Notons ici que si A est un sous-ensemble analytique de X , le courant $[C] \cdot \mathbf{1}_A$ est exactement le courant

$$[C] \cdot \mathbf{1}_A = \sum_{\{\gamma; C_{\gamma} \subset A\}} m_{\gamma} [C_{\gamma}],$$

tandis que

$$[C] \cdot \mathbf{1}_{X \setminus A} = \sum_{\{\gamma; C_{\gamma} \not\subset A\}} m_{\gamma} [C_{\gamma}].$$

Remarquons au passage que cette opération de « scindage » n'est pas si simple à réaliser du point de vue algébrique ! Si C est un cycle effectif dont $\mathcal{I}(C)$ désigne le faisceau cohérent d'idéaux associé (suivant (1.27)) et si \mathcal{A} est un faisceau cohérent d'idéaux tel que le faisceau quotient $\mathcal{O}_X/\mathcal{A}$ ait A pour support, le faisceau cohérent $\mathcal{I}(C^{X \setminus A})$ attaché au cycle

$$C^{X \setminus A} := \sum_{\{\gamma; C_{\gamma} \not\subset A\}} m_{\gamma} C_{\gamma}$$

s'obtient comme

$$(2.17) \quad \mathcal{I}(C^{X \setminus A}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [\mathcal{I}(C) : \mathcal{A}^k],$$

où $[(\mathcal{I}(C))_z : \mathcal{A}_z^k]$ désigne, pour chaque z dans X , l'idéal de $\mathcal{O}_{X,z}$ (dit *transporteur* de \mathcal{A}_z^k dans $(\mathcal{I}(C))_z$) constitué des éléments $h \in \mathcal{O}_{X,z}$ tels que $h\mathcal{A}_z^k \subset (\mathcal{I}(C))_z$. Il s'agit ici, du point de vue algébrique, de la notion importante de *gap sheaf* (voir e.g. [Mass], chapitre 1).

REMARQUE 2.22. La définition 2.21 s'étendrait naturellement au cadre où X est remplacé par un espace analytique complexe réduit. On peut en effet se ramener à supposer X irréductible et de dimension n . Localement (au voisinage d'un point y de X), on peut toujours considérer X comme un sous-ensemble analytique A de dimension n d'un ouvert V de \mathbb{C}^{n_y} (voir la définition 1.47). Si Y est un sous-ensemble analytique irréductible de dimension $n-p$ de X et $y \in Y$, et si (U, τ) est une carte locale au voisinage de y , le sous-ensemble $\tau(Y \cap U)$ est un sous-ensemble analytique de A , donc un sous-ensemble analytique de l'ouvert V de \mathbb{C}^{n_y} . On peut donc définir dans l'ouvert V le courant d'intégration sur le sous-ensemble analytique $\tau(Y \cap U)$ (qui est un sous-ensemble analytique d'un ouvert de \mathbb{C}^{n_y} de dimension précisément $n-p$). Une $(n-p, n-p)$ -forme différentielle sur X dans l'ouvert de carte U se lit (par définition) dans la carte comme un élément du quotient de l'espace des $(n-p, n-p)$ -formes définies au voisinage de A dans V par le sous-espace des $(n-p, n-p)$ -formes définies au voisinage de A dans V et identiquement nulles sur la variété analytique complexe A_{reg} (il faudrait en toute rigueur parler ici de germe de forme différentielle sur A). Le courant d'intégration sur $\tau(Y \cap U) \subset A$ définit bien ainsi un élément du dual de l'espace des $(n-p, n-p)$ -formes sur X à support

¹¹Même ici ∂ et $\bar{\partial}$ -fermé du fait que les coefficients de $i^{(n-p)^2} T$ vérifient $T^{J,K} = \overline{T^{K,J}}$ (voir la remarque 2.8).

compact dans U . C'est, en un sens qu'il est aisé de préciser, un courant positif fermé sur X . Dans la suite du cours, on ne considèrera que le cadre des variétés analytiques complexes, ce qui revient à supposer tout espace analytique réduit sur lequel nous travaillerons comme étant toujours un sous-ensemble analytique A d'une variété analytique complexe.

Le courant d'intégration joue un rôle important comme « brique de base » parmi les courants positifs fermés. Ceci sera approfondi dans la section ultérieure 2.4 avec l'énoncé de l'important *théorème de stratification* de Y.T. Siu ([Siu]) que nous commenterons et exploiterons. À ce point du cours, nous pouvons énoncer déjà pour se convaincre de ce fait un premier résultat allant dans cette direction. Avant de l'énoncer, remarquons (c'est un théorème due à Thie) que le nombre de Lelong du courant d'intégration $[A]$ sur un sous-ensemble analytique fermé irréductible A s'exprime comme le nombre μ de « feuillets » du revêtement dans la présentation de Noether du sous-ensemble analytique fermé A donnée dans la section 1.4.4 (proposition 1.6), car c'est précisément ce nombre de feuillets que permet d'approcher dans ce cas ($T = [A]$) la limite des quotients (2.16). Le nombre de Lelong $\nu_{z_0}([A])$ est donc toujours un entier strictement positif, égal, lorsque $A = \{f = 0\}$ avec f irréductible dans \mathcal{O}_{X, z_0} , à la *multiplicité* $\mu_{z_0}(f)$, i.e. à la valuation en $\zeta = 0$ de $\zeta \mapsto f(z_0 + \zeta)$.

Si T est un (p, p) courant positif fermé sur X et A un sous-ensemble analytique de X , on peut poser

$$(2.18) \quad \nu_A(T) := \inf\{\nu_a(T); a \in A\}.$$

La proposition suivante nous sera utile lorsque nous étudierons le courant d'intégration et ses approximations (section 2.3.2).

PROPOSITION 2.2. *Soit T un (p, p) -courant positif fermé et A un sous-ensemble analytique irréductible de dimension $n - p$. On a l'égalité*

$$(2.19) \quad T \cdot \mathbf{1}_A = \nu_A(T)[A]$$

et par conséquent¹² l'inégalité $T \geq \nu_A(T)[A]$. En particulier, si le support de T est une ensemble analytique de dimension pure $n - p$, de composantes irréductibles les A_γ , on a

$$(2.20) \quad T = \sum_{\gamma} \nu_{A_\gamma}(T) [A_\gamma].$$

DÉMONSTRATION. Du fait qu'un (p, p) -courant positif fermé ne saurait porter aucune masse sur un sous-ensemble analytique de codimension strictement supérieure à p , on peut se ramener à supposer que l'on se place au voisinage d'un point régulier a_0 de A , au voisinage duquel A est un sous-espace de dimension $n - p$. On peut même supposer (ce que nous ferons, le problème étant de nature locale) que A est l'intersection de X avec un sous-espace de dimension $n - p$. Si l'on pose $\tilde{T} = T - \nu_A(T)[A]$, le fait que l'on ait $\nu_a(T) \geq \nu_A(T)$ pour tout $a \in A$ implique

$$\int_X (\tilde{T} \cdot \mathbf{1}_{B(a,r)}) \wedge (dd^c |z|^2)^{n-p} \geq 0$$

¹²L'opération consistant à multiplier un courant positif fermé par $\mathbf{1}_A$, où A est un sous-ensemble analytique, a été introduite à la remarque 2.17; le courant ainsi obtenu reste positif fermé d'après le théorème 2.16.

pour r suffisamment petit (tel que $B(a, r) \subset X$ pour tout $a \in A$). En intégrant ceci contre une fonction continue positive f à support compact dans A arbitraire, il vient

$$(2.21) \quad \int_X g_r \tilde{T} \wedge (dd^c |z|^2)^{n-p} \geq 0$$

avec

$$g_r : z \mapsto \int_{A \cap B(z, r)} f(a) d\lambda_A(a),$$

où $d\lambda_A$ désigne la mesure de Lebesgue ($2(n-p)$ -dimensionnelle) sur A . La fonction g_r est continue sur \mathbb{C}^n et, lorsque r tend vers 0,

$$z \mapsto \frac{g_r(z)}{\pi^{n-p} r^{2(n-p)} / (n-p)!}$$

tend vers f sur A , vers 0 sur $X \setminus A$; le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure donc, en passant à la limite lorsque r tend vers 0 dans (2.21), que

$$\int_X (f \cdot \tilde{T} \cdot \mathbf{1}_A) \wedge (dd^c |z|^2)^{n-p} \geq 0.$$

Ceci étant vrai pour toute fonction f continue positive et à support compact (sur A), on en déduit la positivité du courant $(\tilde{T} \cdot \mathbf{1}_A) \wedge (dd^c |z|^2)^{n-p}$. En jouant avec divers changements (génériques) de coordonnées, on constate en fait que $\tilde{T} \cdot \mathbf{1}_A$ est un courant positif. On a donc $T \cdot \mathbf{1}_A \geq \nu_A(T)[A]$. Or le courant $T \cdot \mathbf{1}_A$ est positif fermé, et s'écrit donc $\kappa[A]$, où κ est une constante positive ou nulle. On a $\kappa \geq \nu_A(T)$ et, comme $T \geq T \cdot \mathbf{1}_A = \kappa[A]$, on a également $\nu_A(T) \geq \kappa$. D'où l'égalité $\nu_A(T) = \kappa$. La proposition est ainsi démontrée. \square

2.3.2. Approximations du courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique. Un sous-ensemble analytique A d'une variété analytique complexe se présente en général donné par le jeu d'équations qui le définissent localement. Il s'agit là de la présentation « algébrique », et non en fait purement « géométrique ». Il est par conséquent important de pouvoir exprimer le courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique A , lorsque $A = Y$ est donné comme le lieu des zéros d'une section holomorphe s d'un fibré holomorphe de rang m , $E \rightarrow X$, ce que nous supposons ici.

Nous supposons cependant plus, à savoir que nous disposons d'une information de nature algébrique liée à la section s et non seulement au lieu géométrique des zéros de s : à s en effet, nous savons attacher, comme cela a été fait dans l'exemple 2.13, un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{J}[s] \subset \mathcal{O}_X$, tel que (entre autres propriétés) Y soit le support de $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}[s]$. Nous munirons également le fibré $E \rightarrow X$ équipé d'une métrique hermitienne $|\cdot|$.

Au dessus de l'ouvert $X \setminus Y$, nous disposons dans ce cas à la fois :

- du fibré restreint $E_{X \setminus Y} \rightarrow X \setminus Y$ (équipé de la structure hermitienne induite par la structure hermitienne $|\cdot|$);
- du fibré en droites $L_s \rightarrow X \setminus Y$, dont la fibre au dessus de $z \in X \setminus Y$ est la droite complexe de E_z engendrée par $s(z)$; ce fibré en droites $L_s \rightarrow X \setminus Y$ hérite aussi d'une structure hermitienne induite par la structure $|\cdot|$, ainsi d'ailleurs que le fibré quotient

$$\frac{E_{|X \setminus Y}}{L_s} \longrightarrow X \setminus Y.$$

On note

$$C\left(E_{|X \setminus Y/L_s, | |}\right) = \sum_{k \geq 0} c_k \left(E_{|X \setminus Y/L_s, | |}\right)$$

la forme totale de Chern (voir la définition 1.22) du fibré quotient

$$\frac{E_{|X \setminus Y}}{L_s} \longrightarrow X \setminus Y$$

pour la connexion de Chern induite par la structure hermitienne $| |$; il s'agit d'une forme différentielle de classe C^∞ sur l'ouvert $X \setminus Y$. De fait, cette forme de Chern $C\left(E_{|X \setminus Y/L_s, | |}\right)$ se prolonge¹³ à tout X en une forme différentielle à coefficients localement intégrables sur X , fermée sur X , et que l'on dénote $C\left(E_{|X \setminus Y/L_s, | |}\right)$. De plus, on a le résultat suivant, initialement obtenu en 1970 par J.R. King ([**King**, **Meo2**, **And3**]).

THEOREME 2.23. *Soit s une section holomorphe d'un fibré hermitien holomorphe $(E \rightarrow X, | |)$ de rang m au dessus d'une variété analytique complexe X . Soit $\mathcal{J}[s]$ le \mathcal{O}_X faisceau cohérent d'idéaux attaché à s comme précisé dans l'exemple 2.13, et $C(\mathcal{J}[s])$ le cycle associé à $\mathcal{J}[s]$ par la proposition 1.5. Si p désigne la codimension du support de $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}[s]$ (c'est-à-dire la codimension du sous-ensemble analytique $Y = V(s)$ défini comme le lieu des zéros de la section s), la fonction*

$$(2.22) \quad \lambda \in \{\operatorname{Re} \lambda \gg 0\} \longmapsto \left(\frac{1}{2i\pi}\right) \bar{\partial}|s|^{2\lambda} \wedge \partial \log |s|^2 \wedge c_{p-1}\left(E_{|X \setminus Y/L_s, | |}\right) \in \mathcal{D}'^{p,p}(X)$$

se prolonge en une fonction méromorphe à tout le plan complexe, holomorphe au voisinage de l'origine, et dont la valeur à l'origine est exactement le courant d'intégration $[C(\mathcal{J}[s])_{n-p}]$ sur le cycle $C(\mathcal{J}[s])_{n-p}$ correspondant à la composante de dimension $n - p$ du cycle $C(\mathcal{J}[s])$. De plus, si φ est une $(n - p, n - p)$ forme test, on a

$$(2.23) \quad \langle [C(\mathcal{J}[s])_{n-p}], \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{\epsilon p}{2i\pi} \int_X \frac{\bar{\partial}|s|^{2\lambda} \wedge \partial |s|^2}{|s|^2(|s|^2 + \epsilon)^{p+1}} \wedge c_{p-1}\left(E_{|X \setminus Y/L_s, | |}\right) \wedge \varphi \right).$$

DÉMONSTRATION. Nous ne donnerons ici pour simplifier une preuve de ce résultat que dans le cas où le fibré $E \rightarrow X$ est un fibré trivial, la métrique sur \mathbb{C}^n étant la métrique usuelle; dans ce cas particulier, il est immédiat de constater que

$$(dd^c)^{p-1}[\log |s|^2] = c_{p-1}\left(E_{|X \setminus Y/L_s, | |}\right)$$

dans $X \setminus Y$. Pour la preuve dans le cas général, on renvoie à [**And3**]. Notons que c'est à cette situation que l'on peut se ramener en « redressant » le fibré $E \rightarrow X$ au dessus d'un ouvert U de X dans lequel on dispose d'un repère¹⁴. On suppose ici que l'on dispose d'un repère orthonormé holomorphe au dessus de la variété analytique complexe X tout entière. Dans ce cas, la fonction (2.22) s'exprime comme la fonction

$$(2.24) \quad \lambda \in \{\operatorname{Re} \lambda \gg 0\} \longmapsto \left(\frac{1}{2i\pi}\right) \bar{\partial}|s|^{2\lambda} \wedge \partial \log |s|^2 \wedge dd^c(\log |s|^2)^{p-1},$$

¹³La preuve de ce fait est en fait incluse dans la démonstration du théorème 2.23 ci-dessous.

¹⁴Certes holomorphe, mais évidemment, si c'est le cas, non orthonormé!

où $|s|^2$ désigne la somme des carrés des modules des coordonnées de la section s , exprimée dans ce repère orthonormé. Nous pouvons donc reprendre ici les calculs conduits dans l'exemple 2.13, ce qui nous conduit, lorsque $k = p$, à l'existence du prolongement méromorphe de l'application (2.22) et au fait que ce prolongement est bien holomorphe en $\lambda = 0$ et de valeur en $\lambda = 0$ (voir (2.5)) un (p, p) courant positif fermé de support l'ensemble des zéros de la section s , c'est-à-dire un sous-ensemble analytique de dimension $n - p$. D'après la proposition 2.2, ce courant T de type (p, p) est nécessairement un courant du type

$$\sum_{\gamma} \mu_{\gamma} [C(\mathcal{J}[s])_{n-p, \gamma}],$$

où les nombres μ_{γ} sont des nombres réels positifs et les $C(\mathcal{J}[s])_{n-p, \gamma}$ les composantes irréductibles de dimension exactement $n - p$ de l'ensemble des zéros de la section s . Comme μ_{γ} est en fait égal au minimum des nombres de Lelong $\nu_a(T)$ pour a dans le sous-ensemble analytique irréductible $C(\mathcal{J}[s])_{n-p, \gamma}$ et que l'on peut se restreindre à prendre des points réguliers, on vérifie aisément (en considérant par exemple l'éclatement normalisé) que le coefficient μ_{γ} coïncide avec le coefficient entier dévolu à cette composante dans le cycle $C(\mathcal{J}[s])_{n-p}$. On donnera d'ailleurs plus loin (section 2.3.4) une autre interprétation de ce coefficient comme *multiplicité de Hilbert-Samuel* du faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{J}[s]$ au point générique (en particulier régulier) de la composante $(C[\mathcal{J}[s]])_{n-p, \gamma}$.

On admettra ici le résultat de l'approximation (2.23) (voir par exemple [Meo2]). Si l'on raisonne localement, il s'agit ici de l'utilisation d'un autre procédé taubérien que celui qu'opère la transformation de Mellin pour récupérer la valeur en $\eta = 0$ de la fonction (à valeurs dans $\mathcal{D}^{p,p}(X)$)

$$\eta \mapsto I_{\eta}(\cdot) := \frac{1}{2i\pi\eta} \int_{\|s\|^2=\eta} \partial |s|^2 \wedge (dd^c \log |s|^2)^{p-1} \wedge (\cdot).$$

□

REMARQUE 2.24. Lorsque le fibré est trivial, on peut remplacer

$$c_{p-1} \left(E_{|X \setminus Y / L_s, |} \right)$$

par $(dd^c[\log |s|^2])^{p-1}$. L'intérêt que l'on a cependant à adopter l'approche ci-dessus est de mettre en évidence la « robustesse » de l'objet ainsi défini, à savoir le cycle $C(\mathcal{J}[s])_{n-p}$. Cette « robustesse » rendra possible la factorisation (envisagée de manière géométrique globale) du courant d'intégration $[C(\mathcal{J}[s])_{n-p}]$ au travers du *courant résiduel* $R_{E, |} [s]$ (comme nous le verrons à la proposition 3.54). Le second intérêt concerne encore une fois les questions de positivité : si $(E^* \rightarrow X, |^*)$ est un fibré *semi-négatif au sens de Nakano* (on introduira ce concept important de *semi-négativité pour les fibrés holomorphes hermitiens* au chapitre 3, section 3.6, dans la définition 3.27), alors toutes les formes de Chern $c_p(E, |)$, $p = 0, 1, \dots$, sont positives, et il en est de même pour toutes les formes de Chern du fibré $E_{|X \setminus Y / L_s} \rightarrow X \setminus Y$, lui aussi de dual semi-négatif au sens de Nakano, du fait que l'on dispose de la suite exacte de fibrés hermitiens holomorphes au dessus de $X \setminus Y$:

$$0 \longrightarrow L_s \longrightarrow E_{|X \setminus Y} \longrightarrow \frac{E_{|X \setminus Y}}{L_s} \longrightarrow 0,$$

donc aussi de la suite exacte courte duale :

$$0 \longrightarrow \left(\frac{E|_{X \setminus Y}}{L_s} \right)^* \longrightarrow (E|_{X \setminus Y})^* \longrightarrow L_s^* \longrightarrow 0.$$

La semi-négativité au sens de Nakano de $(E|_{X \setminus Y})^* \rightarrow X \setminus Y$ implique en effet celle du fibré $(E|_{X \setminus Y}/L_s)^* \rightarrow X \setminus Y$, voir pour cela les relations de Chern (3.54), précisées au chapitre 3, entre les tenseurs de courbure de Chern des divers fibrés impliqués dans une suite exacte courte de fibrés hermitiens holomorphes, équipés de connexions de Chern construites en cohérence avec une métrique sur $E \rightarrow X$. Cette remarque prendra surtout son sens lorsque nous reprendrons cet exemple ultérieurement (voir l'exemple 2.35 plus loin dans ce cours), lorsqu'il s'agira d'approcher le courant d'intégration sur les cycles $C(\mathcal{J}[s])_{n-k}$, $k > p$.

REMARQUE 2.25. Le procédé d'approximation (2.23) n'est pas sans rappeler les procédés utilisés en mathématiques de l'ingénierie dans les questions relatives au *filtrage*, procédés en relation directe avec la *méthode des moindres carrés*. Retenons par exemple la méthode dite du *pseudofiltrage de Wiener* : si μ_1, \dots, μ_m sont m distributions à support compact dans \mathbb{R}^n , de transformées de Fourier $\widehat{\mu}_j : z \mapsto \langle \mu_j, e^{-i(z, \cdot)} \rangle$, $j = 1, \dots, m$, figurant des *boîtes noires* (ou « appareils » aux paramètres figés temporellement) et si

$$\mu_1 * E \simeq S_1, \dots, \mu_m * E \simeq S_m$$

sont les sorties approchées (aux erreurs de mesure près) des réponses des divers appareils à une entrée *a priori* inconnue E , la formule

$$\widetilde{E}_\epsilon(\omega) = \frac{\sum_{j=1}^m \widehat{\mu}_j(\omega) \overline{S_j(\omega)}}{\left(\sum_{j=1}^m |\widehat{\mu}_j(\omega)|^2 \right) + \epsilon},$$

($\epsilon > 0$ choisi assez petit figurant un rapport *bruit/signal*) est fréquemment utilisée pour la restitution approchée du spectre de l'entrée inconnue E . Ceci est basé sur la théorie de N. Wiener.

2.3.3. Propriété d'holonomie et conséquences. Une conséquence indirecte (mais importante) de la proposition 2.23 est un résultat relevé par J.E. Björk [Bj3] concernant les « *coefficients distributions* » (en l'occurrence ici mesures positives) du courant d'intégration sur un ensemble analytique : il s'agit d'une propriété d'*holonomie* que nous nous contenterons de mentionner ici sans entrer dans la théorie de $\mathcal{D}(X)$ -modules dont cette importante notion est issue (on renvoie pour cela à [Bj2]). Il s'agit d'un résultat local très utile et que l'on retrouvera plus loin pour les courants résiduels (section 2.5.2).

PROPOSITION 2.3. *Soit A un sous-ensemble analytique irréductible de codimension p d'un ouvert U de \mathbb{C}^n et τ_A une des mesures coefficients du coefficient d'intégration sur l'ensemble analytique A . Soit (f_1, \dots, f_l) un l -uplet de fonctions holomorphes dans U , non toutes identiquement nulles sur le support de τ_A , et $|f|^2 := |f_1|^2 + \dots + |f_l|^2$. Pour tout $z \in U$, il existe une équation fonctionnelle formelle (dite de Bernstein-Sato)*

$$(2.25) \quad b_z(\lambda)[|f|^{2\lambda} \otimes \tau_A] = \mathcal{Q}_z(\lambda, \zeta, \bar{\zeta}, \partial/\partial\zeta, \partial/\partial\bar{\zeta})[|f|^{2(\lambda+1)} \otimes \tau_A],$$

où b_z désigne un polynôme à racines toutes rationnelles et strictement négatives (dit polynôme de Bernstein-Sato lorsqu'il est choisi comme minimal) et \mathcal{Q}_z un

germe d'opérateur différentiel à coefficients analytiques dépendant polynomialement du paramètre λ .

DÉMONSTRATION. Tout repose sur l'existence d'une équation fonctionnelle (au « voisinage » de chaque point z de U) à comprendre au sens distributions :

$$(2.26) \quad \beta_z(\lambda, \mu) [|f|^{2\lambda} |s|^{2\mu}] = \mathfrak{Q}_z(\lambda, \mu, \zeta, \bar{\zeta}, \partial/\partial\zeta, \partial/\partial\bar{\zeta}) [|f|^{2(\lambda+1)} |s|^{2\mu}],$$

où β_z est un produit de facteurs affines à coefficients entiers strictement positifs et $s = (s_1, \dots, s_m)$ désignent des fonctions holomorphes au voisinage de z et dont les germes en z engendrent $\mathcal{I}_{A,z}$, $|s|^2 := |s_1|^2 + \dots + |s_m|^2$ (seuls les points $z \in A$ sont évidemment à considérer ici, les autres ne posant aucun problème pour ce qui est de l'obtention d'une relation de la forme (2.26)). L'existence d'une telle relation (dite de Bernstein-Sato) est une conséquence des résultats combinés de [Sab, Gyo]; elle relève de la théorie des \mathcal{D} -modules (on se reportera par exemple aux ouvrages [Bj1, Bj2] pour des références générales et une initiation à cette théorie). On examine ensuite pour $\operatorname{Re} \lambda$ et $\operatorname{Re} \mu$ grands, l'expression :

$$\beta_z(\lambda, \mu) |f|^{2\lambda} \bar{\partial} |s|^{2\mu} \wedge \partial \log |s|^2 \wedge (dd^c \log |s|^2)^{p-1}.$$

En suivant son prolongement analytique jusqu'à $\mu = 0$, on trouve (d'après la proposition 2.23) exactement $2i\pi$ fois le courant d'intégration sur A (il n'y a pas ici de multiplicités à prendre en compte : A est irréductible et s_z est un système de générateurs pour $\mathcal{I}_{A,z}$). Soit $\tau_{A,\mu}$ l'une des distributions coefficients (ce sont en fait des fonctions car $\operatorname{Re} \mu$ est supposé très grand) de

$$\frac{1}{2i\pi} \bar{\partial} |s|^{2\mu} \wedge \partial \log |s|^2 \wedge (dd^c \log |s|^2)^{p-1}.$$

Lorsque l'on persiste à « geler » λ de partie réelle très grande et que l'on suit le prolongement analytique (au sens des fonctions à valeurs distributions) jusqu'à $\mu = 0$ de

$$\mu \mapsto \beta_z(\lambda, \mu) |f|^{2\lambda} \tau_{A,\mu}$$

(considérée comme application à valeurs distributions), on obtient la distribution $\beta_z(\lambda, 0) |f|^{2\lambda} \tau_{A,0}$, $\tau_{A,0} = \tau_A$ étant la distribution coefficient correspondante du courant d'intégration $[A]$. Mais l'on avait, du fait de l'équation fonctionnelle (2.26), toujours pour $\operatorname{Re} \lambda$ et $\operatorname{Re} \mu$ grands,

$$\beta_z(\lambda, \mu) |f|^{2\lambda} \tau_{A,\mu} = \tau_{A,\lambda,\mu},$$

où $\tau_{A,\lambda,\mu}$ est la distribution qui à une fonction test φ de $\mathcal{D}(U)$ associe

$$\left\langle |f|^{2(\lambda+1)} \tau_{A,\mu}, \mathfrak{Q}_z(\lambda, \mu, \zeta, \bar{\zeta}, -\partial/\partial\zeta, -\partial/\partial\bar{\zeta})[\varphi] \right\rangle.$$

Gelant à nouveau λ de partie réelle très grande et suivant le prolongement analytique jusqu'à $\mu = 0$, nous en déduisons l'égalité au sens distributions

$$\beta_z(\lambda, 0) |f|^{2\lambda} \tau_A = \tau_{A,\lambda,0} = |f|^{2(\lambda+1)} \mathfrak{Q}_z(\lambda, 0, \zeta, \bar{\zeta}, \partial/\partial\zeta, \partial/\partial\bar{\zeta})[\tau_A].$$

Ceci est l'équation fonctionnelle voulue ($b_z = \beta_z(\cdot, 0)$, $\mathfrak{Q}_z := \mathfrak{Q}_{|\mu=0}$). Elle autorisera le prolongement analytique de $\lambda \mapsto |f|^{2\lambda} \otimes \tau_A$ au sens des fonctions à valeurs courants. \square

REMARQUE 2.26. Si $l = 1$, on dispose même à la place de (2.25) d'une identité formelle « holomorphe »

$$(2.27) \quad b_z(\lambda) [f_1^\lambda \otimes \tau_A] = \mathfrak{Q}_z(\lambda, \zeta, \partial/\partial\zeta) [f_1^{\lambda+1} \otimes \tau_A],$$

encore plus commode à manier pour finaliser des intégrations par parties (c'est par exemple cette identité que l'on exploite dans la remarque (2.28) un peu plus loin).

Comme conséquence de cette proposition 2.3, relevons le résultat suivant : si $[A]$ est le courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique irréductible A de X et si W est un sous-ensemble analytique de A de dimension strictement inférieure à la dimension de A , on peut définir, si s est une section d'un fibré hermitien $E \rightarrow X$ tel que $V(s) = W$, les courants

$$\begin{aligned} 1_W \cdot [A] &= \left[(1 - |s|^{2\lambda}) [A] \right]_{|\lambda=0} \\ 1_{X \setminus W} \cdot [A] &= \left[|s|^{2\lambda} [A] \right]_{|\lambda=0}. \end{aligned}$$

On remarque que $1_W \cdot [A]$ est toujours le courant nul, ce que l'on traduit en disant que le courant d'intégration $[A]$ sur un sous-ensemble analytique irréductible A possède la *propriété d'extension standard* (SEP) : cette propriété rend simplement compte du fait (ici évident) que ce courant ne « charge » (au sens de la répartition de sa masse) aucun sous-ensemble analytique propre de son support¹⁵ (par exemple le sous-ensemble A_{sing}) ; ou encore il est *extension standard* de sa restriction depuis tout ouvert $X \setminus W$, ce lorsque W est un sous-ensemble analytique propre de ce même support $\text{Supp } A$.

Par extension, nous donnerons la définition suivante (que nous serons amenés à utiliser plus loin dans l'exemple 2.35).

DÉFINITION 2.27. Un (k, k) courant d'ordre à coefficients mesures (non nécessairement positif fermé) sur une variété analytique complexe X de dimension n est dit d'*extension standard* (ou encore possède la propriété SEP) relativement à un sous-ensemble analytique A de X si et seulement si il ne charge aucun sous-ensemble analytique propre de A .

La propriété d'holonomie des distributions coefficients du courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique (proposition 2.3) permet d'étendre le résultat suivant.

PROPOSITION 2.4. *Soit X une variété analytique complexe de dimension n , f un élément de $\mathcal{M}_X(X)$, de lieu polaire inclus dans l'hypersurface H . La fonction holomorphe $f|_{X \setminus H} \in \mathcal{O}_X(X \setminus H)$ admet un prolongement distribution à X tout entier. Réciproquement, si H est une hypersurface d'une variété analytique complexe de dimension n , et f un élément de $\mathcal{O}_X(X \setminus H)$ admettant un prolongement distribution à X tout entier, f se prolonge en une section globale sur X du faisceau \mathcal{M}_X .*

DÉMONSTRATION. Le résultat est clairement local et l'on peut sans difficulté se ramener au cas où U est un domaine de \mathbb{C}^n et où H est l'hypersurface $\{h = 0\}$, où h est holomorphe non identiquement nulle dans U . Au voisinage de tout point z de U , il existe une relation formelle

$$b_z(\lambda) \otimes h_z^\lambda = \mathcal{Q}_z(\lambda, z, \partial/\partial z)[h_z^{\lambda+1}],$$

où b_z est un polynôme à racines rationnelles strictement négatives. Il s'agit ici d'un résultat majeur de M. Kashiwara [Ka], que le résultat de C. Sabbah et A. Gyoja

¹⁵Le support d'un courant est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel l'action de ce courant est nulle.

[**Sab, Gyo**] mentionné dans la preuve de la proposition 2.3 permettait d'étendre au contexte où les puissances formelles f^λ d'un germe étaient remplacées par des expressions formelles monoidales $f_1^{\lambda_1} \dots f_m^{\lambda_m}$. Ce résultat permet d'opérer comme suit (après avoir introduit un paramètre complexe λ de partie réelle arbitrairement grande) des intégrations par parties successives, lorsque g est holomorphe dans U et que $\varphi \in \mathcal{D}(U_z)$, où U_z est un voisinage suffisamment petit de z :

$$\begin{aligned} \int_{U_z} |h|^{2\lambda} \frac{g}{h} \varphi d\bar{\zeta} \wedge d\zeta &= \int_{U_z} h^{\lambda-1} \bar{h}^{-\lambda} g \varphi d\bar{\zeta} \wedge d\zeta \\ &= \frac{1}{b_z(\lambda)} \int_{U_z} h^{\lambda-1} \bar{h}^{\lambda+1} \overline{\mathcal{Q}_z(\lambda, \bar{\zeta}, -\partial/\partial\bar{\zeta})}[\varphi] d\bar{\zeta} \wedge d\zeta \\ &= \frac{1}{b_z(\lambda)} \int_{U_z} |h(\zeta)|^{2\lambda} \frac{\overline{h(\zeta)g(\zeta)}}{h(\zeta)} \overline{\mathcal{Q}_z(\lambda, \bar{\zeta}, -\partial/\partial\bar{\zeta})}[\varphi] d\bar{\zeta} \wedge d\zeta. \end{aligned}$$

On parvient ainsi à l'expression naturelle du prolongement distribution de $f = g/h$ dans U_z :

$$\varphi \in \mathcal{D}(U_z) \mapsto \frac{1}{b_z(0)} \int_{U_z} \frac{\overline{h(\zeta)g(\zeta)}}{h(\zeta)} \overline{\mathcal{Q}_z(\lambda, \bar{\zeta}, -\partial/\partial\bar{\zeta})}[\varphi] d\bar{\zeta} \wedge d\zeta.$$

L'assertion réciproque repose sur un argument qui a déjà été développé en note au chapitre 1 (voir la note en bas de page ⁽³³⁾ dans la section 1.4.5, à propos du théorème de prolongement de Riemann) ; c'est une conséquence de l'*hypoellipticité* de l'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}$ agissant sur les $(0, 0)$ -courants. \square

REMARQUE 2.28. Si A est un sous-ensemble analytique irréductible de X de codimension p , et ω une $(k, 0)$ -forme différentielle méromorphe sur A ($k \leq n - p$), holomorphe sur $A \setminus H_A$, où H_A est une hypersurface de A contenant A_{sing} , le $(p + k, p)$ courant $(\omega \wedge [A])|_{X \setminus H_A}$ ($\bar{\partial}$ -fermé dans $X \setminus H_A$) se prolonge de manière standard (i.e., si $H_A := \{h_A = 0\}$, comme limite faible lorsque ϵ tend vers 0^+ de $(\chi_{\{|h_A| \geq \epsilon\}} \omega \wedge [A])_{\epsilon > 0}$) en un $(p + k, p)$ -courant $\omega \wedge [A]$ sur X tout entière. Cela résulte de la propriété d'*holonomie* des coefficients distributions τ_A du courant d'intégration sur A et d'un argument similaire à celui utilisé dans la preuve de la proposition 2.4. Lorsque $\bar{\partial}[\omega \wedge [A]] = 0$, on dit que ω est une forme holomorphe sur A au sens de Barlet [**Ba1**]. Ici, encore, on peut formuler une assertion réciproque : si ω est une $(k, 0)$ -forme holomorphe sur $A \setminus H_A$, telle que $\omega \wedge [A]$ (défini comme un courant $\bar{\partial}$ -fermé sur l'ouvert $X \setminus H_A$) se prolonge en un courant sur X , la forme ω se prolonge en une $(k, 0)$ -forme méromorphe sur A .

2.3.4. Relation avec les multiplicités de Hilbert-Samuel. Soit X une variété analytique complexe de dimension n et \mathcal{I} un faisceau cohérent d'idéaux de \mathcal{O}_X . Si z est un point du support de \mathcal{O}/\mathcal{I} , soit $\mathfrak{m}_{\mathcal{I},z}$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,z}/\mathcal{I}_z$. Étant donné un tel point z , on peut considérer l'algèbre graduée

$$\text{Grad}_{\mathfrak{m}_{\mathcal{I},z}}(\mathcal{O}_{X,z}/\mathcal{I}_z) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{m}_{\mathcal{I},z}^k}{\mathfrak{m}_{\mathcal{I},z}^{k+1}}.$$

Supposons que le support de $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ soit de dimension pure $n - p$ au voisinage du point z ; $n - p$ est alors la *dimension de Krull* de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,z}/\mathcal{I}_z$.

DÉFINITION 2.29. La fonction de Hilbert de $(R_{\mathcal{I},z} := \mathcal{O}_{X,z}/\mathcal{I}_z, \mathfrak{m}_{\mathcal{I},z})$ est par définition la fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{N} qui à l'entier d associe $\dim_{R_{\mathcal{I},z}/\mathfrak{m}_{\mathcal{I},z}}(R_{\mathcal{I},z}/\mathfrak{m}_{\mathcal{I},z}^d)$.

Un argument aisé d'algèbre commutative (voir par exemple [Ha1], chapitre 1 ou [JP]) assure que, pour d assez grand, la fonction de Hilbert de $(R_{\mathcal{I},z}, \mathfrak{M}_{\mathcal{I},z})$ prend la même valeur en d qu'un polynôme à coefficients rationnels de degré $n - p \leq n$ (dit *polynôme de Hilbert-Samuel* de $(R_{\mathcal{I},z}, \mathfrak{M}_{\mathcal{I},z})$) :

$$\Xi \mapsto \text{HP}_{(R_{\mathcal{I},z}, \mathfrak{M}_{\mathcal{I},z})}(\Xi) = \sum_{k=0}^{n-p-1} h_k \Xi^k + \frac{\mu_z(\mathcal{I})}{(n-p)!} \Xi^{n-p},$$

où $\mu_z(\mathcal{I})$ est un entier positif, dit *multiplicité de Hilbert-Samuel* de \mathcal{I} au point z où $R_{\mathcal{I},z}$ est de dimension $n - p$. Notons que, pour $d \geq 1$,

$$\dim_{R_{\mathcal{I},z}/\mathfrak{M}_{\mathcal{I},z}}(R_{\mathcal{I},z}/\mathfrak{M}_{\mathcal{I},z}^d) = \sum_{k=0}^{d-1} \dim_{R_{\mathcal{I},z}/\mathfrak{M}_{\mathcal{I},z}}(\mathfrak{M}_{\mathcal{I},z}^k/\mathfrak{M}_{\mathcal{I},z}^{k+1}).$$

Un fait majeur concernant la multiplicité d'Hilbert-Samuel au point z du support de $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ est que, de par sa construction, elle ne dépend que de la clôture intégrale $\overline{\mathcal{I}}_z$ (voir [LeT], proposition 1.18) de \mathcal{I}_z dans $\mathcal{O}_{X,z}$, telle qu'elle a été définie en fin de chapitre 1 (définition 1.51).

Le *nombre de Lelong* $\nu_z([A])$ du courant d'intégration $[A]$ sur un sous-ensemble analytique irréductible s'interprète¹⁶ comme la *multiplicité de Hilbert-Samuel* $\mu_z(\mathcal{I}_A)$ au point z de $\mathcal{I}_{A,z}$, où \mathcal{I}_A désigne le faisceau d'idéaux attaché à l'ensemble analytique A . On résume cela en la proposition :

PROPOSITION 2.5. *Soit A un sous-ensemble analytique irréductible de dimension $n - p$ de X et $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ les générateurs de l'idéal maximal $\mathfrak{M}_{X,z}$ de $\mathcal{O}_{X,z}$ dans un voisinage U_z du point z . La fonction*

$$\lambda \in \{\text{Re } \lambda \gg 0\} \mapsto \bar{\partial}|\zeta|^{2\lambda} \wedge \frac{\partial[\log |\zeta|^2]}{2i\pi} \wedge (dd^c[\log |\zeta|^2])^{n-p-1} \wedge [A] \in \mathcal{D}'^{n,n}(U_z)$$

se prolonge en une fonction méromorphe dans \mathbb{C} , holomorphe au voisinage de l'origine, et de valeur en $\lambda = 0$

$$\left[\bar{\partial}|\zeta|^{2\lambda} \wedge \frac{\partial[\log |\zeta|^2]}{2i\pi} \wedge (dd^c[\log |\zeta|^2])^{n-p-1} \wedge [A] \right]_{\lambda=0} = \nu_z([A]) \times [z] = \mu_z(\mathcal{I}_A) \times [z].$$

DÉMONSTRATION. La raison pour laquelle on obtient le nombre de Lelong de $[A]$ au point z (interprété comme la multiplicité de Hilbert-Samuel de \mathcal{I}_A au point z) tient au fait que cette multiplicité de Hilbert-Samuel s'interprète aussi comme la multiplicité d'intersection entre $[A]$ et le sous-espace de $\{\langle \alpha_j, \zeta \rangle = 0, j = 1, \dots, n - p\}$, lorsque cette intersection est propre (i.e. que la dimension chute d'une unité chaque fois que l'on ajoute une équation d'hyperplan), ce qui est cas lorsque $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-p}$ sont des points génériques de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Or la valeur en $\lambda = 0$ de

$$\lambda \mapsto \bar{\partial}\|\zeta\|^{2\lambda} \wedge \frac{\partial \log \|\zeta\|^2}{2i\pi} \wedge (dd^c(\log \|\zeta\|^2))^{n-p-1} \wedge [A]$$

¹⁶On retrouve ici une interprétation géométrique simple (en termes de nombre de Lelong, donc de calcul de « volume » ou de « masse » d'un courant) d'un objet dont la définition algébrique repose sur une définition « asymptotique » (à savoir la notion de multiplicité d'Hilbert-Samuel). Cela rejoint ici ce qui se passait par exemple pour la notion d'*intersection complète* (définitions 1.35 et 1.36).

est le courant

$$1_A \cdot \int_{\alpha \in (\mathbb{P}^n)^{n-p}} [\langle \alpha_1, \zeta \rangle = 0] \wedge \cdots \wedge [\langle \alpha_{n-p}, \zeta \rangle = 0] d\sigma(\alpha_1) \otimes \cdots \otimes d\sigma(\alpha_{n-p}),$$

où $d\sigma$ désigne la métrique de Fubini-Study normalisée sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. En effet, on a

$$dd^c[\log |\zeta|^2] = \int_{\alpha \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})} [\langle \alpha, \zeta \rangle = 0] d\sigma(\alpha).$$

□

La notion de *multiplicité locale de Hilbert-Samuel* peut être étendue au cadre où $\mathfrak{M}_{\mathcal{I},z}$ (idéal maximal de $R_{\mathcal{I},z}$) est remplacé par un idéal (cette fois non $\mathfrak{M}_{\mathcal{I},z}$ primaire) du type

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{I},S,z} := \mathcal{I}_{S,z} \cdot R_{\mathcal{I},z}$$

où S est une sous-variété analytique complexe de X contenant le point z mais non nécessairement de dimension 0 comme l'était $\{z\}$. Si par exemple $\mathcal{I} = \mathcal{I}_A$, où A est un sous-ensemble analytique irréductible de X , les éléments de $\mathfrak{J}_{\mathcal{I},S,z} := \mathfrak{J}_{A,S,z}$ sont les germes de fonctions holomorphes sur A qui s'annulent sur la variété S . Dans ce cas, on peut encore considérer l'algèbre graduée

$$\text{Grad}_{\mathfrak{J}_{A,S,z}}(R_{\mathcal{I}_A,z}) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{J}_{A,S,z}^k}{\mathfrak{J}_{A,S,z}^{k+1}}.$$

On peut envisager maintenant (cette fois dans un second temps seulement) la graduation par rapport à $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}_A,z}$, soit :

$$\text{Grad}_{\mathfrak{M}_z} \left[\text{Grad}_{\mathfrak{J}_{A,S,z}}(R_{\mathcal{I}_A,z}) \right] = \bigoplus_{k \geq 0} \bigoplus_{l \geq 0} \frac{\mathfrak{M}_{\mathcal{I}_A,z}^k \mathfrak{J}_{A,S,z}^l + \mathfrak{J}_{A,S,z}^{l+1}}{\mathfrak{M}_{\mathcal{I}_A,z}^{k+1} \mathfrak{J}_{A,S,z}^l + \mathfrak{J}_{A,S,z}^{l+1}}$$

(voir par exemple [AchR]). Cette fois, l'argument qui a conduit à la définition du polynôme de Hilbert permet de montrer que, pour d_1, d_2 assez grands, la fonction

$$(d_1, d_2) \mapsto \sum_{k=0}^{d_1} \sum_{l=0}^{d_2} \dim_{R_{\mathcal{I}_A,z}/\mathfrak{M}_{\mathcal{I}_A,z}} \left(\frac{\mathfrak{M}_{\mathcal{I}_A,z}^k \mathfrak{J}_{A,S,z}^l + \mathfrak{J}_{A,S,z}^{l+1}}{\mathfrak{M}_{\mathcal{I}_A,z}^{k+1} \mathfrak{J}_{A,S,z}^l + \mathfrak{J}_{A,S,z}^{l+1}} \right)$$

prend la même valeur au point (d_1, d_2) qu'une fonction polynomiale se présentant sous la forme

$$\begin{aligned} (\Xi_1, \Xi_2) &\mapsto \text{HP}_{(R_{\mathcal{I}_A,z}, \mathfrak{J}_{A,S,z}, \mathfrak{M}_{\mathcal{I}_A,z})}(\Xi_1, \Xi_2) \\ &= \sum_{k+l < n-p} h_{kl} \Xi_1^k \Xi_2^l + \sum_{q=0}^{n-p} c_q(R_{\mathcal{I}_A,z}, \mathfrak{J}_{A,S,z}, \mathfrak{M}_{\mathcal{I}_A,z}) \frac{\Xi_1^q \Xi_2^{n-p-q}}{q! (n-p-q)!}. \end{aligned}$$

Les nombres $c_q(R_{\mathcal{I}_A,z}, \mathfrak{J}_{A,S,z}, \mathfrak{M}_{\mathcal{I}_A,z})$, $q = 0, \dots, n-p$ sont appelés *multiplicités de Hilbert-Samuel généralisées* et ont été introduites dans [AchM1]. Il est significatif de relever ici que, suivant la même idée de « *moyennisation* » que celle qui a conduit à l'énoncé de la proposition 2.5, les multiplicités de Hilbert-Samuel généralisées peuvent être interprétées comme des nombres de Lelong.

PROPOSITION 2.6. *Soit X une variété analytique complexe, A un sous-ensemble analytique irréductible de dimension $n-p$ de X , S une sous-variété analytique de*

dimension s de X définie dans un voisinage U_z d'un point z de $A \cap S$ par les équations $\zeta_1 = \dots = \zeta_{n-s} = 0$. Alors, pour $k = 0, \dots, \inf(n-p, n-s)$, l'application

$$\begin{aligned} \lambda \in \{\operatorname{Re} \lambda \gg 0\} &\longmapsto (1 - |\zeta|^{2\lambda})[A] \in \mathcal{D}'^{p,p}(U_z) \text{ pour } k = 0 \\ \lambda \in \{\operatorname{Re} \lambda \gg 0\} &\longmapsto \bar{\partial}|\zeta|^{2\lambda} \wedge \frac{\partial[\log|\zeta|^2]}{2i\pi} \wedge (dd^c[\log|\zeta|^2])^{k-1} \wedge [A] \\ &\in \mathcal{D}'^{p+k,p+k}(U_z) \text{ pour } k \geq 1, \end{aligned}$$

se prolonge en une fonction méromorphe dans \mathbb{C} , holomorphe au voisinage de l'origine, de valeur en $\lambda = 0$ un $(p+k, p+k)$ courant positif fermé dans U_z , courant dont le nombre de Lelong au point z est exactement $c_{n-p-k}(R_{\mathcal{I}_{A,z}}, \mathfrak{J}_{A,S,z}, \mathfrak{M}_{\mathcal{I}_{A,z}})$, où $\mathfrak{J}_{A,S,z} := \mathcal{I}_{S,z} \cdot R_{\mathcal{I}_{A,z}}$.

DÉMONSTRATION. Nous admettons ici ce résultat très récent [ASWY]. \square

REMARQUE 2.30. L'intérêt majeur de la proposition 2.6, outre qu'elle renforce le lien entre nombres de Lelong et multiplicités de Hilbert-Samuel (matérialisées toujours, notons le, asymptotiquement, ce qui ne rend pas les choses aisées) réside dans le fait que, lorsque $\mathcal{I} = \mathcal{I}_A$ ($R_{\mathcal{I}_{A,z}} := \mathcal{O}_{X,z}/\mathcal{I}_{A,z}$, avec A sous-ensemble analytique irréductible, le vecteur d'entiers positifs

$$(0, \dots, 0, c_{\dim_z(A \cap S)}(R_{\mathcal{I}_{A,z}}, \mathfrak{J}_{A,S,z}, \mathfrak{M}_{\mathcal{I}_{A,z}}), \dots, c_0(R_{\mathcal{I}_{A,z}}, \mathfrak{J}_{A,S,z}, \mathfrak{M}_{\mathcal{I}_{A,z}}))$$

réalisé ainsi (i.e. comme des nombres de Lelong) s'interprète comme le *multi-indice de contact* défini par P. Tworzewski dans [Tw] entre le sous-ensemble analytique irréductible A et la sous-variété S au point z (suivant la construction inspirée de l'algorithme de Stückrad-Vogel [ST] développé pour l'*intersection impropre*). Par exemple, si A est le sous-ensemble analytique irréductible de \mathbb{C}^3 défini par $yx^m - z^2 = 0$ et $S = \{y = z = 0\}$, on trouve $(0, 1, m)$ comme multi-indice de contact, le cycle intersection étant $S + m[0]$. Les nombres de Lelong rendent ainsi compte localement avec précision des *multi-indices de contact* introduits dans le cadre géométrique de l'*intersection impropre*. Ce sont donc des indicateurs précieux relativement aux aspects locaux de la théorie de l'intersection, que les supports des cycles se coupent proprement ou non.

2.4. Stratification de Siu

Les courants d'intégration constituent en quelque sorte la « brique de base » pour exprimer les courants positifs fermés. Le résultat sur lequel ceci repose est le résultat de Y.T. Siu [Siu].

THEORÈME 2.31. *Soit T un (p, p) -courant positif fermé sur une variété analytique complexe X . Les sur-ensembles de niveau*

$$E_c(T) := \{z \in X; \nu_z(T) \geq c\}, \quad c > 0,$$

sont des sous-ensembles analytiques de X de codimension au moins égale à p .

En fait, ce résultat majeur a été généralisé par J.P. Demailly en 1987 [De1] :

THEORÈME 2.32. *Soit X une variété de Stein, Y une variété analytique complexe, $u : X \times Y \rightarrow [-\infty, +\infty[$ une fonction plurisousharmonique continue et localement höldérienne en y d'exposant dans $]0, 1]$. Si T est un courant positif fermé*

sur X tel que φ soit *semi-exhaustive*¹⁷ sur le support de T , les sur-ensembles de niveau

$$E_c(T, u) := \{y \in Y ; \nu(T, u(\cdot, y)) \geq c\}, \quad c > 0,$$

sont des sous-ensembles analytiques de Y .

EXEMPLE 2.33. En prenant $Y = X$ et $u(x, y) = \log|x - y|$ (et en oubliant l'hypothèse que X est Stein, inutile dans ce cas particulier), on retrouve bien le théorème 2.31 comme cas particulier du résultat de Demailly (théorème 2.32).

DÉMONSTRATION. Pour la preuve détaillée du résultat de J.P. Demailly (donc aussi de celui de Y.T. Siu), on renvoie ici à son livre [De0], chapitre 3, paragraphe 8. La clef du résultat est le recours au théorème d'Hörmander-Bombieri-Skoda (voir le cours de P. Charpentier [Charp]) : si u est une fonction plurisousharmonique sur une variété analytique complexe Y , l'ensemble des points de Y au voisinage desquels e^{-u} n'est pas intégrable est un sous-ensemble analytique de Y (voir [De0], chapitre 8, corollaire 7.7). On reviendra sur ce résultat au chapitre 4 de ces notes de cours. \square

Le théorème 2.31 implique le résultat suivant, que l'on pourrait qualifier de *théorème de stratification* des courants positifs fermés.

THÉORÈME 2.34. Soit T un (p, p) courant positif fermé sur une variété analytique X . Le courant T s'exprime comme la limite faible

$$(2.28) \quad \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\sum_{j=1}^M \lambda_j [A_j] \right) + N,$$

où les A_j , $j \in \mathbb{N}^*$, sont des sous-ensembles analytiques irréductibles de X de dimension $n - p$, les λ_j , $j \in \mathbb{N}^*$, des nombres strictement positifs, et N est un courant positif fermé que l'on pourrait qualifier de « négligeable » car, pour tout $c > 0$, les sur-ensembles de niveau $E_c(N)$ sont de codimension strictement supérieure à p . De plus, une telle stratification (2.28) est unique. La partie $T - N$ de la décomposition est aussi appelée « partie singulière » du courant positif T .

DÉMONSTRATION. On part de la collection de toutes les composantes de codimension p des divers $E_c(T)$ pour $c \in \mathbb{Q}^+$. Pour chacune d'elles (A_j , il y en a au plus une infinité dénombrable), on note $\lambda_j = \nu_{A_j}(T)$ (voir (2.18)). Il résulte de la proposition 2.2 que, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, le courant

$$T_N := T - \sum_{j=1}^M \lambda_j [A_j] = T - \sum_{j=1}^M \nu_{A_j}(T) [A_j]$$

est positif. Comme la suite $(T_N)_{N \geq 1}$ est décroissante, elle doit converger faiblement vers un courant positif fermé N . Par construction même, N a un nombre de Lelong générique égal à 0 sur les A_j . La codimension des sur-ensembles de niveau $E_c(N)$ pour $c > 0$ ne saurait donc être égale à p . Elle doit être strictement plus grande et l'existence de la stratification (2.28) est ainsi démontrée. Si T a une telle décomposition et si $c > 0$, les composantes de dimension $n - p$ de $E_c(T)$ sont les A_j

¹⁷Pour reprendre la terminologie de la section 2.2, le fait que u soit *semi-exhaustive* sur le support de T signifie que pour tout compact K de Y , il existe $R(K)$ tel que

$$\{(x, y) \in \text{Supp } T \times K ; \varphi(x, y) \leq R(K)\}$$

soit relativement compact dans $X \times Y$.

tels que $\lambda_j \geq c$, et $\nu(T, z)$ vaut λ_j au point générique de A_j . Les A_j et les λ_j sont donc complètement déterminés par la connaissance de T . La décomposition (2.28) est bien unique. \square

EXEMPLE 2.35. Un exemple intéressant complète ici le théorème 2.23. Il prolonge aussi la démarche initiée dans l'exemple 2.13 pour définir les puissances extérieures successives de $dd^c[\log |s|^2]$, où s désigne une section holomorphe d'un fibré holomorphe hermitien $(E \rightarrow X, | \cdot |)$ de rang m au dessus d'une variété analytique complexe X de dimension n . On reprend ici les notations utilisées dans énoncé du théorème 2.23 : s est une section holomorphe d'un fibré hermitien $(E \rightarrow X, | \cdot |)$ de rang m au dessus de X et $\mathcal{J}[s]$ le faisceau cohérent d'idéaux associé (tel qu'il a été défini lors de l'étude de l'exemple 2.13). On note Y le sous-ensemble analytique où s s'annule, i.e. $Y = \text{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}[s])$ et L_s le fibré en droites défini par s au dessus de $X \setminus Y$. Pour tout $k = 1, \dots, n$, la fonction

$$(2.29) \quad \lambda \in \{\text{Re } \lambda \gg 0\} \longmapsto \left(\frac{1}{2i\pi} \right) \bar{\partial}|s|^{2\lambda} \wedge \partial[\log |s|^2] \wedge c_{k-1}(E|_{X \setminus Y}/L_s, | \cdot |) \in \mathcal{D}'^{k,k}(X)$$

se prolonge en une application méromorphe dans \mathbb{C} , holomorphe en $\lambda = 0$. La valeur de cette fonction en $\lambda = 0$ est un (k, k) -courant d'ordre 0 (à coefficients « mesures »), fermé (même ∂ et $\bar{\partial}$ -fermé), de support $Y = V(s)$. Ce courant n'est en général pas positif (du fait de la « non-platitude » de la géométrie ici impliquée), sauf dans le cas où la forme de Chern $C(E|_{X \setminus Y}/L_s, | \cdot |)$ est positive, ce qui se produit lorsque le fibré dual $(E^* \rightarrow X, | \cdot |^*)$ est semi-négatif au sens de Nakano (définition 3.27 à venir au chapitre 3, voir la remarque 3.29).

Cependant, et bien que ce courant ne soit pas en général positif, et donc que le théorème 2.34 ne s'applique *a priori* pas, on peut néanmoins parler de sa *stratification de Siu*¹⁸, et montrer que la décomposition ainsi obtenue se présente sous la forme

$$(2.30) \quad \sum_{j \geq 1} \lambda_j^k [Z_j^k] + N_k,$$

où les Z_j^k sont, parmi les images par l'éclatement normalisé $\overline{X_{\mathcal{J}[s]}} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{J}[s], N}} X$ (voir la section 1.4.6 et en particulier la proposition 1.7) des composantes irréductibles H_γ du support du diviseur exceptionnel $D_{\mathcal{J}[s]}$, celles dont la codimension est exactement k . Ces composantes Z_j^k sont appelées suivant [Fu, Fu1] *composantes distinguées* du cycle associé au faisceau cohérent $\mathcal{J}[s]$. Les nombres λ_j^k sont des nombres entiers strictement positifs qui ne dépendent que de la clôture intégrale du faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{J}[s]$. Ces nombres λ_j^k peuvent être interprétés comme des *multiplicités de Hilbert-Samuel*. D'autre part, la « partie singulière »

$$\sum_{j \geq 1} \lambda_j^k [Z_j^k]$$

est en fait la même que celle que l'on obtiendrait (suivant la même approche) en isolant la partie singulière du (k, k) -courant fermé (lui aussi à *coefficients mesures*, ∂ et $\bar{\partial}$ -fermé, mais non en général positif du fait de la « non-platitude » de la géométrie

¹⁸Nous allons expliquer un peu plus loin pourquoi.

impliquée), défini (comme dans l'exemple 2.13), comme la valeur en $\lambda = 0$ de

$$(dd^c)_\lambda(\log |s|^2)|_Y = \left(\frac{1}{2i\pi}\right) \bar{\partial}|s|^{2\lambda} \wedge \partial[\log |s|^2] \wedge (dd^c[\log |s|^2])^{k-1}.$$

On trouvera les détails de la preuve de ces assertions dans le travail en préparation [ASWY]. On se contentera juste ici d'en esquisser une brève approche lorsque le fibré $E \rightarrow X$ est trivial, et que la métrique sur chaque fibre \mathbb{C}^m est la métrique usuelle (auquel cas le problème de non-positivité ne se pose pas puisque la géométrie est dans ce cas « plate »).

On s'appuie pour cela sur les calculs conduits dans l'exemple 2.13, et l'on remarque que la stratification du courant (ici positif fermé puisque la métrique est « plate ») s'exprime en utilisant une résolution des singularités (suivie d'éclatements normalisés comme indiqué plus haut, suivant la méthode déjà mise en œuvre dans l'exemple 2.13)

$$\widetilde{X}_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]} \xrightarrow{\pi_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]}} X$$

sous la forme

$$\begin{aligned} \left[(dd^c)_\lambda(\log |s|^2)|_Y \right]_{\lambda=0} &= (\pi_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]})_* \left[[D_{\widetilde{\mathcal{J}}[s]}] \wedge (\widetilde{c}_{\widetilde{\mathcal{J}}[s],1}^*)^{k-1} \right] \\ &= (\pi_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]})_* \left[[D_{\widetilde{\mathcal{J}}[s]}^{\left[\begin{smallmatrix} \leftarrow (=k) \end{smallmatrix} \right]} \right] \wedge (\widetilde{c}_{\widetilde{\mathcal{J}}[s],1}^*)^{k-1} \right] \\ &\quad + (\pi_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]})_* \left[[D_{\widetilde{\mathcal{J}}[s]}^{\left[\begin{smallmatrix} \leftarrow (<k) \end{smallmatrix} \right]} \right] \wedge (\widetilde{c}_{\widetilde{\mathcal{J}}[s],1}^*)^{k-1} \right], \end{aligned}$$

où les composantes $H_{\widetilde{\mathcal{J}}[s], \gamma}$ du support du diviseur exceptionnel (localement à croisements normaux) sur $\widetilde{X}_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]}$ ont été « triées » pour réaliser ce scindage en :

- celles dont l'image par $\pi_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]}$ est de codimension exactement k , la somme de leurs contributions au courant obtenu étant notée

$$(\pi_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]})_* \left[[D_{\widetilde{\mathcal{J}}[s]}^{\left[\begin{smallmatrix} \leftarrow (=k) \end{smallmatrix} \right]} \right] \wedge (\widetilde{c}_{\widetilde{\mathcal{J}}[s],1}^*)^{k-1} \right];$$

- celles dont l'image par $\pi_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]}$ est de codimension strictement inférieure à k , la somme de leurs contributions au courant obtenu étant notée

$$(\pi_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]})_* \left[[D_{\widetilde{\mathcal{J}}[s]}^{\left[\begin{smallmatrix} \leftarrow (<k) \end{smallmatrix} \right]} \right] \wedge (\widetilde{c}_{\widetilde{\mathcal{J}}[s],1}^*)^{k-1} \right].$$

Il faut noter également ici que, pour des raisons de dimension, les contributions au courant obtenu des composantes $H_{\widetilde{\mathcal{J}}[s], \gamma}$ dont l'image par $\pi_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]}$ est de codimension strictement supérieure à k s'annulent (il s'agit d'un courant (k, k) à coefficients « mesures » supporté par un ensemble analytique de dimension complexe strictement inférieure à k , donc strictement inférieure à la dimension complexe $n - k$ du courant); c'est la raison pour laquelle seulement deux types de contributions sont à envisager ici.

C'est à ce niveau qu'intervient (si l'on avait travaillé dans le cas d'un fibré et d'une métrique quelconque) le fait que l'on puisse parler de *décomposition de Siu*, même si la positivité du courant est en défaut¹⁹ : un courant contribuant à la somme notée

$$(\pi_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]})_* \left[[D_{\widetilde{\mathcal{J}}[s]}^{\left[\begin{smallmatrix} \leftarrow (<k) \end{smallmatrix} \right]} \right] \wedge (\widetilde{c}_{\widetilde{\mathcal{J}}[s],1}^*)^{k-1} \right],$$

¹⁹Voici l'explication promise précédemment à propos du sens à donner à la *stratification de Siu* en l'absence (éventuelle) de positivité lorsque la géométrie n'est plus « plate ».

provenant (par exemple) de la composante $H_{\widetilde{\mathcal{J}}[s],\gamma}$ du diviseur exceptionnel $D_{\widetilde{\mathcal{J}}[s]}$, possède en effet la *propriété d'extension standard* (SEP) (définition 2.27) relativement à l'ensemble analytique $A_\gamma := \pi_{Y,\widetilde{\mathcal{J}}[s]}(H_{\widetilde{\mathcal{J}}[s],\gamma})$; ce courant (k, k) ne saurait donc, par conséquent, « charger » aucun sous-ensemble analytique propre de l'ensemble analytique A_γ (de codimension $l < k$, et qui contient son support), donc en particulier aucun sous-ensemble analytique propre de codimension k de son support; on décide alors qu'un tel courant participe à la composante « négligeable » N_k dans la décomposition de Siu (2.30) proposée; c'est ainsi d'ailleurs que s'opère le « tri » et que s'effectue la distinction entre « partie singulière » et « partie négligeable » : seuls les courants impliqués dans les contributions provenant des $H_{\widetilde{\mathcal{J}}[s],\gamma}$ dont l'image par $\pi_{Y,\widetilde{\mathcal{J}}[s]}$ est de codimension exactement k sont donc à retenir dans la « partie singulière » S_k du courant.

Il ne reste donc à étudier que les contributions correspondant aux composantes du support du diviseur exceptionnel dont l'image directe est de codimension exactement k , contributions s'additionnant pour former le courant noté de manière abrégée

$$(\pi_{Y,\widetilde{\mathcal{J}}[s]})_* \left[D_{\widetilde{\mathcal{J}}[s]}^{[-(=k)]} \wedge (\widetilde{c}_{\widetilde{\mathcal{J}}[s],1}^*)^{k-1} \right].$$

Il faut ici utiliser la propriété universelle de l'éclatement normalisé (proposition 1.7) pour voir que seules les Z_j^k (images de codimension exactement k des composantes du diviseur exceptionnel de l'éclatement normalisé $\overline{X_{\mathcal{I}[s]}} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{I}[s],N}} X$) contribuent effectivement à cette « partie singulière » S_k du courant. Les nombres λ_j^k s'interprètent comme des multiplicités d'intersection, et sont donc des entiers. Le fait qu'il s'agisse d'entiers positifs résulte de la positivité du courant dans cette situation locale « redressée », où le fibré est considéré comme trivial et équipé de la métrique standard sur \mathbb{C}^m et de la remarque suivante : si \widetilde{s} est une section d'un autre fibré hermitien $(E' \rightarrow X, | \cdot |')$ (de rang arbitraire), telle que localement l'on ait $|s| \sim |\widetilde{s}'|$, les contributions aux parties singulières des deux courants ainsi associés au faisceaux cohérents d'idéaux $\mathcal{J}[s]$ et $\mathcal{J}[\widetilde{s}]$ coïncident.

À une section s d'un fibré hermitien, nous sommes ainsi à même par ce procédé de faire correspondre un cycle analytique effectif $C_{\text{stable}}(\mathcal{J}[s])$, en ajoutant les cycles analytiques de dimension $n - k$

$$\sum_{j \geq 1} \lambda_{j,k} Z_j^k$$

ainsi obtenus²⁰. Il faut ajouter (suivant la remarque qui précède) que, si \widetilde{s} est une section d'un autre fibré hermitien $(E' \rightarrow X, | \cdot |')$ (de rang arbitraire), telle que localement l'on ait $|s| \sim |\widetilde{s}'|$, les cycles effectifs $C_{\text{stable}}(\mathcal{J}[s])$ et $C_{\text{stable}}(\mathcal{J}[\widetilde{s}])$ ainsi attachés aux sections s et \widetilde{s} *via* les faisceaux cohérents d'idéaux $\mathcal{J}[s]$ et $\mathcal{J}[\widetilde{s}]$ coïncident.

²⁰On peut se poser la question de savoir s'il s'agit ici du cycle $C(\mathcal{J}[s])$ associé à $\mathcal{J}[s]$ suivant la proposition 1.5 (par (1.28)). Clairement ici, le cycle $C_{\text{stable}}(\mathcal{J}[s])$ ne dépend que du faisceau cohérent $\widetilde{\mathcal{J}}[s]$ et non du faisceau $\mathcal{J}[s]$, comme en dépend le cycle $C(\mathcal{J}[s])$. Il faut noter toutefois que l'accès au cycle $C_{\text{stable}}(\mathcal{J}[s])$ se fait directement (et en un sens, explicitement) à partir d'une section donnée s , ce qui n'est pas le cas du cycle $C(\mathcal{J}[s])$ contenant, lui, une information algébrique plus riche, mais, par contre, d'approche non évidente en termes de la donnée de la section s .

2.5. Autour des notions géométrique et analytique de résidu

2.5.1. Cobord de Leray et résidu. La formule des résidus joue un rôle majeur en géométrie complexe²¹ et nous en rappelons ici le cadre géométrique. La théorie que l'on développe dans cette sous-section est une théorie homologique, et, par dualité, une théorie cohomologique (contrairement à celle, analytique cette fois, que nous développerons dans les sous-sections suivantes).

Étant donnée une variété analytique complexe X de dimension n , S_1, \dots, S_p , avec $p \leq n$, désignent p hypersurfaces lisses s'intersectant de manière transverse (au sens géométrique), i.e. $ds_1 \wedge \dots \wedge ds_k \neq 0$ sur $S_1 \cap \dots \cap S_k$ pour tout $k = 1, \dots, p$ (si S_k est définie localement par $\{s_k = 0\}$).

Si S_1 est une telle hypersurface, J. Leray a introduit dans [Le] un *morphisme cobord*

$$\delta_{X, S_1}^k : H_{k-1}(S_1, \mathbb{C}) \longmapsto H_k(X \setminus S_1, \mathbb{C}), \quad k = 1, \dots, n,$$

où les $H_k(\cdot, \mathbb{C})$ désignent les groupes d'homologie à coefficients complexes. La règle présidant à la construction de ce morphisme est la suivante : si $\dot{\tau}$ désigne un élément de $H_{k-1}(S_1, \mathbb{C})$, un k -cycle γ de support dans $X \setminus S_1$ est un représentant de $\delta_{X, S_1}^k(\dot{\tau})$ si et seulement si :

- il existe un représentant τ de $\dot{\tau}$;
- il existe un $(k+1)$ -simplexe σ de X , de support rétractable sur S_1 , dont le support intersecte S_1 précisément le long du support de τ , ce transversalement ;
- le cycle γ est homologue au bord de σ (dans l'homologie entre éléments de $H_k(X \setminus S_1, \mathbb{C})$).

EXEMPLE 2.36. Si $X = \mathbb{C}$ et $S_1 = \{0\}$, un représentant de $\delta_{\mathbb{C}, S_1}^1(\lambda \{0\})$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) est le cycle $\lambda\gamma$, où $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$ pour $t \in [0, 1]$.

Ces *morphismes cobord* peuvent être itérés : la configuration géométrique fait de $S_1 \cap \dots \cap S_p$ une hypersurface lisse de $S_1 \cap \dots \cap S_{p-1}$, de $(S_1 \cap \dots \cap S_{p-1}) \setminus S_p$ une hypersurface lisse de $(S_1 \cap \dots \cap S_{p-2}) \setminus S_p$, etc., et l'on a la chaîne d'inclusions

$$\begin{aligned} S_1 \cap \dots \cap S_p &\subset S_1 \cap \dots \cap S_{p-1} \\ (S_1 \cap \dots \cap S_{p-1}) \setminus S_p &\subset (S_1 \cap \dots \cap S_{p-2}) \setminus S_p, \\ (S_1 \cap \dots \cap S_{p-2}) \setminus (S_{p-1} \cup S_p) &\subset (S_1 \cap \dots \cap S_{p-3}) \setminus (S_{p-1} \cup S_p) \\ &\dots \\ (2.31) \quad S_1 \setminus (S_2 \cup \dots \cup S_p) &\subset X \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_p). \end{aligned}$$

À chacune de ces inclusions correspond un *morphisme cobord*. En composant ces morphismes cobord, on obtient pour chaque $k = 1, \dots, n - p + 1$, un *morphisme cobord itéré*

$$\delta_{X, S}^k : H_{k-1}(S_1 \cap \dots \cap S_p, \mathbb{C}) \longmapsto H_{k+p-1}(X \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_p), \mathbb{C}).$$

Nous allons croiser cette construction avec une construction duale (i.e au niveau cette fois des classes de cohomologie et non plus d'homologie), celle de *morphisme*

²¹Comme le résume la phrase d'H. Poincaré dans l'article fondateur [Pc2] : « ... l'intégrale prise le long d'une surface fermée S ne dépend que des courbes singulières qui sont contenues dans l'intérieur de cette surface. »

résidu. Il s'agira là d'une construction cette fois analytique et non plus géométrique, comme celle du morphisme cobord que nous venons de présenter.

On dit qu'une k forme fermée ω de classe C^∞ dans $X \setminus S_1$ est *semi-méromorphe*, de pôle d'ordre q sur S_1 , si et seulement si, pour tout $z \in S^1$, il existe un voisinage U_z de z (dans lequel S^1 est définie comme $\{s_1 = 0\}$, avec s_1 irréductible) tel que $s_1^q \omega$ se prolonge depuis $U_z \setminus S_1$ en une forme C^∞ dans U_z . Une telle forme ω se divise localement par ds_1 , et l'on peut écrire dans $U_z \setminus S^1$,

$$\omega = \frac{ds_1}{s_1^q} \wedge \alpha + \beta,$$

où α et β sont des $(k-1)$ -formes se prolongeant de manière C^∞ à U_z tout entier. De fait, la classe de cohomologie de ω dans $H^k(X \setminus S_1, \mathbb{C})$ contient une k -forme fermée dans $X \setminus S^1$, à pôles simples ($q = 1$) le long de S^1 ; construire un tel représentant est aisé *via* le recours à une partition de l'unité et aux formules

$$d\left[\frac{1}{s_1^{q-1}}\right] = (1-q)\frac{ds_1}{s_1^q}, \quad q = 2, 3, \dots$$

Attention! On ne peut cependant aller en deçà de $q = 1$! Cependant, si ω est une k -forme fermée dans $X \setminus S^1$, semi-méromorphe et à pôles simples le long de S^1 , les restrictions à S^1 des formes α définies localement par

$$\omega = \frac{ds_1}{s_1} \wedge \alpha + \beta$$

se « recollent » pour générer une k -forme fermée sur S^1 ; la classe de cohomologie de cette forme ne dépend pas que de la classe de cohomologie dans $X \setminus S^1$ de la k -forme fermée à pôles simples dont on est parti et on la note *résidu de Poincaré* de la classe de cohomologie de ω dans $H^k(X \setminus S^1, \mathbb{C})$. De fait, on peut associer à la classe de cohomologie de toute k -forme semi-méromorphe ω à pôles le long de S_1 (en abrégé sm_{S_1}), $k = 1, \dots, n$, le résidu de Poincaré $\text{Res}^k[\omega]$ défini comme la classe dans $H^{k-1}(S_1, \mathbb{C})$ de la $(k-1)$ -forme fermée α obtenue à partir d'un représentant à pôles simples de ω . On dispose ainsi de morphismes

$$\text{Res}_{X, S_1}^k : H_{\text{sm}_{S_1}}^k(X \setminus S_1, \mathbb{C}) \mapsto H^{k-1}(S_1, \mathbb{C}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Ces *morphismes résidu* peuvent être itérés suivant la chaîne d'inclusions (2.31) et l'on dispose, pour $k = p, \dots, n$, de *morphismes résidu itérés*

$$\text{Res}_{X, S}^k : H_{\text{sm}_{S_1 \cup \dots \cup S_p}}^k(X \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_p), \mathbb{C}) \mapsto H^{k-p}(S_1 \cap \dots \cap S_p, \mathbb{C}).$$

On peut alors énoncer la *formule cohomologique des résidus*.

THEOREME 2.37. *Si X est une variété analytique complexe de dimension n , S_1, \dots, S_p p hypersurfaces lisses se coupant transversalement, γ un k cycle ($k \leq n-p$) de la variété analytique complexe (de dimension $n-p$) $S_1 \cap \dots \cap S_p$ et ω une $(k+p)$ -forme différentielle fermée dans $X \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_p)$, semi-méromorphe à pôles le long de $S_1 \cup \dots \cup S_p$, on a*

$$(2.32) \quad \frac{1}{(2i\pi)^p} \int_{\delta_{X, S}^k[\gamma]} \omega = \int_{\dot{\gamma}} \text{Res}_{X, S}^{k+p}(\omega).$$

EXEMPLE 2.38. Un exemple important est celui de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ dans lequel S est l'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. Dans ce cas, la forme de Bochner-Martinelli dans $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ s'interprète ainsi : si $X = (\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, considéré

comme un ouvert de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ contenant (à l'infini) l'hypersurface S , il s'agit d'une $(n, n-1)$ -forme fermée semi-méromorphe $\omega_{\text{BM},n}$ dans $X \setminus \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, à pôles simples le long de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, de résidu de Poincaré $\text{Res}_{X, \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})}[\omega_{\text{BM},n}]$ la forme volume

$$(dd^c \log(|z_0|^2 + \cdots + |z_{n-1}|^2))^{n-1}$$

dans $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. Cette configuration peut être généralisée au cadre de l'exemple 1.31, dans la situation où une variété complète torique lisse X de dimension n se réalise sous la forme (1.25) comme le quotient géométrique du complémentaire U_X dans \mathbb{C}^{n+r} du lieu des zéros d'un idéal monomial par un groupe isomorphe à \mathbb{T}^r . Le groupe de cohomologie $H^{n+r,n}(U_X, \mathbb{C})$, dernier groupe de cohomologie non nul puisque U_X se présente comme un fibré en tores \mathbb{T}^r au dessus de X , se trouve engendré par une $(n+r, n)$ -forme $\omega_{n+r,n}(U_X)$ dont le résidu de Poincaré est une forme volume normalisée sur X (telle qu'elle sera introduite au chapitre 3, dans l'exemple 3.4) (voir [ShTY]).

2.5.2. Courants résiduels. Nous allons dans cette section décliner le concept de *résidu* sous un angle encore géométrique (notre contexte sera toujours celui des sections holomorphes d'un fibré hermitien) mais en outre cette fois analytique; l'objet introduit ne sera plus, comme dans la sous-section précédente, un être *cohomologique*, mais sera cette fois incarné par un *courant*, ce qui nous permettra de profiter de la souplesse du cadre C^∞ par rapport au cadre analytique. Le concept de *positivité* jouera, ici encore, un rôle essentiel et, avec lui, l'outil qui permet de le mettre en pratique, à savoir la *conjugaison complexe*.

Dans cette section, nous considérerons une section holomorphe s d'un fibré hermitien holomorphe $(E \rightarrow X, |\cdot|)$ de rang m au dessus d'une variété analytique complexe X de dimension n . On note $Y = V(s)$ le sous-ensemble analytique des zéros de s . Il existe une isométrie linéaire « de *conjugaison* » entre E et E^* : si s est une section holomorphe de $E \rightarrow X$, la section « conjuguée » s^* de $E^* \rightarrow X$ est définie par

$$(2.33) \quad s^*(z)(\xi) = \langle \xi, s(z) \rangle_z, \quad \forall z \in X, \quad \forall \xi \in E_z.$$

Cette isométrie s'étend en une isométrie entre les espaces de sections à valeurs formes différentielles. La section σ de $E^*_{X \setminus Y} \rightarrow X \setminus Y$ de norme minimale telle que $\langle \sigma, s \rangle = 1$ (c'est ici le crochet de dualité) est précisément donnée par

$$(2.34) \quad \sigma(z) = \frac{s^*(z)}{|s(z)|^2}, \quad \forall z \in X \setminus Y.$$

Le recours au *théorème de résolution des singularités* (théorème 1.53), suivi d'un *éclatement normalisé* (comme dans l'exemple 2.13) permet de démontrer que, pour tout $k = 1, \dots, n$, les fonctions

$$\begin{aligned} \lambda \in \{\text{Re } \lambda \gg 0\} &\longmapsto |s|^{2\lambda} \sigma \wedge (\bar{\partial}\sigma)^{k-1} \\ \lambda \in \{\text{Re } \lambda \gg 0\} &\longmapsto \bar{\partial}[|s|^{2\lambda}] \wedge \sigma \wedge (\bar{\partial}\sigma)^{k-1} \end{aligned}$$

se prolongent (comme des fonctions méromorphes à valeurs courants) à tout le plan complexe, en des fonctions respectivement à valeurs dans $\mathcal{D}'^{0,k-1}(X, \bigwedge^k E^*)$ et $\mathcal{D}'^{0,k}(X, \bigwedge^k E^*)$, les prolongements étant holomorphes au voisinage de 0, et de valeur en zéro des courants sur X de type respectifs $(0, k-1)$ et $(0, k)$ à valeurs dans le fibré $\bigwedge^k E^*$.

DÉFINITION 2.39. Soit X est une variété analytique complexe de dimension n , $(E \rightarrow X, | \cdot |)$ un fibré hermitien sur X et s une section holomorphe de ce fibré. L'élément de

$$\bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{D}'^{0,k}(X, \bigwedge^k E^*)$$

défini comme la valeur en $\lambda = 0$ de

$$\lambda \mapsto (1 - |s|^{2\lambda}) + \sum_{k=1}^n \bar{\partial}[|s|^{2\lambda}] \wedge \sigma \wedge (\bar{\partial}\sigma)^{k-1}$$

est appelé *courant résiduel* attaché à la section s et relatif au choix de métrique $| \cdot |$. On le note $R_{E,| \cdot |[s]}$.

L'intérêt majeur du courant résiduel réside dans le résultat suivant (que nous prouverons à la section 2.5.3). Sous cette forme, ce résultat est dû à M. Andersson [**And1**].

THEORÈME 2.40. Soit s une section holomorphe d'un fibré hermitien de rang m au dessus d'une variété analytique complexe X de dimension n (que l'on suppose ici de Stein). Soit h une fonction holomorphe sur X telle que $hR_{E,| \cdot |[s]} \equiv 0$ (au sens des courants). Il existe une section holomorphe a du fibré $E^* \rightarrow X$ telle que $h = \lrcorner_s a$, i.e h_z est, pour tout z de X , dans l'idéal $(\mathcal{J}[s])_z$, où $\mathcal{J}[s]$ désigne le faisceau cohérent d'idéaux introduit à l'exemple 2.13.

EXEMPLE 2.41. Si $L \rightarrow X$ est un fibré en droites sur X et $| \cdot |$ est une métrique hermitienne sur ce fibré, le courant résiduel ainsi défini ne dépend pas de la métrique hermitienne choisie sur le fibré en droites. Si la section s se représente dans un ouvert trivialisant U sous la forme $f \otimes e$, le courant résidu $R_{E,| \cdot |[s]}$ est le courant $2i\pi\bar{\partial}(1/f) \otimes e^*$ défini dans U par

$$\langle \bar{\partial}\left(\frac{1}{f}\right), \varphi \rangle := \frac{1}{2i\pi} \left[\int_U \bar{\partial}\left(\frac{|f|^{2\lambda}}{f}\right) \wedge \varphi \right]_{\lambda=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|f|^2=\epsilon} \frac{\varphi}{f}$$

pour toute $(n, n-1)$ forme test φ dans U .

2.5.3. L'obstruction au complexe de Koszul. La preuve du théorème 2.40 passe par le recours au *complexe de Koszul*. Ce double complexe (que nous allons exprimer ici en termes de courants), attaché à une section s d'un fibré hermitien au dessus d'une variété analytique complexe X , joue un rôle important dans *l'attaque des problèmes de division en géométrie complexe*. Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère dans un premier temps le complexe

$$(2.35) \quad \begin{aligned} & \mathcal{D}'^{0,k}(X, \bigwedge^m E^*) \xrightarrow{\lrcorner_s} \mathcal{D}'^{0,k}(X, \bigwedge^{m-1} E^*) \xrightarrow{\lrcorner_s} \dots \\ & \dots \xrightarrow{\lrcorner_s} \mathcal{D}'^{0,k}(X, \bigwedge^{l+1} E^*) \xrightarrow{\lrcorner_s} \mathcal{D}'^{0,k}(X, \bigwedge^l E^*) \\ & \dots \xrightarrow{\lrcorner_s} \mathcal{D}'^{0,k}(X, E^*) \xrightarrow{\lrcorner_s} \mathcal{D}'^{0,k}(X) \xrightarrow{\lrcorner_s} 0, \end{aligned}$$

où \lrcorner_s désigne l'opérateur de contraction (ou multiplication intérieure) par s (déjà introduit au dernier cran de la chaîne pour définir le faisceau d'idéaux $\mathcal{J}[s]$ dans l'exemple 2.13). On note que $\bar{\partial}$ and \lrcorner_s anti-commute ($\bar{\partial} \circ \lrcorner_s = -\lrcorner_s \circ \bar{\partial}$) puisque

s est une section holomorphe de E . On introduit dans un second temps le double complexe (intégrant « verticalement » le complexe de Dolbeault) :

$$(2.36) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{D}'^{0,0}(X, \bigwedge^m E^*) & \xrightarrow{\downarrow_s} \dots & \mathcal{D}'^{0,0}(X, \bigwedge^l E^*) & \xrightarrow{\downarrow_s} \dots & \mathcal{D}'^{0,0}(X) & \xrightarrow{\downarrow_s} 0 \\ \bar{\partial} \downarrow & \vdots & \bar{\partial} \downarrow & \vdots & \bar{\partial} \downarrow & \\ \mathcal{D}'^{0,1}(X, \bigwedge^m E^*) & \xrightarrow{\downarrow_s} \dots & \mathcal{D}'^{0,1}(X, \bigwedge^l E^*) & \xrightarrow{\downarrow_s} \dots & \mathcal{D}'^{0,1}(X) & \xrightarrow{\downarrow_s} 0 \\ \bar{\partial} \downarrow & \vdots & \bar{\partial} \downarrow & \vdots & \bar{\partial} \downarrow & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \mathcal{D}'^{0,k}(X, \bigwedge^m E^*) & \xrightarrow{\downarrow_s} \dots & \mathcal{D}'^{0,k}(X, \bigwedge^l E^*) & \xrightarrow{\downarrow_s} \dots & \mathcal{D}'^{0,k}(X) & \xrightarrow{\downarrow_s} 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \bar{\partial} \downarrow & \vdots & \bar{\partial} \downarrow & \vdots & \bar{\partial} \downarrow & \\ 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

Pour $r = 0, -1, \dots, -m$, soit

$$\mathcal{L}^r(\mathcal{X}, E^*) = \bigoplus_{l=0}^m \mathcal{D}'^{0,r+l}(X, \bigwedge^l E^*).$$

Introduisons l'opérateur $\nabla_s : \mathcal{L}^{r-1}(X, E^*) \longrightarrow \mathcal{L}^r(X, E^*)$ comme suit :

$$(2.37) \quad \nabla_s \Phi = \downarrow_s(\Phi) - \bar{\partial}\Phi.$$

DÉMONSTRATION. (du théorème 2.40²²). On fait entrer en jeu l'opérateur ∇_s introduit en (2.37). Notons tout d'abord que formellement

$$\sum_{k=1}^m \sigma \wedge (\bar{\partial}\sigma)^{k-1} = \frac{\sigma}{1 - \bar{\partial}\sigma}$$

et que, pour $\text{Re } \lambda$ grand, on a

$$(2.38) \quad \nabla_s \left[|s|^{2\lambda} \sum_{k=1}^m \sigma \wedge (\bar{\partial}\sigma)^{k-1} \right] = |s|^{2\lambda} - \bar{\partial}|s|^{2\lambda} \wedge \left(\sum_{k=1}^m \sigma \wedge (\bar{\partial}\sigma)^{k-1} \right).$$

Posons

$$P_{E,|} [s] := \left[|s|^{2\lambda} \sum_{k=1}^m \sigma \wedge (\bar{\partial}\sigma)^{k-1} \right]_{\lambda=0}.$$

En suivant le prolongement analytique jusqu'à $\lambda = 0$ dans (2.38), on obtient donc l'identité (à comprendre au sens des courants) :

$$\nabla_s [P_{E,|} [s]] = 1 - R_{E,|} [s].$$

Si h est une fonction holomorphe sur X annulant (au sens des courants) le courant $R_{E,|} [s]$, on a donc

$$\nabla_s [h P_{E,|} [s]] = \nabla_s [h] \wedge P_{E,|} [s] + h \nabla_s [P_{E,|} [s]] = h.$$

²²Cette preuve est directement inspirée de l'approche élégante développée dans [And1].

Il reste à montrer que la solution « courant » à l'équation $\nabla_s[w] = h$ (en l'occurrence $w = hP_{E,|} \lfloor [s]$) peut être « corrigée » en une solution holomorphe, ce qu'il reste à expliquer lorsque X est, comme c'est le cas ici, supposée être une variété de Stein. Le fait de disposer d'une solution $w \in \mathcal{L}^{-1}(X, E^*)$ à l'équation $\nabla_s[w] = h$ (où h est considéré comme un élément de $\mathcal{L}^0(X, E^*)$) équivaut à la donnée d'une suite d'éléments $w_{k,k-1}$, $k = 1, \dots, m$, avec $w_{k,k-1} \in \mathcal{D}'^{0,k-1}(X, \wedge^k E^*)$, telle que $\lfloor_s[w_{1,0}] = h$ et

$$\lfloor_s[u_{k+1,k}] = \bar{\partial}u_{k,k-1}, \quad k = 1, \dots, m.$$

En particulier, $\bar{\partial}w_{m,m-1} = \lfloor_s[w_{m+1,m}] = \lfloor_s[0] = 0$. L'exactitude du complexe de Dolbeault (voir le cours de P. Charpentier [Charp], théorème IV.3.1, pour l'énoncé dans le cas des ouverts pseudoconvexes de \mathbb{C}^n , à transposer ici²³) assure que l'on peut, de proche en proche, déterminer, pour $k = m, m-1, \dots, 2$, un élément $v_{k,k-1}$ dans $\mathcal{D}'^{0,k-2}(X, \wedge^k E^*)$ tel que

$$\bar{\partial}v_{k,k-1} = w_{k,k-1} + \lfloor_s[v_{k+1,k}]$$

(partant de $v_{m+1,m} = 0$). On constate alors que $a = w_{1,0} + \lfloor_s[v_{2,1}]$ est solution de un élément de $\mathcal{D}'^{0,0}(X, E^*)$ tel que $\bar{\partial}a = 0$ (d'où le fait que a est une section holomorphe de E^* du fait de l'hypoellipticité de l'opérateur $\bar{\partial}$, voir le cours de P. Charpentier [Charp], chapitres 2 et 4) et $\lfloor_s a = \lfloor_s[w_{1,0}] = h$. Le théorème est bien démontré. \square

2.5.4. Quelques propriétés des courants résiduels ; conséquences. Listons dans cette section trois propriétés majeures partagées par les courants résiduels du type $R_{E,|} \lfloor [s]$ associés à une section holomorphe d'un fibré hermitien $E \rightarrow X$ au dessus d'une variété analytique complexe.

1. La « neutralité » des êtres antiholomorphes.

Il s'agit là d'une propriété très importante, rendant compte du fait suivant : si le recours à la conjugaison complexe a permis de profiter de la notion de positivité (*via* l'utilisation d'une norme et la réalisation de la section σ introduite dans (2.34)), les êtres antiholomorphes introduits jouent un rôle « muet » dans l'action des courants résiduels, i.e. sont traités comme des constantes scalaires (et en particulier ne sont pas dérivés!). Cette remarque fait des courants résiduels $R_{E,|} \lfloor [s]$ des objets de nature algébrique, ce malgré le procédé analytique suivant lequel ils ont été construits. Nous pouvons énoncer la proposition suivante.

²³Il y a en fait deux choses à faire : dans un premier temps, transposer le résultat établi dans le cours de P. Charpentier [Charp] au cas où U est remplacé par une *variété de Stein* et les formes différentielles à valeurs dans \mathbb{C} par des formes différentielles à valeurs dans un fibré holomorphe F (pas de difficulté majeure, au vu de l'existence d'une *fonction strictement plurisousharmonique d'exhaustion* rappelée au début de la section 2.2); ensuite, utiliser l'important *théorème d'isomorphisme de Dolbeault* (voir par exemple [GH], page 45, ou [De0], chapitre 5, assertion 11.7), qui assure que les groupes de cohomologie des complexes de Dolbeault $C_{p,\bullet}^\infty(X, F)$ et $\mathcal{D}'^{p,\bullet}(X, F)$, $p \leq n$, X étant une variété analytique complexe de dimension n et $F \rightarrow X$ un fibré holomorphe, sont isomorphes; plus spécifiquement, le groupe de cohomologie $H^{p,q,\pm\infty}(X, E)$ ($+\infty$ pour C^∞ , $-\infty$ pour « courants ») est isomorphe au groupe de cohomologie de Čech $\check{H}^q(X, \Omega^p \otimes F)$, où Ω^p désigne le faisceau des p -formes holomorphes à coefficients holomorphes. Nous renvoyons au chapitre 4, section 5, de [De0] pour une introduction à la cohomologie de Čech relative au faisceau des sections d'un fibré (nous en avons donné une présentation dans la section 1.4.1 à l'occasion de l'énoncé de la proposition 1.4).

PROPOSITION 2.7. *Soit $(E \rightarrow X, | |)$ un fibré hermitien au dessus d'une variété analytique complexe X et s une section holomorphe de E . Soit $Y = V(s)$ le sous-ensemble analytique définie comme le lieu des zéros de la section s et \mathcal{I}_Y le faisceau cohérent d'idéaux correspondant. Si h est une section du faisceau \mathcal{I}_Y au dessus d'un ouvert U de X , on a $\bar{h}R_{E,|} = 0$ (au sens des courants) dans U .*

DÉMONSTRATION. Cette preuve, comme celle de la proposition suivante, est inspirée des preuves figurant dans [BY4, PTY, And1]. On y utilise l'enchaînement de la désingularisation $\tilde{X}_Y \xrightarrow{\pi_Y} X$ et d'éclatements normalisés (comme dans l'exemple 2.13, ou, à nouveau, dans l'exemple 2.35)

$$\tilde{X}_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]} \xrightarrow{\pi_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]}} X.$$

Si φ est une $(n, n - k)$ -forme différentielle de support dans U , on constate que l'expression (une fois « relevée » sur la variété $\tilde{X}_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]}$) de l'intégrale

$$\int_U \bar{h} \bar{\partial}|s|^{2\lambda} \wedge \sigma \wedge (\bar{\partial}\sigma)^{k-1} \wedge \varphi$$

lorsque $\operatorname{Re} \lambda$ est grand, se présente comme une combinaison d'expressions

$$(2.39) \quad \lambda \int_{\tilde{U}_\alpha} \frac{1}{h \circ \pi_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]}} \frac{|u_\alpha|^{2\lambda} |m_\alpha|^{2\lambda}}{m_\alpha^k} \left(\theta_\alpha + \varpi_\alpha \wedge \frac{\bar{d}m_\alpha}{\bar{m}_\alpha} \right) \wedge \psi_\alpha,$$

où \tilde{U}_α désigne un ouvert de carte sur $\tilde{X}_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]}$, u_α une fonction holomorphe inversible dans \tilde{U}_α , m_α est un monôme, θ_α et ϖ_α des formes différentielles de types respectifs $(0, k)$ et $(0, k - 1)$ et de classe C^∞ dans \tilde{U}_α et enfin ψ_α une $(n, n - k)$ forme test de support dans l'ouvert de carte \tilde{U}_α . De plus m_α est un générateur dans $\mathcal{O}_{\tilde{X}_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]}}(\tilde{U}_\alpha)$ de $\mathcal{J}[s] \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]}}$, ce qui implique que $h \circ \pi_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]}$ s'annule sur $\{m_\alpha = 0\}$. On voit alors que le prolongement analytique (comme fonction de λ) de l'expression (2.39) conduit à une fonction holomorphe dans tout un demi-plan $\operatorname{Re} \lambda > -\eta$ (avec $\eta > 0$ assez petit) et de plus nulle en 0. La proposition est ainsi démontrée. \square

2. L'annulation par la clôture intégrale et le théorème de Briançon-Skoda.

PROPOSITION 2.8. *Soit $(E \rightarrow X, | |)$ un fibré hermitien de rang m au dessus d'une variété analytique complexe X et s une section holomorphe de E . Soit $\mathcal{J}[s]$ le faisceau cohérent d'idéaux associé à s (voir l'exemple 2.13) et $Y = \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}[s])$ le lieu des zéros de s . Le courant résiduel $R_{E,|}[s]$ est annulé par le faisceau cohérent d'idéaux $(\overline{\mathcal{J}[s]})^r$ où $r = \inf(n, m)$ et $\bar{\mathcal{I}}$ désigne la clôture intégrale²⁴ du faisceau cohérent d'idéaux \mathcal{I} (i.e. toute section h du faisceau $(\overline{\mathcal{J}[s]})^r$ dans un ouvert U est telle que $hR_{E,|}[s] = 0$ dans U au sens des courants).*

DÉMONSTRATION. La preuve de cette proposition se conduit de manière identique à celle de la proposition 2.7. On en reprend donc les notations. On utilise cette fois le fait suivant : si h est une section dans un ouvert U du faisceau $(\overline{\mathcal{J}[s]})^r$, la fonction

$$z \mapsto (h \circ \pi_{Y, \widetilde{\mathcal{J}}[s]})(z)$$

²⁴Voir la définition 1.51 accompagnée de la proposition 1.8.

(lue dans un ouvert de carte \tilde{U}_α sur $\tilde{X}_{Y, \mathcal{J}[s]}$) est divisible par le monôme m_α^r , où m_α désigne le générateur dans U_α du faisceau des sections de $\mathcal{J}[s] \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}_{Y, \mathcal{J}[s]}}$. Dès lors, les fonctions de λ du type

$$(2.40) \quad \lambda \int_{\tilde{U}_\alpha} (h \circ \pi_{Y, \mathcal{J}[s]}) \frac{|u_\alpha|^{2\lambda} |m_\alpha|^{2\lambda}}{m_\alpha^k} \left(\theta_\alpha + \varpi_\alpha \wedge \frac{\overline{dm_\alpha}}{\overline{m_\alpha}} \right) \wedge \psi_\alpha,$$

avec $k = 1, \dots, \inf(m, n) = r$, sont holomorphes dans un demi-plan $\operatorname{Re} \lambda > -\eta$ avec $\eta > 0$ (assez petit) et nulles en $\lambda = 0$. La conclusion de la proposition en découle donc. \square

Une conséquence très importante de la proposition ci-dessus est le théorème suivant, prouvé initialement par J. Briançon et H. Skoda *via* des techniques L^2 (donc purement analytiques, basées sur le théorème de Skoda et les estimations de L. Hörmander, voir le cours de P. Charpentier [**Charp**] ou aussi [**De0**], chapitre 8, section 10) dans [**Bris**], puis étendu plusieurs années après d'abord dans le cadre algébrique des anneaux locaux réguliers ([**LS**, **LT**]) ($\mathcal{O}_{X,z}$, où X est une variété analytique complexe et z un point de X , en est un exemple), puis dans le cadre d'anneaux locaux non réguliers (tels $\mathcal{O}_{X,z}$, où X désigne un espace analytique réduit et z un point singulier de X , voir [**Hun**] et, plus récemment, [**AndSS**]). Le théorème de Briançon-Skoda a aussi un pendant dans le cadre des anneaux locaux d'égalité caractéristique (et non plus de caractéristique 0 comme c'est le cas dans toutes les situations envisagées ici). Il faut signaler cependant que l'attaque du problème en caractéristique positive est rendue en un sens plus facile grâce à la notion de *tight closure* (« clôture reserrée » ou « clôture étroite »); pour les divers aspects relevant en particulier de la caractéristique positive, on pourra consulter le riche article de synthèse [**Smi0**].

THEORÈME 2.42. *Soit X une variété analytique complexe, $E \rightarrow X$ un fibré hermitien de rang m et s une section holomorphe de E . Si $r = \inf(n, m)$, on a $(\mathcal{J}[s])^r \subset \mathcal{J}[s]$.*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.8, combinée avec le théorème 2.40. On décide (ce qui est possible puisque le fibré est localement trivial) du choix d'une métrique hermitienne sur E et l'on exploite l'annulation de $R_{E, | \cdot | [s]}$ par toute section locale du faisceau d'idéaux $(\mathcal{J}[s])^r$. \square

REMARQUE 2.43. Le résultat complet connu sous le nom de théorème de Briançon-Skoda est de fait plus général : avec les notations du théorème, nous avons en fait :

$$(2.41) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (\mathcal{J}[s])^{r+k-1} \subset (\mathcal{J}[s])^k.$$

Pour une preuve basée sur les estimations L^2 de L. Hörmander et le théorème de Hörmander-Bombieri-Skoda, on pourra consulter [**De0**], chapitre 8, section 10. On y reviendra dans la section 4.3 en fin de chapitre 4. Pour une preuve basée sur l'utilisation des courants résiduels et la manière dont ils permettent de résoudre l'obstruction à l'exactitude du complexe de Koszul, il convient d'introduire une version généralisée du complexe de Koszul, dérivée du complexe d'Eagon-Northcott (voir la preuve du théorème 1.1 dans [**And4**]). Il est intéressant de souligner que cette approche (basée sur les courants résiduels) permet aussi de traiter le cas

singulier et d'expliciter, étant donné un point singulier z d'un espace analytique réduit X , un entier $\mu = \mu(z)$ tel que, pour tout idéal I de $\mathcal{O}_{X,z}$, on ait

$$\forall k \geq 1, \overline{I^{\mu+k-1}} \subset I^k.$$

Cet entier μ , indépendant de l'idéal I , est intrinsèquement lié à la singularité de X au point z ; pour ce résultat tout récent, voir [AndSS].

3. *L'holonomie et la propriété d'extension standard*

Exactement comme c'est le cas pour les coefficients distributions impliquées dans le courant d'intégration (voir la proposition 2.3), les distributions, cette fois à valeurs dans $\bigwedge^k E^*$, de la composante de type $(0, k)$ de $R_{E,|s|}$, vérifient encore des conditions d'holonomie.

PROPOSITION 2.9. *Soit U un ouvert de \mathbb{C}^n , $(E \rightarrow U, |\cdot|)$ un fibré trivial de rang m sur U (équipé de la métrique triviale), et τ_R une des distributions coefficients (à valeurs dans $\bigwedge^k E^*$ ($1 \leq k \leq \inf(n, m)$)) de la composante de type $(0, k)$ du courant résiduel $R_{E,|s|}$, s désignant une section holomorphe du fibré E au dessus de l'ouvert U . Soit $f = (f_1, \dots, f_l)$ un vecteur de fonctions holomorphes dans U , non toutes identiquement nulles sur le support de τ_R , et $|f|^2 := |f_1|^2 + \dots + |f_l|^2$. Pour tout z dans le support de τ_R , il existe une équation fonctionnelle formelle (dite de Bernstein-Sato)*

$$(2.42) \quad b_z(\lambda)[|f|^{2\lambda} \otimes \tau_R] = \mathcal{Q}_z(\lambda, \zeta, \bar{\zeta}, \partial/\partial\zeta, \partial/\partial\bar{\zeta})[|f|^{2(\lambda+1)} \otimes \tau_R],$$

où b_z désigne un polynôme à racines toutes rationnelles et strictement négatives (dit polynôme de Bernstein-Sato lorsqu'il est choisi comme minimal) et \mathcal{Q}_z un germe d'opérateur différentiel à coefficients analytiques dépendant polynomialement du paramètre λ .

DÉMONSTRATION. La preuve est ici identique à celle de la proposition 2.3 mais nous allons néanmoins la répéter. Tout repose sur l'existence d'une équation fonctionnelle (au « voisinage » de chaque point z de U) à comprendre au sens distributions :

$$(2.43) \quad \beta_z(\lambda, \mu)[|f|^{2\lambda}|s|^{2\mu}] = \mathcal{Q}_z(\lambda, \mu, \zeta, \bar{\zeta}, \partial/\partial\zeta, \partial/\partial\bar{\zeta})[|f|^{2(\lambda+1)}|s|^{2\mu}],$$

où β_z est un produit de facteurs affines à coefficients entiers strictement positifs (ceci est une conséquence des résultats combinés de [Sab, Gyo]). On examine ensuite, pour $\operatorname{Re} \lambda$ et $\operatorname{Re} \mu$ grands, l'expression :

$$\mu \beta_z(\lambda, \mu)|f|^{2\lambda}|s|^{2(\mu-1)}(\bar{\partial}|s|^2 \wedge \sigma \wedge (\bar{\partial}\sigma)^{k-1}) = \beta_z(\lambda, \mu)|f|^{2\lambda} \left(\bar{\partial}|s|^{2\mu} \wedge \sigma \wedge (\bar{\partial}\sigma)^{k-1} \right)$$

(où, rappelons le, $\sigma := s^*/|s|^2$). Soit $\tau_{R,\mu}$ l'une des distributions coefficients (ce sont en fait des fonctions car $\operatorname{Re} \mu$ est supposé très grand) de

$$\mu |s|^{2(\mu-1)}(\bar{\partial}|s|^2 \wedge \sigma \wedge (\bar{\partial}\sigma)^{k-1}).$$

Lorsque l'on persiste à « geler » λ de partie réelle très grande et que l'on suit le prolongement analytique (au sens des fonctions à valeurs distributions) jusqu'à $\mu = 0$ de

$$\mu \mapsto \beta_z(\lambda, \mu) |f|^{2\lambda} \tau_{R,\mu}$$

(considérée comme application à valeurs distributions) on obtient la distribution $\beta_z(\lambda, 0)|f|^{2\lambda} \tau_{R,0}$, $\tau_{R,0} := \tau_R$ étant la distribution coefficient correspondante du

courant résiduel $R_{E,|} [s]$. Mais l'on avait, du fait de l'équation fonctionnelle (2.43), toujours pour $\operatorname{Re} \lambda$ et $\operatorname{Re} \mu$ grands,

$$\beta_z(\lambda, \mu) |f|^{2\lambda} \tau_{R,\mu} = \tau_{R,\lambda,\mu},$$

où $\tau_{R,\lambda,\mu}$ est la distribution qui à une fonction test φ de $\mathcal{D}(U)$ associe

$$\left\langle |f|^{2(\lambda+1)} \tau_{R,\mu}, \mathfrak{Q}_z(\lambda, \mu, \zeta, \bar{\zeta}, -\partial/\partial\zeta, -\partial/\partial\bar{\zeta})[\varphi] \right\rangle.$$

Géant à nouveau λ de partie réelle très grande et suivant le prolongement analytique jusqu'à $\mu = 0$, nous en déduisons l'égalité au sens distributions

$$\beta_z(\lambda, 0) |f|^{2\lambda} \tau_R = \tau_{R,\lambda,0} = |f|^{2(\lambda+1)} \mathfrak{Q}_z(\lambda, 0, \zeta, \bar{\zeta}, \partial/\partial\zeta, \partial/\partial\bar{\zeta})[\tau_R].$$

Ceci est l'équation fonctionnelle voulue ($b_z = \beta_z(\cdot, 0)$, $\mathcal{Q} = \mathfrak{Q}_{|\mu=0}$). Elle autorisera le prolongement analytique de $\lambda \mapsto |f|^{2\lambda} \otimes \tau_R$ au sens des fonctions à valeurs courants. \square

Quand bien même il n'est pas possible de se ramener (même localement) à une situation de métrique plate lorsque nous travaillons avec un fibré hermitien holomorphe quelconque ($E \rightarrow X, | \cdot |$), rendant impossible en général l'application de la proposition 2.9, il est néanmoins immédiat de constater (utilisant résolution des singularités suivies d'éclatements normalisés) que, si $(E_1 \rightarrow X, | \cdot |_1)$ et $(E_2 \rightarrow X, | \cdot |_2)$ sont deux fibrés hermitiens holomorphes sur X (de rangs respectifs m_1 et m_2) pour lesquels nous disposons de sections holomorphes (respectivement s_1 et s_2), la fonction

$$\lambda \mapsto R_{E_2,|_2}^\lambda [s_2] \wedge R_{E_1,|_1} [s_1],$$

où

$$(2.44) \quad R_{E_2,|_2}^\lambda [s_2] := (1 - |s_2|^{2\lambda}) + \sum_{k=1}^m \bar{\partial} |s_2|^{2\lambda} \wedge \sigma_2 \wedge (\bar{\partial} \sigma_2)^{k-1} \quad \sigma_2 := s_2^* / |s_2|_2^2,$$

est bien définie (à valeurs dans $\bigoplus_{k,l} \mathcal{D}'^{0,k+l}(X, \wedge^k E_1^* \wedge \wedge^l E_2^*)$) et se prolonge en une application méromorphe dans \mathbb{C} , mais à pôles tous de partie réelle strictement négative. On peut donc donner un sens à « la valeur en $\lambda = 0$ » et définir ainsi une multiplication (ni commutative, ni anticommutative en général) entre courants résiduels :

$$(2.45) \quad R_{E_2,|_2} [s_2] \wedge R_{E_1,|_1} [s_1] := \left[R_{E_2,|_2}^\lambda [s_2] \wedge R_{E_1,|_1} [s_1] \right]_{\lambda=0}.$$

Mieux ! Le mécanisme peut être itéré et l'on peut ainsi définir de manière inductive :

$$(2.46) \quad \begin{aligned} & R_{E_p,|_p} [s_p] \wedge \cdots \wedge R_{E_1,|_1} [s_1] : \\ &= \left[R_{E_p,|_p}^\lambda [s_p] \wedge \left[R_{E_{p-1},|_{p-1}} [s_{p-1}] \wedge \cdots \wedge R_{E_1,|_1} [s_1] \right] \right]_{\lambda=0}. \end{aligned}$$

Cette opération de multiplication étend la construction proposée lorsque les E_j sont des fibrés en droites holomorphes par N. Coleff et M. Herrera dans [CoH] (voir aussi [Sol])²⁵. Notons encore que le courant ainsi construit en multipliant les $R_{L_j} [s_j]$ (inutile de préciser la métrique puisque le courant résiduel n'en dépend pas, voir l'exemple 2.41) est lui aussi indépendant du choix des métriques sur les fibrés en droites holomorphes impliqués.

²⁵Notons que dans le cas très particulier des fibrés en droites holomorphes, le courant résiduel $R_{L,|} [s]$ est en fait un courant $\bar{\partial}$ -fermé, indépendant de la métrique hermitienne.

Le calcul du produit peut se faire directement *via* le recours à un seul paramètre complexe, suivant la proposition que nous admettrons ici (voir [ASWY]).

PROPOSITION 2.10. *Si $(E_1, | \cdot |_1), \dots, (E_p, | \cdot |_p)$ sont N fibrés hermitiens holomorphes sur une variété analytique X et s_1, \dots, s_p des sections respectives de ces fibrés, on a, si $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_p$ sont des entiers strictement positifs, la formule*

$$R_{E_p, | \cdot |_p}[s_p] \wedge \dots \wedge R_{E_1, | \cdot |_1}[s_1] = \left[R_{E_p, | \cdot |_p}^{\lambda \mu_p}[s_p] \wedge \dots \wedge R_{E_1, | \cdot |_1}^{\lambda \mu_1}[s_1] \right]_{\lambda=0},$$

le prolongement analytique étant suivi à partir du secteur angulaire tronqué

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \operatorname{Re} \lambda > 0; \operatorname{Arg}_{]-\pi, \pi[}(\lambda) < \frac{\pi}{2(\mu_1 + \epsilon)}; |\lambda| > R \right\},$$

où $\epsilon > 0$ et $R = R(\epsilon)$ est assez grand.

DÉFINITION 2.44. Si en particulier A est un sous-ensemble analytique de X , défini localement par des équations $f_1 = \dots = f_l = 0$ et si s est une section holomorphe d'un fibré hermitien de rang m ($E \rightarrow X, | \cdot |$), on définit les deux courants $1_A \cdot R_{E, | \cdot |}[s]$ et $1_{X \setminus A} \cdot R_{E, | \cdot |}[s]$ comme les valeurs en 0 respectivement des fonctions méromorphes :

$$\lambda \mapsto (1 - |f|^{2\lambda}) R_{E, | \cdot |}[s] \quad \lambda \mapsto |f|^{2\lambda} R_{E, | \cdot |}[s].$$

REMARQUE 2.45. Les courants à valeurs dans $\bigoplus_k \mathcal{D}'^{0,k}(X, \wedge^k E^*)$ ainsi construits ne dépendent pas du choix des fonctions localement définissantes f_1, \dots, f_l pour l'ensemble A . La définition 2.44 est donc cohérente.

PROPOSITION 2.11. *Si A est un sous-ensemble analytique de $Y = V(s)$ sans contenir toute une composante irréductible de cet ensemble, on a $R_{E, | \cdot |}[s] = 1_{X \setminus A} \cdot R_{E, | \cdot |}[s]$. On dit que $R_{E, | \cdot |}[s]$ est un courant ayant la propriété d'extension standard : il ne charge aucun sous-ensemble analytique strictement inclus dans toutes les composantes de l'ensemble des zéros de la section holomorphe de E à partir de laquelle le courant a été construit.*

DÉMONSTRATION. La preuve se traite par résolution des singularités, suivie d'un éclatement. On la laisse ici en exercice. \square

2.5.5. Le contexte d'intersection complète. Nous revenons ici sur la remarque 1.39 à propos de l'interprétation algébrique du concept géométrique d'intersection complète pour le situer en relation avec le complexe de Koszul .

DÉFINITION 2.46. Une suite d'éléments (s_1, \dots, s_p) d'un anneau commutatif \mathbb{A} est dite *quasi-régulière* si et seulement si, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, le fait qu'il existe une relation homogène de degré N

$$\sum_{k_1 + \dots + k_p = N} a_k s_1^{k_1} \dots s_p^{k_p} = 0, \quad a_k \in \mathbb{A},$$

implique $a_k \in (f_1, \dots, f_p)$ quelque soit k .

REMARQUE 2.47. La notion de *quasi-régularité* est indépendante de l'ordre, contrairement à celle de *régularité* : une suite (f_1, \dots, f_p) est *régulière* si $(f_1, \dots, f_p) \neq A$ et si, pour tout $k = 1, \dots, p-1$, f_{k+1} n'est pas diviseur de zéro dans $A/(f_1, \dots, f_k)$. Dans un anneau local, à condition que $(f_1, \dots, f_p) \neq A$, les deux notions sont certes

équivalentes ; mais dans le cas général, la notion de régularité dépend, elle, de l'ordre dans lequel on prend les fonctions (penser par exemple à $((1 - X)Y, (1 - X)Z, X)$ dans $\mathbb{C}[X, Y, Z]$!)

À une suite (s_1, \dots, s_p) d'un anneau commutatif \mathbb{A} , on associe le *complexe de Koszul* algébrique

$$(2.47) \quad \begin{aligned} 0 \xrightarrow{\downarrow_s} \bigwedge^p \mathbb{A}^p \xrightarrow{\downarrow_s} \bigwedge^{p-1} \mathbb{A}^p \xrightarrow{\downarrow_s} \dots \xrightarrow{\downarrow_s} \bigwedge^{l+1} \mathbb{A}^p \xrightarrow{\downarrow_s} \bigwedge^l \mathbb{A}^p \xrightarrow{\downarrow_s} \dots \\ \dots \xrightarrow{\downarrow_f} \bigwedge \mathbb{A}^p = \mathbb{A}^p \xrightarrow{\downarrow_s} \mathbb{A} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

où \downarrow_s désigne l'opérateur de contraction (ou multiplication intérieure) par s . L'exactitude de ce complexe est liée directement à la notion de *quasi-régularité*. On a en effet la :

PROPOSITION 2.12. *Une suite (s_1, \dots, s_p) d'un anneau commutatif \mathbb{A} est quasi-régulière si et seulement si le complexe de Koszul (2.47) associé est exact à tout cran, sauf (éventuellement) au dernier cran (i.e. en degré 0).*

EXEMPLE 2.48. Si $\mathbb{A} = H(U)$, où U est un ouvert de \mathbb{C}^n , et s_1, \dots, s_p (avec $p \leq n$) est une suite d'éléments de A , la suite (s_1, \dots, s_p) est quasi-régulière dans \mathbb{A} si et seulement si (s_1, \dots, s_p) définit une intersection globale dans U , i.e. l'ensemble $V(s) := \{s_1 = \dots = s_p = 0\}$ est de dimension exactement $n - p$. On dit alors que les hypersurfaces $S_j := \{s_j = 0\}$, $j = 1, \dots, p$ s'intersectent proprement dans U . Il est important de remarquer que la caractérisation algébrique de cette propriété géométrique (à savoir que les s_j définissent une intersection complète dans U) nécessite d'impliquer toutes les puissances de l'idéal (s_1, \dots, s_p) (voir la définition 2.46) et présente de ce fait, tout comme la définition des multiplicités de Hilbert-Samuel (section 2.3.4) ou encore celle de *gap sheaf* (2.17), un caractère asymptotique (cela avait déjà été relevé dans la remarque 1.39).

Comme nous l'avons vu dans la section 2.5.3, le courant $R_{E,|\cdot|}[s]$ attaché à une section holomorphe s d'un fibré hermitien holomorphe de rang p ($E \rightarrow X, |\cdot|$) matérialise l'obstruction à l'exactitude du complexe de Koszul. Si s est une section holomorphe (d'un fibré de rang p) définissant une *intersection complète globale* au sens de la définition 1.36, il est naturel de penser que toutes les composantes $R_{E,|\cdot|}[s]$ de bidegré $(0, k)$ avec $k = 0, \dots, p - 1$ seront nulles ; seule subsiste la composante de degré $(0, k)$ qui dans ce cas est indépendante du choix de la métrique $|\cdot|$. Nous admettons ici le résultat suivant ([Pas1, PTY, And1]).

THEORÈME 2.49. *Soit A une intersection complète globale d'une variété analytique complexe X , lieu des zéros d'une section s d'un fibré holomorphe $E \rightarrow X$ de rang p et $|\cdot|$ une métrique hermitienne sur $E \rightarrow X$. Le courant $R_{E,|\cdot|}[s]$ est un élément de $\mathcal{D}'^{0,p}(X, \bigwedge^p E^*)$ ne dépendant que du faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{J}[s]$ et non de la métrique $|\cdot|$.*

COROLLAIRE 2.50. *Si $E_1 \rightarrow X, \dots, E_p \rightarrow X$, $1 \leq p \leq n$ sont p fibrés en droites holomorphes sur une variété analytique complexe X , s_1, \dots, s_p des sections respectives de ces fibrés telles que la section $s = (s_1, \dots, s_p)$ du fibré $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p \rightarrow X$ définisse une intersection complète globale dans X , on a l'égalité :*

$$(2.48) \quad R_{E_p}[s_p] \wedge R_{E_{p-1}}[s_{p-1}] \wedge \dots \wedge R_{E_1}[s_1] = R_E[s].$$

REMARQUE 2.51. Pour compléter dans ce cas particulier la proposition 2.10, on peut même ajouter que, dans ce cas, la fonction de p paramètres complexes

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \mapsto R_{E_p}^{\lambda_p}[s_p] \wedge \cdots \wedge R_{E_1}^{\lambda_1}[s_1]$$

se prolonge en une fonction méromorphe dans \mathbb{C}^p , à valeurs dans $\mathcal{D}'^{0,p}(X, \wedge^p E^*)$, où $E := E_p \oplus \cdots \oplus E_1$, ce prolongement méromorphe étant holomorphe dans le produit des demi-plans $\operatorname{Re} \lambda_j > -\eta$ pour $\eta > 0$ suffisamment petit (ce résultat récent et fort utile est dû à H. Samuelsson [Sam]).

Si e_j définit, pour chaque $j = 1, \dots, p$, un repère holomorphe pour le fibré en droites holomorphe E_j au dessus d'un ouvert trivialisant U dans lequel s_j s'exprime $s_j = f_j \otimes e_j$, et si $R_E[s]$ est le courant résiduel défini de deux manières en 2.48, on a donc

$$R_E[s] = (2i\pi)^p \left(\bigwedge_{j=1}^p \bar{\partial} \left(\frac{1}{f_j} \right) \right) \otimes (e_1^* \wedge \cdots \wedge e_p^*),$$

où l'action du $(0, p)$ -courant dénoté sous forme multiplicative $\bigwedge_{j=1}^p \bar{\partial} \left(\frac{1}{f_j} \right)$ sur une $(n, n-p)$ forme test de U s'exprime suivant les diverses manières suivantes :

$$\begin{aligned} \left\langle \bigwedge_{j=1}^p \bar{\partial} \left(\frac{1}{f_j} \right), \varphi \right\rangle &= \frac{1}{(2i\pi)^p} \left[\int_U \bigwedge_{j=1}^p \bar{\partial} \left(\frac{|f_j|^{2\lambda}}{f_j} \right) \wedge \varphi \right]_{\lambda=0} \\ &= \frac{(-1)^{p(p-1)/2} (p-1)!}{(2i\pi)^p} \left[\lambda \int_U |f|^{2\lambda} \frac{(\bigwedge_{j=1}^p \bar{\partial} \overline{f_j}) \wedge \varphi}{|f|^{2(p+1)}} \right]_{\lambda=0} \\ (2.49) \quad &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\eta_1 + \cdots + \eta_p = \epsilon} \left(\frac{(-1)^{p(p-1)/2}}{(2i\pi)^p} \int_{|f_j|^2 = \eta_j} \frac{\varphi}{f_1 \cdots f_p} \right) d\sigma_\epsilon(\eta), \end{aligned}$$

où $d\sigma_\epsilon$ désigne la mesure de Lebesgue normalisée sur le $(p-1)$ -simplexe

$$\{(\eta_1, \dots, \eta_p) \in (\mathbb{R}^+)^p; \eta_1 + \cdots + \eta_p = \epsilon\}.$$

En revanche, le point ici délicat est que la fonction

$$(\eta_1, \dots, \eta_p) \in (\mathbb{R}^+)^p \mapsto \frac{1}{(2i\pi)^p} \int_{|f_j|^2 = \eta_j} \frac{\varphi}{f_1 \cdots f_p}$$

n'admet pas, pour une $(n, n-p)$ -forme test φ quelconque, de limite inconditionnelle lorsque les η_j tendent simultanément vers 0 (pour un contre-exemple, voir [PT] ou [Bj3]) ; il convient donc de la « moyenniser » comme dans (2.49). Lorsque cependant la forme test φ est fermée au voisinage de l'ensemble des zéros de s , cette fonction est constante pour (η_1, \dots, η_p) suffisamment proche de l'origine. Dans le cas particulier où $p = n$ ($\{s = 0\}$ est alors un sous-ensemble discret de U), il résulte de la proposition 2.7 que si U est tel qu'il ne contient qu'un seul zéro α de U , on a, pour toute forme test $(n, 0)$ -forme test $\varphi = \psi d\zeta$ de support dans U ,

$$\left\langle \bigwedge_{j=1}^p \bar{\partial} \left(\frac{1}{f_j} \right), \varphi \right\rangle = \left\langle \bigwedge_{j=1}^p \bar{\partial} \left(\frac{1}{f_j} \right), P_M[\psi] d\zeta \right\rangle,$$

où

$$P_M[\psi] := \sum_{l_1 + \cdots + l_n \leq M} \frac{1}{l_1! \cdots l_n!} \frac{\partial^{|l|}}{\partial^l \zeta} [\psi](\alpha) (\zeta_1 - \alpha_1)^{l_1} \cdots (\zeta_n - \alpha_n)^{l_n},$$

avec M supérieur ou égal à l'ordre²⁶ du courant $R_E[s]$ au point α (ceci a un sens car α est un point isolé du support de ce courant). Ceci contribue à faire de l'objet ainsi construit un objet algébrique extensivement étudié ([**GH, Ha2, Lip**]) dans les questions de dualité. En effet, le cadre intersection complète permet de donner une version affinée du théorème 2.40. C'est le *théorème de dualité*.

THEORÈME 2.52. *Soit A une intersection complète globale d'une variété de Stein X , A étant défini comme le lieu des zéros d'une section holomorphe s d'un fibré holomorphe $E \rightarrow X$ de rang p . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $hR_E[s] \equiv 0$ au sens des courants dans X ;
- (2) *il existe une section holomorphe a du fibré E^* telle que $h = \lfloor_s a$, i.e. h_z est, pour tout z de X , dans l'idéal $(\mathcal{J}[s])_z$, où $\mathcal{J}[s]$ désigne le faisceau cohérent d'idéaux introduit à l'exemple 2.13.*

DÉMONSTRATION. L'implication (1) \implies (2) résulte du théorème 2.40. Pour ce qui est de (2) \implies (1), le fait que h annule $R_E[s]$ lorsque $h = \lfloor_s a$ se teste localement : si f_1, \dots, f_p sont des fonctions holomorphes définissant une intersection complète dans un ouvert U de \mathbb{C}^n , et si φ est une $(n, n-p)$ -forme test dans U , on peut écrire, par exemple si $h = a_1 f_1$, en utilisant la formule de Stokes, pour $\text{Re } \lambda$ grand :

$$\int_U a_1 f_1 \left(\bigwedge_{j=1}^p \bar{\partial} \left(\frac{|f_j|^{2\lambda}}{f_j} \right) \right) \wedge \varphi = (-1)^p \int_U a_1 |f_1|^{2\lambda} \left(\bigwedge_{j=2}^p \bar{\partial} \left(\frac{|f_j|^{2\lambda}}{f_j} \right) \right) \wedge \bar{\partial} \varphi.$$

Or la fonction méromorphe de deux variables

$$(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \int_U a_1 |f_1|^{2\lambda_1} \left(\bigwedge_{j=2}^p \bar{\partial} \left(\frac{|f_j|^{2\lambda_2}}{f_j} \right) \right) \wedge \bar{\partial} \varphi$$

est holomorphe dans le produit de demi-plans $\text{Re } \lambda_1 > -\eta$ et $\text{Re } \lambda_2 > -\eta$ pour η suffisamment petit (remarque 2.51). La valeur en 0 de cette fonction est donc

$$\left\langle \bigwedge_{j=2}^p \bar{\partial} \left(\frac{1}{f_j} \right), \bar{\partial}[a_1 \varphi] \right\rangle = 0$$

puisque le courant résiduel $\bigwedge_{j=2}^p \bar{\partial}(1/f_j)$ est $\bar{\partial}$ -fermé. □

Ce théorème très important, tant en analyse qu'en géométrie pluricomplexe, est étroitement lié du point de vue de ses applications au résultat suivant, dit *loi de transformation* ([**GH, DS2**]), dont nous donnons ici une formulation géométrique.

PROPOSITION 2.13. *Soit $E \rightarrow X$ un fibré holomorphe de rang p au dessus d'une variété analytique complexe X , s et \tilde{s} deux sections holomorphes de E telles que :*

- $\dim V(s) = \dim V(\tilde{s}) = n - p$;
- $\mathcal{J}[\tilde{s}] \subset \mathcal{J}[s]$.

Il existe alors une section A de $E^ \wedge E \simeq \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E^*, E^*)$ telle que $\lfloor_s A = \tilde{s}$ et l'on a*

$$(2.50) \quad R_E[s] = \det A \cdot R_E[\tilde{s}]$$

(au sens des courants).

²⁶Il s'avère en fait que cet ordre est strictement plus petit que la multiplicité de Hilbert-Samuel de $(\mathcal{O}_{X,\alpha}, (\mathcal{J}[s])_\alpha)$.

REMARQUE 2.53. La proposition 2.13 est immédiate lorsque l'on suppose que $\mathcal{J}[\bar{s}] = \mathcal{J}[s]$, ce qui revient à supposer que $\det A$ est une fonction holomorphe inversible sur X . La formule (2.50) résulte alors simplement du fait que $R_E[s]$ est un courant à valeurs dans le fibré $\det E^* = \bigwedge^p E^*$.

DÉMONSTRATION. La preuve de la loi de transformation se ramène localement à prouver que si (f_1, \dots, f_p) et (g_1, \dots, g_p) sont des suites quasi-régulières dans $H(U)$, où U est un ouvert de \mathbb{C}^n , et si $g = Af$, A étant une matrice $p \times p$ à entrées dans $H(U)$, alors

$$(2.51) \quad \det A \times \bigwedge_{j=1}^n \bar{\partial} \left(\frac{1}{g_j} \right) = \bigwedge_{j=1}^n \bar{\partial} \left(\frac{1}{f_j} \right)$$

(au sens des courants). Pour une preuve dans le cas $p = n$, voir [GH], chapitre 6. Le cas $p < n$ se ramène à ce cas en complétant les systèmes (f_1, \dots, f_p) et (g_1, \dots, g_p) par $n-p$ fonctions affines à coefficients génériques. Pour prouver la loi de transformation dans le cadre $p = n$, il suffit (d'après la proposition 2.7) de montrer que si φ est une $(n, 0)$ -forme $\bar{\partial}$ -fermée au voisinage de $V(f) \cup V(g)$, on a

$$(2.52) \quad \left\langle \det A \bigwedge_{j=1}^n \bar{\partial} \left(\frac{1}{g_j} \right), \varphi \right\rangle = \left\langle \bigwedge_{j=1}^n \bar{\partial} \left(\frac{1}{f_j} \right), \varphi \right\rangle.$$

D'après (2.49) et le fait que la fonction

$$(\eta_1, \dots, \eta_n) \mapsto \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{j=1, \dots, n}^{|f_j|^2 = \eta_j} \frac{\varphi}{f_1 \cdots f_n}$$

est constante au voisinage de l'origine, on a

$$\begin{aligned} & \left\langle \bigwedge_{j=1}^n \bar{\partial} \left(\frac{1}{f_j} \right), \varphi \right\rangle \\ &= \sum_{\alpha \in V(f) \cap \text{Supp } \varphi} \frac{(-1)^{n(n-1)/2} (n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\partial B(\alpha, \epsilon_\alpha)} \frac{\left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \bar{f}_j \bigwedge_{l \neq j} \bar{d}f_l \right) \wedge \varphi}{|f|^{2n}}, \end{aligned}$$

ou, pour chaque α , $B(\alpha, \epsilon_\alpha)$ désigne une boule fermée de rayon suffisamment petit autour du point α , ne contenant que α comme seul zéro de f . Grâce à la formule de Stokes, nous avons aussi

$$(2.53) \quad \begin{aligned} \left\langle \bigwedge_{j=1}^n \bar{\partial} \left(\frac{1}{f_j} \right), \varphi \right\rangle &= \frac{(-1)^{n(n-1)/2} (n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U_0} \frac{\left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \bar{f}_j \bigwedge_{l \neq j} \bar{d}f_l \right) \wedge \varphi}{|f|^{2n}} \\ &= \frac{(-1)^{n(n-1)/2} (n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U_0} \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \xi_j \bigwedge_{l \neq j} d\xi_l \right) \wedge \varphi, \end{aligned}$$

où U_0 est un ouvert relativement compact dans U et à frontière C^1 , contenant dans son intérieur tous les points de $(V(f) \cup V(g)) \cap \text{Supp } \varphi$ et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ est une application de classe C^1 au voisinage de ∂U_0 , telle que $\xi_1 f_1 + \cdots + \xi_n f_n \equiv 1$ au voisinage de ∂U_0 . Or on remarque que si $(\varpi_1, \dots, \varpi_n)$ est une fonction de classe C^1 au voisinage de ∂U_0 telle que $\varpi_1 g_1 + \cdots + \varpi_n g_n \equiv 1$ au voisinage de ∂U_0 , $\xi = {}^t A \varpi$

vérifie $\xi_1 f_1 + \cdots + \xi_n f_n \equiv 1$ au voisinage de ∂U_0 et peut donc être utilisée comme « section » dans la formule de représentation (2.53). L'égalité (2.52) en découle. \square

REMARQUE 2.54. La *loi de transformation*, pendant algébrique du théorème de Wiebe (voir [ElKM, Ku]), admet de fait de nombreuses généralisations ou variantes, utiles à la résolution des problèmes de division *via* des méthodes de dualité inspirées de l'approche de Jacobi-Kronecker (voir par exemple [BY1, BY2, BoH, ElKM, Ky, TsiY]).

2.5.6. Factorisation du courant d'intégration. Soit $(E \rightarrow X, | \cdot |)$ un fibré holomorphe de rang m au dessus d'une variété analytique complexe X de dimension n , que l'on suppose équipé d'une métrique hermitienne et s une section holomorphe de ce fibré, avec $Y = \text{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}[s])$. On note $L_s \rightarrow X \setminus Y$ le fibré en droites généré par s au dessus de $X \setminus Y$ et $C(E|_{X \setminus Y}/L_s, | \cdot |)$ la forme de Chern (sur $X \setminus Y$) du fibré quotient $E|_{X \setminus Y}/L_s$, équipé de la métrique hermitienne induite par la métrique $| \cdot |$. Le théorème 2.23, complété par l'étude faite dans l'exemple 2.35, montre que cette forme de Chern se prolonge en une forme localement intégrable dans X et que l'on définit un courant positif $M_{E, | \cdot |}[s]$, à valeurs dans $\bigoplus_{k=0}^m \mathcal{D}'^{k,k}(X)$ en considérant la valeur en $\lambda = 0$ de

$$\lambda \longmapsto \frac{1}{2i\pi} \bar{\partial}|s|^{2\lambda} \wedge \partial \log |s|^2 \wedge C(E|_{X \setminus Y}/L_s, | \cdot |).$$

Si p désigne la codimension de Y , la composante (p, p) de ce courant est exactement la composante de dimension $n-p$ du cycle associé au faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{J}[s]$ (théorème 2.23). Pour une valeur $k \geq p$, la partie singulière (dans la stratification de Siu (2.28), (2.30)) de ce courant fait apparaître les *composantes distinguées* du cycle associé au faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{J}[s]$ (voir l'exemple 2.35).

Le courant résiduel $R_{E, | \cdot |}[s]$ est impliqué dans une *factorisation* du courant $M_{E, | \cdot |}[s]$. On a en effet le premier résultat suivant ([And3, Meo2]) :

PROPOSITION 2.14. *Si $Y = \text{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}[s])$ est de codimension p et que $M_{E, | \cdot |}^p[s]$ désigne la composante de type (p, p) de $M_{E, | \cdot |}[s]$, on a*

$$(2.54) \quad M_{E, | \cdot |}^p[s] = [C(\mathcal{J}[s])_{n-p}] = R_{E, | \cdot |}[s] \bullet \frac{(D_{E, | \cdot |}[s])^p}{p!},$$

où $D_{E, | \cdot |}$ désigne la connexion de Chern du fibré hermitien $(E \rightarrow X, | \cdot |)$, l'opération indiquée ici \bullet étant l'opération naturelle de « contraction » entre $\bigwedge^p E^*$ et $\bigwedge^p E$.

En reprenant les notations et le formalisme de la section 1.3, il est possible d'énoncer le résultat de factorisation complet, dû à M. Andersson [And3].

PROPOSITION 2.15. *Le courant positif $M_{E, | \cdot |}[s]$ se factorise au travers du courant $R_{E, | \cdot |}[s]$ suivant la formule*

$$(2.55) \quad M_{E, | \cdot |}[s] = \int_e \exp\left(\tilde{\Gamma} + \frac{i}{2\pi} \left(\tilde{\Theta}_{E, | \cdot |} - D_{E, | \cdot |}[s]\right)\right) \wedge R_{E, | \cdot |}[s].$$

DÉMONSTRATION. Ces propositions se démontrent dans un premier temps facilement lorsque le fibré est trivial (ainsi que la métrique). Le cas général se démontre en « redressant » la situation. Nous admettrons ici ces résultats. \square

2.6. La formule de Lelong-Poincaré

Si s est une section holomorphe d'un fibré holomorphe en droites (équipé d'une structure hermitienne $|\cdot|$) $L \rightarrow X$ au dessus d'une variété analytique complexe, nous avons aisément la formule

$$(2.56) \quad -dd^c \log |s|^2 + [\operatorname{div}(s)] = c_1(E, |\cdot|)$$

dite *formule de Lelong-Poincaré* (voir (1.16)). Pour étendre cette formule au cadre des sections holomorphes de fibrés de rang supérieur, il nous faut revenir aux notations de la section 1.3 du chapitre 1.

Nous considérons ici une section holomorphe s d'un fibré de rang m d'une variété analytique complexe et ré-introduisons, si $Y := \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}[s])$, reprenant les notations de la section (2.3.2), la forme de Chern $C(E_{|X \setminus Y}/L_s, |\cdot|)$ du fibré quotient $E_{|X \setminus Y}/L_s \rightarrow X \setminus Y$. On rappelle que cette forme se prolonge en une forme localement intégrable dans X , comme d'ailleurs

$$-\log(|s|^2) C(E_{|X \setminus Y}/L_s, |\cdot|)$$

dont les singularités sont, notons le d'ailleurs, au plus logarithmiques dans X .

Reprenons aussi la section σ , section holomorphe du fibré dual $E^* \rightarrow X$ et de norme minimale telle que $\langle \sigma, s \rangle = 1$ (voir (2.34), section qui nous a permis au paragraphe 2.5.2 de construire les courants résiduels et de « visualiser » ainsi l'obstruction à l'exactitude du complexe de Koszul (section 2.5.3). La forme de Chern $C(E_{|X \setminus Y}/L_s, |\cdot|)$ se représente suivant les notations de la section 1.3 sous la forme

$$\begin{aligned} C(E_{|X \setminus Y}/L_s, |\cdot|) &= \int_e s \wedge \sigma \wedge \exp\left(\tilde{I} + \frac{i}{2\pi}(\tilde{\Theta}_{E,|\cdot|} - D_{E,|\cdot|}[s] \wedge \bar{\partial}\sigma)\right) \\ &= \int_e s \wedge \sigma \wedge \left(\tilde{I} + \frac{i}{2\pi}(\tilde{\Theta}_{E,|\cdot|} - D_{E,|\cdot|}[s] \wedge \bar{\partial}\sigma)\right)_{m-1} \end{aligned}$$

(voir [**And3**], proposition 4.2, pour le détail des calculs, par ailleurs très algébriques, et que nous omettrons). On pose dans $X \setminus Y$

$$(2.57) \quad \begin{aligned} W[s] &:= -\log(|s|^2) C(E_{|X \setminus Y}/L_s, |\cdot|) \\ &- \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k}{k} \int_e s \wedge \sigma \wedge \left(\tilde{I} + \frac{i}{2\pi}(\tilde{\Theta}_{E,|\cdot|} - D_{E,|\cdot|}[s] \wedge \bar{\partial}\sigma)\right)_{m-1-k} \\ &\wedge \left(-\frac{i}{2\pi} D_{E,|\cdot|}[s] \wedge \bar{\partial}\sigma\right)_k. \end{aligned}$$

La formule de Lelong-Poincaré se présente sous la forme suivante ([**Meo2**, **And3**]), résultat que nous admettrons ici, mais qu'il nous paraît important de mentionner au vu des applications récentes (notamment en arithmétique ou en dynamique holomorphe) de formules de ce type, en relation en particulier avec l'équation de Green (voir [**GS**, **BGS**, **DinhS**]).

THEOREME 2.55. *La forme C^∞ notée $W[s]$ et définie dans $X \setminus Y$ par (2.57) s'étend à X en une forme différentielle à singularités logarithmiques sur $Y :=$*

$\text{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}[s])$. De plus, on a, au sens des courants :

$$(2.58) \quad \begin{aligned} & dd^c(W[s]) + \left[\left(\frac{1}{2i\pi} \right) \bar{\partial}|s|^{2\lambda} \wedge \partial \log |s|^2 \wedge C(E|_{X \setminus Y}/L_s, | |) \right]_{\lambda=0} \\ &= C(E, | |) - C(E|_{X \setminus Y}/L_s, | |). \end{aligned}$$

REMARQUE 2.56. Si $Y = \text{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}[s])$ est de codimension p , il résulte de la formule (2.58) et du théorème 2.23 que l'on a en particulier

$$(2.59) \quad dd^c(W[s]_{p-1,p-1}) + [C(\mathcal{J}[s])_{n-p}] = c_p(E, | |) - c_p(E|_{X \setminus Y}/L_s, | |).$$

Dans le cas des fibrés en droites ($m = 1$), on retrouve la formule (2.56) classique.

Autour des idées de Hodge en géométrie complexe

L'objectif de ce chapitre est de développer les concepts d'analyse harmonique [**Hod**] dans le cadre des *variétés analytiques complexes équipées de métriques hermitiennes* ou des *fibrés hermitiens holomorphes* au dessus de telles variétés. Après avoir présenté ce cadre hermitien (section 3.1), nous ferons une incursion dans le cadre riemannien (plus large) avant de revenir au cœur de ce chapitre, avec le *théorème de décomposition de Hodge* dans le cadre des variétés *kähleriennes*. On dégagera ensuite les notions de *positivité* et d'*amplitude* pour les fibrés, analyserons quelques liens entre elles, puis esquisserons une brève présentation à des *théorèmes d'annulation* ou des résultats caractérisant l'algébricité des objets (*théorème de plongement de Kodaira*). Les références majeures ici seront les chapitres 6 et 7 du livre de J.P. Demailly [**De0**], ainsi que les chapitres 0 et 1 du livre de P. Griffiths et J. Harris [**GH**].

3.1. Structures hermitiennes ou kähleriennes

Dans ce chapitre (au moins à partir de la section 3.2), nous allons adopter un cadre hermitien non seulement pour les fibrés construits au dessus d'une variété analytique complexe X , mais sur la variété analytique complexe elle-même. Introduisons dès à présent ce point de vue. Dans cette section, X désignera une variété analytique complexe de dimension n .

DÉFINITION 3.1. Une *structure hermitienne* sur une variété analytique complexe X est la donnée d'une métrique hermitienne sur le fibré tangent complexe $T(X) \simeq T_X^{1,0} \simeq T^{1,0}(\mathcal{X})$, métrique que l'on convient d'exprimer en coordonnées locales sous la forme

$$h(z) := \sum_{1 \leq j, k \leq n} h_{jk}(z) dz_j \otimes d\bar{z}_k,$$

où $[h_{jk}(z)]_{1 \leq j, k \leq n}$ est une matrice hermitienne positive dépendant de z de manière C^∞ , ce qui signifie que si ξ_1 et ξ_2 sont deux éléments

$$\xi_l = \sum_{j=1}^n \xi_{lj} \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad l = 1, 2,$$

de la fibre $T_z(X)$,

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{h(z)} = \sum_{1 \leq j, k \leq n} h_{jk}(z) \xi_{1j} \bar{\xi}_{2k}.$$

Suivant la remarque 2.2, on peut coupler à la donnée d'une métrique hermitienne h sur une variété analytique complexe la $(1, 1)$ forme C^∞ positive sur X définie

localement comme

$$(3.1) \quad \omega = \frac{i}{2} \sum_{1 \leq j, k \leq n} h_{jk}(z) dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

qui associe au couple d'éléments (ξ_1, ξ_2) de $T_z(X)$ la quantité $-\text{Im} \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{h(z)}$. La définition 3.1 est alors complétée par la définition suivante, restreignant certes le cadre, mais très utile, celle de *structure kählérienne*.

DÉFINITION 3.2. Une structure hermitienne h sur une variété analytique complexe est dite *kählérienne* si et seulement si la $(1, 1)$ -forme différentielle $\omega = -\text{Im} h$ définie par (3.1) est d -fermée. Une variété analytique complexe pouvant être équipée d'une structure kählérienne est dite *variété kählérienne*.

REMARQUE 3.3. Pour des raisons évidentes de bidegré, dire que ω est d -fermée équivaut à dire $\partial\omega = \bar{\partial}\omega = 0$.

EXEMPLE 3.4. Le prototype de variété kählérienne est l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, la $(1, 1)$ -forme ω attachée à la métrique kählérienne *via* (3.1) étant dans ce cas la forme différentielle

$$dd^c \log(|z_0|^2 + \dots + |z_n|^2)$$

exprimée en coordonnées homogènes. Toutes les sous-variétés de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont donc des variétés kählériennes (comme sous-variétés de variétés kählériennes). Ceci peut aussi être étendu au cadre plus général des variétés toriques complètes lisses, telles qu'elle ont été introduites dans l'exemple 1.31 à partir d'un éventail simplicial de l'espace affine \mathbb{R}^n . On a vu (au cours de l'étude faite dans l'exemple 1.31) que l'on disposait sur une telle variété d'un jeu de coordonnées homogènes (z_1, \dots, z_{n+r}) , en correspondance avec les arêtes (i.e. faces de dimension 1) de l'éventail, ce de manière à ce que la variété se réalise comme le quotient géométrique (1.25). Si Δ désigne un polytope de l'espace dual $(\mathbb{R}^n)^*$ supposé simple (chaque sommet correspond exactement à n arêtes), il lui correspond par dualité un éventail de \mathbb{R}^n (dit *dual* de Δ) de la manière suivante : la relation d'équivalence sur l'espace affine dual $\mathbb{R}^n = ((\mathbb{R}^n)^*)^*$ donnée par

$$\begin{aligned} v_1 \mathcal{R}_\Delta v_2 &\iff \{\xi^* \in \Delta ; \langle v_1, \xi^* \rangle = \min_{\eta^* \in \Delta} \langle v_1, \eta^* \rangle\} \\ &= \{\xi^* \in \Delta ; \langle v_2, \xi^* \rangle = \min_{\eta^* \in \Delta} \langle v_2, \eta^* \rangle\} \end{aligned}$$

est telle que les adhérences (au sens de la topologie usuelle de l'espace affine \mathbb{R}^n) des classes d'équivalence qu'elle définit constituent un éventail simplicial de \mathbb{R}^n . Si P est un polynôme de Laurent à coefficients positifs ou nuls dont le polyèdre de Newton est égal à Δ , la forme

$$\omega = dd^c \log(P(|z_1|^2, \dots, |z_n|^2))$$

définit une forme kählérienne sur le tore \mathbb{T}^n . Exprimée en coordonnées homogènes sur la variété torique correspondant à l'éventail ainsi construit, cette forme induit, une fois prolongée, une structure kählérienne sur cette variété torique (qui est vue comme compactification de $(\mathbb{C}^*)^n$). On pourra par exemple se reporter à [ShTY] pour plus de détails sur ces constructions de structures kählériennes sur les variétés toriques simpliciales, appelées aujourd'hui à jouer un rôle dans les questions d'*effectivité polynomiale avec données « creuses »*, voire même dans des questions actuelles en relation avec la physique théorique ou la dynamique (*symétrie miroir*,

amibes et *co-amibes*, voir [PR, GKZ], etc.) On pourra faire aussi l'exercice 3.5 suivant concernant l'exemple très simple (mais important!) du produit de deux espaces projectifs.

EXERCICE 3.5. Proposer (en l'exprimant en termes de coordonnées homogènes) une structure kählérienne sur le produit $\mathbb{P}^{n_1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^{n_2}(\mathbb{C})$.

EXEMPLE 3.6. L'exemple des surfaces de Riemann compactes (de genre $g \geq 1$) est un autre exemple important. Rappelons que le genre g d'une telle surface est la dimension de l'espace des 1-formes holomorphes de première espèce, i.e s'écrivant en coordonnées locales $f(z)dz$ avec f holomorphe (on les appelle aussi *formes abéliennes*). Le genre d'une surface de Riemann compacte s'interprète aussi de manière topologique, comme on l'a vu dans l'exemple 1.19, comme le nombre de « trous » (ou l'ordre de « multi-connexité » par référence à l'épithète « *simplement connexe* » pour les surfaces de genre 0) de la surface topologique¹ sous-jacente \mathcal{X} à la surface de Riemann X . Il existe, pour tout point z_0 d'une telle surface de Riemann X , une forme différentielle de première espèce ω_{z_0} ne s'annulant pas en z_0 . Cela résulte du *théorème de Riemann-Roch* : si d est un diviseur sur X , $l(d)$ la dimension de l'espace des fonctions f méromorphes sur X telles que $\text{div}(f) + d$ soit *effectif*, on a

$$l(d) = l(\delta - d) + \text{deg } d - g + 1,$$

où δ est un représentant du diviseur canonique² (pour une preuve du théorème de Riemann-Roch, voir par exemple [Rey], chapitre 5, section 3³). Si l'on prend en particulier $d = \{z_0\}$ et si toute forme abélienne s'annulait en z_0 , on aurait $l(\delta - \{z_0\}) = g$ car l'espace des formes abéliennes s'annulant en z_0 correspond à l'espace des fonctions méromorphes telles que $\text{div}(f) + \delta \geq \{0\}$ (à une forme différentielle méromorphe ω s'exprimant localement $f(z)dz$ correspond la fonction méromorphe s'exprimant localement $f(z)/g_0(z)$, où $g_0(z)dz$ et l'écriture locale d'une forme « de référence » df_0 , avec f_0 fonction méromorphe sur X). Ceci impliquerait $l(\{z_0\}) = 2$, donc l'existence d'une fonction méromorphe ayant un pôle simple au point z_0 et en ce point uniquement ; la surface de Riemann serait dans ce cas $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et l'on aurait $g = 0$, ce qui serait contradictoire avec l'hypothèse. Si l'on se donne une base $(\omega_k)_{k=1, \dots, g}$ de formes abéliennes sur X , la forme

$$\omega := \frac{i}{2} \sum_{k=1}^g \omega_k \wedge \bar{\omega}_k$$

induit une métrique hermitienne sur X , dite *métrique d'Arakelov*⁴. Nous avons ici une structure kählérienne puisque la forme ω ainsi définie est fermée.

¹Par surface topologique, on entend que l'on ne retient que le caractère continu des morphismes de transition.

²Le *diviseur canonique* est l'élément du groupe de Picard défini à partir d'une fonction méromorphe non constante f_0 de la manière suivante : si au voisinage de z_0 , df s'écrit $g_{z_0}(\zeta)d\zeta$, un représentant du diviseur canonique sera $\sum_{z_0} \nu_{z_0}(g_{z_0})\{z_0\}$; la classe de cet élément ne dépend pas du choix de la fonction méromorphe non constante f . Plus généralement, si X est une variété analytique complexe de dimension n (et non plus une surface de Riemann), le *fibré canonique* est le fibré en droites holomorphe $\wedge^n T(X)^*$.

³On pourrait d'ailleurs déduire ce théorème de la *théorie de Hodge* appliquée au cas particulier des surfaces de Riemann compactes, voir par exemple [De0], section 10 du chapitre 6.

⁴Pour une présentation de la *théorie d'Arakelov* sur les surfaces de Riemann (en relation avec la théorie du potentiel en une variable complexe) et son rôle en arithmétique (théorie arithmétique de l'intersection), on pourra se référer au livre introductif de S. Lang [Lang1]

Il est important de savoir caractériser les variétés kählériennes parmi les variétés hermitiennes. Nous donnons ici deux caractérisations.

PROPOSITION 3.1. *Soit X une variété hermitienne de dimension n . La métrique hermitienne h induit une structure kählérienne sur X si et seulement si, au voisinage de chaque point z_0 de X , on peut trouver un système holomorphe de coordonnées locales centré en z_0 dans lequel la métrique h s'exprime*

$$(3.2) \quad h(z) := 2 \sum_{1 \leq j, k \leq n} (\delta_{jk} + O(|z|^2)) dz_j \otimes d\bar{z}_k,$$

où δ_{jk} désigne le symbole de Kronecker.

DÉMONSTRATION. Si h s'exprime sous la forme (3.2) au voisinage de z_0 , on a $d\omega(z_0) = 0$ si $\omega = -\text{Im } h$ est la $(1,1)$ -forme définie par (3.1). Réciproquement, si h induit une structure kählérienne, et que l'on exprime la $(1,1)$ -forme ω en coordonnées locales au voisinage de z_0 de manière à ce que les $\partial/\partial z_j$ définissent un repère orthonormé de T_{X, z_0} , on peut écrire, dans le repère dual

$$(3.3) \quad \omega = \frac{i}{2} \sum_{1 \leq j, k, l \leq n} (\delta_{jk} + a_{jkl} z_l + \bar{a}_{kjl} \bar{z}_l + O(|z|^2)) dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

car ω est réelle. Le fait d'autre part que ω soit fermée implique $a_{lkj} = a_{jkl}$ pour tout j, l dans $\{1, n\}$. On peut faire disparaître les termes du premier ordre en effectuant le changement de variables

$$z_k = w_k + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j, l \leq n} a_{jkl} w_j w_l.$$

On voit immédiatement que la métrique h s'exprime bien sous la forme (3.2) dans le système de coordonnées locales (w_1, \dots, w_n) . \square

REMARQUE 3.7. Les termes du second ordre dans (3.3) peuvent être, dans un repère judicieux, explicités en termes du tenseur de courbure $\Theta_{T(X), h}$ du fibré tangent holomorphe relativement à la métrique hermitienne h dont il est équipé. La proposition 3.1 peut en effet être précisée si l'on utilise l'expression du tenseur de courbure

$$(3.4) \quad (\Theta_{T(X), h})_{z_0} = \sum_{\substack{1 \leq j, k \leq n \\ 1 \leq l, m \leq n}} c_{jklm} dw_j \wedge d\bar{w}_k \otimes \left(\frac{\partial}{\partial w_l} \otimes dw_m \right)$$

exprimé dans un système de coordonnées locales (w_1, \dots, w_n) centré en z_0 . Si la métrique h induit une structure kählérienne, il existe un système de coordonnées locales centré en z_0 tel que, dans ce système

$$(3.5) \quad h = 2 \sum_{1 \leq j, k \leq n} \left(\delta_{jk} - \sum_{1 \leq l, m \leq n} c_{jklm} w_l \bar{w}_m + O(|w|^3) \right) dw_j \otimes d\bar{w}_k,$$

où les c_{jklm} proviennent de l'expression (3.4) du tenseur de courbure $\Theta_{T(X), h}$ au point z_0 . Un tel système de coordonnées locales (w_1, \dots, w_n) est dit *repère géodésique*. On admet ici ce résultat précisant la proposition 3.1. On trouvera les calculs qui y conduisent dans la preuve du théorème 4.8 de [De0], chapitre 6.

La seconde caractérisation des variétés kählériennes parmi les variétés hermitiennes fait appel à la notion de *torsion* d'une métrique h sur le fibré tangent holomorphe $T(X)$, telle qu'elle a été introduite dans l'énoncé de la proposition 1.2.

PROPOSITION 3.2. *Soit X une variété hermitienne de dimension n . La métrique hermitienne h induit une structure kählérienne sur X si et seulement si, au voisinage de chaque point z_0 de X , la matrice $\tau_h[\xi^*]$, matrice de torsion de h exprimée dans un repère orthonormé ξ^* sur le fibré cotangent holomorphe $(T(X))^*$ au voisinage du point z_0 , est la matrice nulle. Dire que h induit une structure kählérienne équivaut donc géométriquement à dire que la torsion de la métrique h est partout nulle.*

DÉMONSTRATION. Si $h = \sum_{j,k} \xi_j^* \otimes \bar{\xi}_k^*$ et $\omega = (i/2) \sum_{j,k} \xi_j^* \wedge \bar{\xi}_k^*$, un calcul immédiat montre que si

$$d\xi_j^* = \sum_{k=1}^n a_{jk} \wedge \xi_k^* + \tau_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

où les a_{jk} sont des 1-formes, τ_j une $(2, 0)$ forme avec en plus $A^* = -A$, montre que

$$d\omega = \sum_{j=1}^n (\tau_j \wedge \bar{\xi}_j^* - \xi_j^* \wedge \bar{\tau}_j).$$

Pour des raisons évidentes de bidegré, on voit que la condition $d\omega = 0$ équivaut à la condition $\tau = 0$. On conclut en utilisant la définition de la matrice de torsion $\tau_h[\xi^*]$ donnée en (1.17). \square

3.2. Opérateurs différentiels sur les fibrés (cadre riemannien)

Tout ce que nous ferons dans cet section concerne le cadre différentiable réel et non spécifiquement analytique complexe. Nous oublions donc pour un temps la structure complexe et travaillerons sur une variété différentiable réelle \mathcal{X} de dimension N (appelée plus tard à devenir la variété réelle sous-jacente à une variété analytique complexe de dimension $N/2$), que nous supposerons très vite compacte, orientable, et équipée d'une métrique riemannienne matérialisée par une forme volume $dV_{\mathcal{X}}$. Ce n'est que plus loin que nous reviendrons au cadre analytique complexe introduit en section 3.1 pour y particulariser les notions que nous aurons introduit dans ce cadre riemannien plus général.

3.2.1. Adjoint formel ; symbole principal et ellipticité.

DÉFINITION 3.8. Soient $E \rightarrow \mathcal{X}$ et $F \rightarrow \mathcal{X}$ deux \mathbb{K} -fibrés vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), respectivement de rangs m et m' au dessus d'une variété différentiable \mathcal{X} de dimension (ici réelle) N . On appelle *opérateur différentiel* de degré M de E dans F toute application \mathbb{K} -linéaire de $C^\infty(\mathcal{X}, E)$ dans $C^\infty(\mathcal{X}, F)$ s'exprimant matriciellement dans des repères (e_1, \dots, e_m) et (f_1, \dots, f_m') respectivement pour les fibrés restreints $E \rightarrow U$ et $F \rightarrow U$ (U étant un ouvert de carte de \mathcal{X} au dessus duquel E et F sont triviaux) par

$$P(D)[u_1 \otimes e_1 + \dots + u_m \otimes e_m] = v_1 \otimes f_1 + \dots + v_{m'} \otimes f_{m'},$$

où

$$(3.6) \quad \begin{bmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_{m'}(x) \end{bmatrix} = P(D)[u] = \sum_{|\alpha| \leq M} A_\alpha(x) D^\alpha \begin{bmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_m(x) \end{bmatrix},$$

A_α désignant, pour chaque multi-indice α de longueur au plus M , une matrice (m', m) de fonctions C^∞ dans l'ouvert U , toutes les matrices A_α , $|\alpha| = M$, n'étant pas identiquement nulles dans au moins un tel ouvert de carte U de \mathcal{X} .

À tout opérateur différentiel $E \rightarrow F$, on peut associer son *symbole principal* : c'est l'application polynomiale

$$\sigma_{P(D)} : T^*(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(E, F)$$

qui à (x, ξ) associe $\sigma_{P(D)}(x, \xi) \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(E_x, F_x)$, où $\sigma_{P(D)}$ est défini localement par :

$$\exp(-tw(x))P(D)[\exp(tw(x))] = t^M \sigma_{P(D)}(x, dw(x)) + \text{termes d'ordre inférieur en } t,$$

t désignant un paramètre dans le corps de base \mathbb{K} et $\exp(tw(x))$ l'opérateur de multiplication par la fonction $t \mapsto \exp(tw(x))$, w désignant ici une fonction de \mathcal{X} dans \mathbb{K} . Si l'action de $P(D)$, exprimée dans les repères (e_1, \dots, e_m) et $(f_1, \dots, f_{m'})$ respectivement pour $E \rightarrow \mathcal{X}$ et $F \rightarrow \mathcal{X}$, est donnée par (3.6), on a, si $((dx_1)_x, \dots, (dx_N)_x)$ désigne la base duale de $((\partial/\partial x_1)_x, \dots, (\partial/\partial x_N)_x)$ dans $T_x^*(X)$,

$$\sigma_{P(D)}\left(x, \sum_{j=1}^N \xi_j (dx_j)_x\right) = \sum_{|\alpha|=M} \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_N^{\alpha_N} A_\alpha(x)$$

(cette matrice à m' lignes et m colonnes étant celle d'un opérateur de E_x dans F_x , ces \mathbb{K} -espaces vectoriels étant rapportés respectivement aux bases $(e_1(x), \dots, e_m(x))$ et $(f_1(x), \dots, f_{m'}(x))$).

Si l'on compose deux opérateurs différentiels $P(D) : E \rightarrow F$ et $Q(D) : F \rightarrow G$, le symbole principal de l'opérateur $Q(D) \circ P(D) : E \rightarrow G$ est le produit des symboles $\sigma_{Q(D)} \circ \sigma_{P(D)}$.

Si E est équipé d'une structure euclidienne (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou hermitienne (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), structure que l'on notera \langle, \rangle , et que \mathcal{X} est orientable et munie d'une forme volume $dV_{\mathcal{X}}$, on introduit l'espace de Hilbert $L_{\mathbb{K}}^2(\mathcal{X}, E)$ des sections mesurables de E telles que

$$\int_{\mathcal{X}} |u(x)|^2 dV_{\mathcal{X}}(x) < +\infty,$$

équipé du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{L_{\mathbb{K}}^2(\mathcal{X}, E)} := \int_{\mathcal{X}} \langle u(x), v(x) \rangle_x dV_{\mathcal{X}}(x).$$

Si E et F sont tous les deux équipés de telles structures, l'opérateur $P(D)$ admet un *adjoint formel* défini par la *relation d'adjonction* :

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \langle P(D)[u], v \rangle_{L_{\mathbb{K}}^2(\mathcal{X}, F)} &= \langle u, P^*(D)[v] \rangle_{L_{\mathbb{K}}^2(\mathcal{X}, E)} \\ \forall u \in C^\infty(\mathcal{X}, E), \forall v \in C^\infty(\mathcal{X}, F) &\text{ avec } \text{Supp}(u) \cap \text{Supp}(v) \subset\subset \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Si la forme volume s'exprime en coordonnées locales (x_1, \dots, x_N) dans $\tau(U) \subset \mathbb{R}^N$ sous la forme

$$dV_{\mathcal{X}}(x) = \gamma(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N,$$

il est immédiat (par intégration par parties) de constater que l'adjoint formel de $P(D)$ (dont l'action au dessus de l'ouvert de carte U est décrite par (3.6)) est

donné dans cet ouvert U , pourvu que les repères (e_1, \dots, e_m) et $(f_1, \dots, f_{m'})$ soient tous deux orthonormés respectivement aux métriques sur $E \rightarrow \mathcal{X}$ et $F \rightarrow \mathcal{X}$ par

$$(3.8) \quad \begin{bmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_m(x) \end{bmatrix} = P^*(D)[v] = \sum_{|\alpha| \leq M} (-1)^{|\alpha|} \frac{1}{\gamma(x)} D^\alpha \left(\gamma(x)^t \overline{A_\alpha(x)} \begin{bmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_{m'}(x) \end{bmatrix} \right).$$

Le symbole principal de cet adjoint formel $P^*(D)$ est alors $(-1)^M \times \overline{[\sigma_{P(D)}]}$ (toujours lorsque l'action de $P(D)$ est exprimée dans des repères orthonormés pour $E \rightarrow \mathcal{X}$ et $F \rightarrow \mathcal{X}$). Une classe d'opérateurs différentiels sera appelée à jouer un rôle majeur, celle des *opérateurs elliptiques*, dont le modèle est évidemment le *laplacien* sur le fibré trivial $\mathcal{X} \times \mathbb{C}$.

DÉFINITION 3.9. Un opérateur $P(D) : C^\infty(\mathcal{X}, E) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}, E)$ est dit *elliptique* si et seulement si $\sigma_{P(D)}(x, \xi)$ est injectif pour tout $x \in \mathcal{X}$ et tout $\xi \in T_{\mathcal{X}, x}^* \setminus \{0\}$.

3.2.2. Structures métriques sur $(\bigwedge^\bullet T_{\mathcal{X}}^*) \otimes E$; l'opérateur Hodge star. Si E (de rang m) est équipé d'une métrique euclidienne ou hermitienne, cette métrique permet également de définir naturellement une métrique sur les fibrés $\bigwedge^p T_{\mathcal{X}}^* \otimes E$, $p = 0, \dots, N$ ($\bigwedge^0 T_{\mathcal{X}}^* \otimes E := E$). C'est déjà fait pour $p = 0$; pour $p = 1, \dots, N$, on dispose d'un produit scalaire naturel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur la fibre $\bigwedge^p T_{\mathcal{X}}^* \otimes E$, défini par

$$(3.9) \quad \left\langle (\varphi_1^* \wedge \dots \wedge \varphi_p^*) \otimes \epsilon, (\psi_1^* \wedge \dots \wedge \psi_p^*) \otimes \eta \right\rangle := \det \left([\langle \varphi_k^*, \psi_l^* \rangle]_{1 \leq k, l \leq p} \right) \times \langle \epsilon, \eta \rangle_{E_x},$$

qu'il convient ensuite de combiner avec l'intégration sur \mathcal{X} relativement à la forme volume $dV_{\mathcal{X}}$ sur \mathcal{X} (associée à la métrique riemannienne, i.e. $dV_{\mathcal{X}}(x) = \xi_1^*(x) \wedge \dots \wedge \xi_N^*(x)$, (ξ_1, \dots, ξ_N) désignant un repère orthonormé local de $T(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}$) pour définir le produit scalaire de deux sections u et v de $\bigwedge^p T_{\mathcal{X}}^* \otimes E$ (lorsque l'intersection de leurs supports est supposée compacte) par

$$\langle u, v \rangle := \int_{\mathcal{X}} \langle u(x), v(x) \rangle dV_{\mathcal{X}}(x).$$

Cette idée permet d'ailleurs de définir un opérateur, dit *Hodge star* :

$$\star : \bigwedge^p T_{\mathcal{X}}^* \otimes E \rightarrow \bigwedge^{N-p} T_{\mathcal{X}}^* \otimes E$$

de manière à ce que, pour toute p -forme u à valeurs dans E s'exprimant dans un repère

$$u = \sum_{k=1}^m u_k \otimes e_k$$

tandis que la p -forme v et la $(N-p)$ -forme $\star v$ s'expriment dans le même repère sous la forme

$$v = \sum_{l=1}^m v_l \otimes e_l \quad , \quad \star v = \sum_{l=1}^m v_l^* \otimes e_l,$$

on ait

$$(3.10) \quad [u, v]_E := \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m (u_k \wedge v_l^*) \langle e_k, e_l \rangle = \langle u(x), v(x) \rangle dV_{\mathcal{X}}.$$

Pour décrire l'action de \star sur une section v de $\bigwedge^p T_{\mathcal{X}}^*$, on se donne une base orthonormée

$$\xi_I^* := \xi_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge \xi_{i_p}^*, 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq N$$

de l'espace des p -formes (le produit scalaire ayant été défini en (3.9)), de manière à ce que v s'exprime localement dans un repère orthonormé pour E

$$v = \sum_{l=1}^m \sum_{|I|=p} v_{I,l} \xi_I^* \otimes e_l.$$

On constate alors que

$$(3.11) \quad \star v = \sum_{l=1}^m \sum_{|I|=p} \epsilon(I, I^c) v_{I,l} \xi_{I^c}^* \otimes e_l,$$

où I^c désigne $\{1, \dots, N\} \setminus I$ (ordonné suivant les indices croissants) et $\epsilon(I, I^c)$ la signature de la permutation qui transforme $\{1, 2, \dots, N\}$ (pris dans cet ordre) en $\{I, I^c\}$ (chacun des deux multi-indices étant pris dans l'ordre croissant).

REMARQUE 3.10. Comme $\epsilon(I, I^c) \times \epsilon(I^c, I) = (-1)^{p(N-p)} = (-1)^{p(N-1)}$, on constate que

$$(3.12) \quad \star \star v = (-1)^{p(N-1)} v$$

sur $(\bigwedge^p T_{\mathcal{X}}^*) \otimes E$. Il est d'autre part clair que \star réalise une isométrie de $(\bigwedge^{\bullet} T_{\mathcal{X}}^*) \otimes E$.

3.2.3. Espaces de Sobolev $W^k(\mathcal{X}, E)$ et décomposition associée à un opérateur elliptique. Dans cette sous-section, on suppose de plus \mathcal{X} compacte. Le fait d'avoir équipé E d'une structure euclidienne ou hermitienne permet d'introduire la hiérarchie des *espaces de Sobolev* $W^k(\mathcal{X}, E)$, $k \in \mathbb{N}$. Par définition, l'espace $W^k(\mathcal{X}, E)$ est le \mathbb{K} -sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathcal{X}, E) \simeq \mathcal{D}'^N(\mathcal{X}, E)$ (distributions sur \mathcal{X} à valeurs dans E , ou encore N -courants de \mathcal{X} dans E si l'on reprend la terminologie introduite dans la section 2.1.2) constitué des distributions dont toutes les dérivées (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre k sont dans $L^2(\mathcal{X}, E)$. Si \mathcal{X} est supposée compacte, cet espace est équipé de la norme $\|\cdot\|_k$ correspondante :

$$\|u\|_k^2 := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathcal{X}} \|D^\alpha u\|_x^2 dV_{\mathcal{X}}(x).$$

Nous rappelons ici les trois résultats majeurs concernant les espaces de Sobolev (dans ce contexte) que nous serons amenés à exploiter.

- (1) **Le lemme de Sobolev** assurant que pour $k \geq l + N/2$, l'espace de Sobolev $W^k(\mathcal{X}, E)$ est contenu dans $C^l(\mathcal{X}, E)$; en particulier, l'intersection de tous les $W^k(\mathcal{X}, E)$ est contenue dans $C^\infty(\mathcal{X}, E)$.
- (2) **Le lemme de Rellich** assurant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'injection

$$i_k : W^{k+1}(\mathcal{X}, E) \rightarrow W^k(\mathcal{X}, E)$$

est compacte.

- (3) **L'inégalité de Gårding**⁵ : si $\widetilde{P(D)}$ est l'extension à $\mathcal{D}'(\mathcal{X}, E)$ d'un opérateur elliptique $P(D) : E \rightarrow E$ de degré M ($E \rightarrow \mathcal{X}$ étant équipé d'une métrique euclidienne ou hermitienne) et si $u \in W^0(\mathcal{X}, E)$ est tel que $\widetilde{P(D)}[u] \in W^k(\mathcal{X}, E)$, on a

$$(3.13) \quad \|u\|_{k+M} \leq C_k(\mathcal{X}, P(D)) \left(\|\widetilde{P(D)}[u]\|_k + \|u\|_0 \right),$$

où $C_k(\mathcal{X}, P(D))$ est indépendante de u .

Dans ce contexte (\mathcal{X} est compacte, équipée d'une forme volume, $E \rightarrow \mathcal{X}$ d'une métrique euclidienne ou hermitienne), il vient, pour un opérateur elliptique $P(D) : C^\infty(\mathcal{X}, E) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}, E)$, la proposition suivante.

PROPOSITION 3.3. *Soit X une variété riemannienne compacte et $E \rightarrow X$ un \mathbb{K} fibré de rang m équipé d'une structure euclidienne ou hermitienne (suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Si $P(D)$ est un opérateur différentiel elliptique de E dans E de degré M , le noyau de $P(D) : C^\infty(\mathcal{X}, E) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}, E)$ est de dimension finie sur \mathbb{K} , l'image $\text{Im}(P(D)) := P(D)[C^\infty(\mathcal{X}, E)]$ est fermée, et l'on a l'importante décomposition*

$$(3.14) \quad C^\infty(\mathcal{X}, E) = \text{Im}(P(D)) \oplus \text{Ker}[P^*(D)].$$

DÉMONSTRATION. L'inégalité de Gårding assure $\|u\|_{k+M} \leq C_k \|u\|_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ si $u \in \text{Ker}[P(D)]$, ce qui implique, par le lemme de Sobolev, que $\text{Ker}[P(D)]$ est bien fermé dans $W^0(\mathcal{X}, E)$. La boule unité de $\text{Ker}(P(D))$ pour la norme $\|\cdot\|_0$ est incluse dans la boule de rayon C_k pour la norme $\|\cdot\|_{k+M}$, qui elle est compacte dans W^0 (donc aussi dans $\text{Ker}(P(D))$) par le lemme de Rellich. Le théorème de F. Riesz assure donc bien que $\text{Ker}(P(D))$ est de dimension finie.

L'opérateur $\widetilde{P(D)} : W^{k+M}(\mathcal{X}, E) \rightarrow W^k(\mathcal{X}, E)$ est d'image fermée dans $W^k(\mathcal{X}, E)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet, pour tout $\epsilon > 0$, il existe (d'après le lemme de Rellich) un nombre fini d'éléments $v_1, \dots, v_{N(\epsilon)}$ de $W^{k+M}(\mathcal{X}, E)$ tels que

$$(3.15) \quad \|u\|_0 \leq \epsilon \|u\|_{k+M} + \sum_{j=1}^{N(\epsilon)} |\langle u, v_j \rangle_0|.$$

On choisit $\epsilon = 1/(2C_k)$, où C_k est la constante impliquée dans l'inégalité de Gårding (3.13). On a alors, du fait de (3.15) et de l'inégalité de Gårding (3.13),

$$\|u\|_0 \leq C_k \left(\|\widetilde{P(D)}[u]\|_k + \|u\|_0 \right) \leq \frac{\|u\|_0}{2} + \frac{\sum_{j=1}^{N(\epsilon)} |\langle u, v_j \rangle_0|}{2} + C_k \|\widetilde{P(D)}[u]\|_k,$$

d'où

$$\|u\|_{k+M} \leq 2C_k \|\widetilde{P(D)}[u]\|_k$$

⁵On trouvera une preuve de l'inégalité de Gårding par exemple dans [GH], chapitre 1, pp. 97–100, dans le cas particulier où $k = 0$ et $P(D)$ est le $\bar{\partial}$ -laplacien défini, si \mathcal{X} est une variété analytique complexe X , à partir de l'opérateur de Dolbeault $\bar{\partial} : (T_X^{p,q})^* \rightarrow (T_X^{p,q-1})^*$ par $\Delta_{\bar{\partial}} = \Delta' := \bar{\partial} \circ \bar{\partial}^* + \bar{\partial}^* \circ \bar{\partial}$ (considéré sur $(T_X^{p,q})^*$). Dans ce cas particulier, l'inégalité lorsque $k = 0$ s'énonce

$$\|u\|_1^2 \leq C_0 (\|u\|_0^2 + \|\bar{\partial}u\|_0^2 + \|\bar{\partial}^*u\|_0^2)$$

et est en fait plus précise ($\|u\|_1^2$ au lieu de $\|u\|_2^2$ alors que $\Delta_{\bar{\partial}}$ est d'ordre 2) du fait que l'on profite ici du « scindage » de l'opérateur $\Delta_{\bar{\partial}}$.

pour toute section u dans $W^{k+M}(\mathcal{X}, E)$ orthogonale aux $v_j, j = 1, \dots, N(\epsilon)$. L'image de cet orthogonal par l'opérateur $\widetilde{P(D)}$ est donc fermée, comme l'est aussi

$$\widetilde{P(D)}(W^{k+M}(\mathcal{X}, E)),$$

puisque ce sous-espace s'obtient à partir du précédent en lui ajoutant le sous-espace de dimension finie engendré par les $\widetilde{P(D)}(v_j), j = 1, \dots, N(\epsilon)$.

On utilise alors le fait que l'image $\widetilde{P(D)}(W^M(\mathcal{X}, E))$ est fermée dans $W^0(\mathcal{X}, E)$. Comme $C^\infty(\mathcal{X}, E)$ est dense dans $W^M(\mathcal{X}, E)$, on a

$$(\widetilde{P(D)}[W^M(\mathcal{X}, E)])^\perp = (\widetilde{P(D)}[C^\infty(\mathcal{X}, E)])^\perp = \text{Ker}[\widetilde{P(D)}]^*.$$

On a ainsi la décomposition orthogonale

$$W^0(\mathcal{X}, E) = \widetilde{P(D)}[W^M(\mathcal{X}, E)] \oplus \text{Ker}[\widetilde{P(D)}]^*.$$

Du fait de l'ellipticité de $[P(D)]^*$, le noyau de $[\widetilde{P(D)}]^*$ est de dimension finie et contenu dans $C^\infty(\mathcal{X}, E)$. D'après à nouveau l'inégalité de Gårding, on a aussi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$W^k(\mathcal{X}, E) = \widetilde{P(D)}[W^{k+M}(\mathcal{X}, E)] \oplus \text{Ker}[\widetilde{P(D)}]^*,$$

et, en prenant l'intersection pour tous les $k \in \mathbb{N}$,

$$C^\infty(\mathcal{X}, E) = P(D)[C^\infty(\mathcal{X}, E)] \oplus \text{Ker}[P(D)]^*.$$

C'est bien la décomposition (3.14) voulue. \square

3.3. Opérateurs en géométrie riemannienne, hermitienne, kählérienne

3.3.1. L'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété riemannienne.

On considère dans cette sous-section une variété différentiable \mathcal{X} de dimension (réelle) N , orientable, et supposée équipée d'une forme volume $dV_{\mathcal{X}}$, comme dans la section 3.1 (par exemple une forme volume induite par une métrique euclidienne sur $T(\mathcal{X})$, i.e. une métrique riemannienne sur \mathcal{X}). On désignera par $E \rightarrow \mathcal{X}$ un \mathbb{K} -fibré vectoriel de rang m au dessus de \mathcal{X} , équipé d'une métrique euclidienne ou hermitienne.

L'opérateur $D = d$ que nous allons introduire ici dans un premier temps sera l'opérateur de de Rham :

$$d : \bigwedge^p T_{\mathcal{X}}^* \rightarrow \bigwedge^{p+1} T_{\mathcal{X}}^*, \quad p = 0, \dots, N.$$

Dans un second temps, nous envisageons E équipé en plus d'une connexion D_E compatible avec la structure euclidienne ou hermitienne dont il est muni (voir la section 1.2.1 au chapitre 1). L'opérateur de de Rham généralisé

$$D_E : \left(\bigwedge^p T_{\mathcal{X}}^* \right) \otimes E \rightarrow \left(\bigwedge^{p+1} T_{\mathcal{X}}^* \right) \otimes E, \quad p = 0, \dots, N,$$

agit cette fois au niveau local comme suit :

$$D_E \left[\sum_{j=1}^m \sigma_j \otimes e_j \right] = \sum_{j=1}^m \left(d\sigma_j + \sum_{k=1}^m a_{jk} \wedge \sigma_k \right) \otimes e_j,$$

où les a_{jk} sont des 1-formes.

PROPOSITION 3.4. *L'adjoint formel de l'opérateur d (agissant sur $\bigwedge^p T_{\mathcal{X}}^*$) est donné par*

$$(3.16) \quad d^* = (-1)^{pN+1} \star d \star ;$$

plus généralement, l'adjoint formel de l'opérateur D_E (considéré ici comme agissant sur $(\bigwedge^p T_{\mathcal{X}}^) \otimes E$) est donné par*

$$(3.17) \quad D_E^* = (-1)^{pN+1} \star D_E \star .$$

DÉMONSTRATION. On traite ici directement le cas général de l'opérateur D_E . Si u et v sont deux sections, l'une de $(\bigwedge^p T_{\mathcal{X}}^*) \otimes E$, l'autre de $(\bigwedge^{p+1} T_{\mathcal{X}}^*) \otimes E$, telles que l'intersection des supports soit compacte, on a (en utilisant la compatibilité de D_E avec la structure euclidienne ou hermitienne dont on a muni $E \rightarrow \mathcal{X}$, le théorème de Stokes et, pour finir, la relation (3.12)),

$$\begin{aligned} \langle D_E[u], v \rangle &= \int_{\mathcal{X}} \langle D_E[u], v \rangle dV_{\mathcal{X}} = \int_{\mathcal{X}} [D_E u, \star v] \\ &= \int_{\mathcal{X}} \left(d[u, \star v] - (-1)^p [u, D_E(\star v)] \right) \\ &= -(-1)^p (-1)^{p(N-1)} \int_{\mathcal{X}} [u, (\star \star D_E \star)(v)] \\ &= (-1)^{pN+1} \langle u, (\star D_E \star)(v) \rangle, \end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

DÉFINITION 3.11. Soit \mathcal{X} une variété différentiable orientée équipée d'une structure Riemannienne, $E \rightarrow \mathcal{X}$ un \mathbb{K} -fibré vectoriel équipé d'une structure euclidienne ou hermitienne (suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et D_E une connexion sur E compatible avec cette structure. L'opérateur de Laplace-Beltrami Δ_E est par définition l'opérateur différentiel d'ordre 2 sur $\bigwedge^p T_{\mathcal{X}}^*$, $p = 1, \dots, N$, par

$$\Delta_E := D_E^* \circ D_E + D_E \circ D_E^* = (-1)^{Np+1} (\star D_E \star D_E + (-1)^N D_E \star D_E \star).$$

REMARQUE 3.12. Lorsque N est pair, on a

$$\Delta_E = -(\star D_E \star D_E + D_E \star D_E \star).$$

EXEMPLE 3.13. Dans le cas particulier où \mathcal{X} est un ouvert U de \mathbb{R}^N et $E = U \times \mathbb{C}$, la métrique sur \mathbb{R}^N étant la métrique euclidienne usuelle, un calcul facile (qu'on laisse ici en exercice) montre que l'opérateur de Laplace-Beltrami associe dans ce cas à la p -forme $u = \sum_{|I|=p} u_I dx_I$ la p -forme $\Delta_E[u] = -\sum_{|I|=p} \Delta u dx_I$. Ceci justifie l'épithète « laplacien » ainsi que la notation Δ_E utilisée (voir l'exemple 3.12 dans [De0] pour le détails des calculs). La preuve repose sur le fait que, dans ce cas

$$(3.18) \quad d^* u = - \sum_{|I|=p} \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial u_I}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] dx_I,$$

où \rfloor désigne ici l'opérateur de contraction des formes par un champ de vecteurs :

$$(3.19) \quad \xi \rfloor u(\xi_1, \dots, \xi_{p-1}) = u(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{p-1}).$$

L'opérateur de Laplace-Beltrami Δ_E introduit dans la définition 3.11 est, pour $p = 1, \dots, N$, un opérateur différentiel du second ordre ($M = 2$) de $C^\infty(\mathcal{X}, \bigwedge^p T_{\mathcal{X}}^* \otimes E) = C_p^\infty(\mathcal{X}, E)$ dans lui-même (au sens de la définition 3.8, on dit aussi un opérateur différentiel de $\bigwedge^p T_{\mathcal{X}}^* \otimes E$ dans lui-même) qui est elliptique (au sens de la définition 3.9). En effet, si la forme u s'exprime comme

$$u = \sum_{j=1}^m \sum_{|I|=p} u_{I,j} \xi_I^* \otimes e_j$$

dans une base $(\xi_I^*)_{|I|=p}$ orthonormée pour $\bigwedge^p T_{\mathcal{X}}^*$ (comme introduite dans la section 3.2.2), on voit que la partie de degré 2 de $P(D) = \Delta_E$ associée à u la forme

$$- \sum_{j=1}^m \sum_{|I|=p} \left(\sum_{k=1}^N \xi_j^2[u_{I,j}] \right) \otimes e_j,$$

où (ξ_1, \dots, ξ_N) est la base de champs de vecteurs duale du système orthonormé de 1-formes $(\xi_1^*, \dots, \xi_N^*)$. C'est essentiellement le même calcul que celui effectué dans l'exemple 3.13.

Si la connexion D_E est telle que $D_E^2 = 0$ (i.e. la courbure est nulle, ou encore la connexion est « plate »), l'opérateur de de Rham généralisé D_E permet de définir un *complexe de de Rham généralisé*

$$\dots \xrightarrow{D_E} C_p^\infty(\mathcal{X}, E) \xrightarrow{D_E} C_{p+1}^\infty(\mathcal{X}, E) \xrightarrow{D_E} \dots,$$

et des groupes de cohomologie de de Rham associés, notés $H_{\text{DR}}^p(\mathcal{X}, E)$ (quotient du \mathbb{K} -sous-espace de $C_p^\infty(\mathcal{X}, E)$ constitué des u tels que $D_E u = 0$ par l'image par D_E de $C_{p-1}^\infty(\mathcal{X}, E)$).

REMARQUE 3.14. Etant donné un \mathbb{K} -fibré $E \rightarrow \mathcal{X}$ au dessus d'une variété différentiable, équipé d'une métrique euclidienne ou hermitienne, il n'est pas toujours possible de trouver une connexion plate D_E compatible avec cette métrique ! Si \mathcal{X} est connexe et si $\pi_1(\mathcal{X})$ désigne le groupe d'homotopie des lacets de point de base arbitraire $x_0 \in \mathcal{X}$, on peut construire un tel fibré E (de rang m) en considérant un \mathbb{K} -espace vectoriel \mathbb{V} de dimension m muni d'une action à gauche du groupe $\pi_1(\mathcal{X})$ et considérer le fibré E obtenu comme le quotient sous l'action du $\pi_1(\mathcal{X})$ de $\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{V}$, où $\tilde{\mathcal{X}}$ désigne le *revêtement universel*⁶ de la variété \mathcal{X} . Tout \mathbb{K} -fibré euclidien ou hermitien pouvant être muni d'une connexion plate compatible avec la structure se réalise de cette manière (voir [De0], chapitre 5, section 6). Les groupes de cohomologie de de Rham ne dépendent pas en fait (à isomorphisme près) de la connexion plate D_E dont le \mathbb{K} -fibré euclidien ou hermitien E se trouve équipé, pourvu que cette connexion soit compatible avec la structure. Ils ne dépendent que du fibré euclidien ou hermitien E lui-même, et il est donc licite de les noter $H_{\text{DR}}^p(\mathcal{X}, E)$.

DÉFINITION 3.15. Le \mathbb{K} -espace vectoriel des *p-formes harmoniques* relativement à l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ_E associé à la connexion D_E est le sous-espace $\mathcal{H}_{\Delta_E}^p(\mathcal{X}, E)$ défini comme le noyau dans $C_p^\infty(\mathcal{X}, E)$ de cet opérateur $\Delta_{D_E} = \Delta_E$.

Lorsque \mathcal{X} est une variété riemannienne compacte, on déduit de la proposition 3.3 l'important *théorème d'isomorphisme de Hodge* :

⁶Le *revêtement universel* est l'ensemble des paires $(x, [\gamma])$ où $\dot{\gamma}$ est une classe d'homotopie pour l'homotopie entre chemins d'origine x_0 et d'extrémité x ; le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{X})$ agit naturellement sur le revêtement fondamental par $\kappa \cdot (x, [\gamma]) = (x, [\gamma\kappa^{-1}])$.

THEOREME 3.16. *Soit \mathcal{X} une variété riemannienne compacte de dimension N , $E \rightarrow \mathcal{X}$ un \mathbb{K} -fibré de rang m sur \mathcal{X} , supposé équipé d'une métrique euclidienne ou hermitienne (suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), D_E une connexion plate sur $E \rightarrow \mathcal{X}$, compatible avec la structure euclidienne ou hermitienne sur E . On a les deux assertions suivantes :*

(1) *Pour tout $p = 0, \dots, N$, on a la décomposition orthogonale*

$$(3.20) \quad C_p^\infty(\mathcal{X}, E) = \mathcal{H}_{\Delta_E}^p(\mathcal{X}, E) \oplus^\perp D_E(C_{p-1}^\infty(\mathcal{X}, E)) \oplus^\perp D_E^*(C_{p+1}^\infty(\mathcal{X}, E))$$

(avec la convention que $C_{-1}^\infty(\mathcal{X}, E) = C_{N+1}^\infty(\mathcal{X}, E) = 0$).

(2) *Toute classe de cohomologie de de Rham $\dot{u} \in H_{\text{DR}}^p(\mathcal{X}, E)$ contient un unique représentant harmonique.*

(3) *Les groupes de cohomologie du complexe de de Rham généralisé sont tels que*

$$(3.21) \quad H_{\text{DR}}^p(\mathcal{X}, E) \simeq \mathcal{H}_{\Delta_E}^p(\mathcal{X}, E), \quad p = 0, \dots, N,$$

et sont tous de dimension finie.

DÉMONSTRATION.

Point du point (1). Si $u \in \mathcal{H}_{\Delta_E}^p(\mathcal{X}, E)$, on a, pour tout $u \in C_p^\infty(\mathcal{X}, E)$,

$$0 = \langle \Delta_E u, u \rangle = \langle D_E D_E^* u, u \rangle + \langle D_E^* D_E u, u \rangle = \|D_E u\|^2 + \|D_E^* u\|^2$$

par la formule d'adjonction (3.7), ce qui implique $D_E u = D_E^* u = 0$, d'où l'orthogonalité entre $\mathcal{H}_{\Delta_E}^p(\mathcal{X}, E)$ et les images de D_E et D_E^* (toujours grâce à la formule d'adjonction (3.7)). Les images de D_E et de D_E^* sont orthogonales puisque

$$\langle D_E u, D_E^* v \rangle = \langle D_E^2 u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in C_{p-1}^\infty(\mathcal{X}, E), \quad \forall v \in C_{p+1}^\infty(\mathcal{X}, E).$$

Le fait que l'on ait la décomposition (3.20) résulte donc de la décomposition (3.14) (l'opérateur $P(D)$ étant l'opérateur elliptique Δ_E) établie à la proposition 3.3.

Point du point (2). Le noyau de D_E dans $C_p^\infty(\mathcal{X}, E)$, i.e. $(D_E^*(C_{p+1}^\infty(\mathcal{X}, E)))^\perp$, est égal du fait de (3.20) à la somme directe orthogonale de $\mathcal{H}_{\Delta_E}^p(\mathcal{X}, E)$ et de l'image $D_E(C_{p-1}^\infty(\mathcal{X}, E))$; toute classe de cohomologie du complexe de de Rham généralisé admet donc un unique représentant Δ_E -harmonique.

Point du point (3). C'est immédiat (voir la preuve du point (2)). Le fait que les groupes de cohomologie de de Rham généralisés soient, considérés comme \mathbb{C} -espaces vectoriels, de dimension finie, résulte de l'isomorphisme ainsi établi et de la première assertion de la proposition 3.3 appliquée à $P(D) = \Delta_E$. \square

Comme conséquence importante du *théorème d'isomorphisme de Hodge* (théorème 3.16) nous pouvons énoncer le résultat fondant le *principe de dualité de Poincaré*.

THEOREME 3.17. *Soit \mathcal{X} une variété riemannienne compacte de dimension N et E un \mathbb{K} -fibré de rang m sur \mathcal{X} , tel que E puisse être muni d'une connexion plate D_E compatible avec une métrique euclidienne ou hermitienne (suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). L'application bilinéaire*

$$(\dot{u}, \dot{v}) \in H_{\text{DR}}^p(\mathcal{X}, E) \times H_{\text{DR}}^{N-p}(\mathcal{X}, E^*) \longmapsto \int_{\mathcal{X}} u \wedge v \in \mathbb{K}$$

où, localement sur \mathcal{X} ,

$$\left(\sum_{j=1}^m u_j \otimes e_j \right) \wedge \left(\sum_{k=1}^m v_k \otimes e_k^* \right) := \sum_{1 \leq j, k \leq m} (u_j \wedge v_k) e_k^*(e_j),$$

est non dégénérée.

REMARQUE 3.18. Dans le cas $E = \mathcal{X} \times \mathbb{K}$, la connexion plate est réalisée par l'opérateur de de Rham d et le théorème de Poincaré se réincarne *via* le *théorème de de Rham* (que l'on suppose dans ce cours connu, voir par exemple [GH], pages 43-44) en un résultat fondamental de nature topologique concernant la théorie de l'intersection (voir [GH], chapitre 1, section 4, pp. 49-60) : *le produit d'intersection des classes d'homologie*⁷

$$\begin{aligned} (\dot{\gamma}, \dot{\theta}) &\in H_p(\mathcal{X}, \mathbb{Q}) \times H_{N-p}(\mathcal{X}, \mathbb{Q}) \\ &\longmapsto \deg \left\{ \text{intersection de représentants } C^\infty \text{ transverses} \right\} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

est non dégénéré.

3.3.2. Les opérateurs de Laplace-Beltrami sur une variété hermitienne. On considère maintenant que X est une variété analytique complexe de dimension n équipée d'une structure hermitienne (définition 3.1). On définit naturellement un produit scalaire sur l'algèbre extérieure de

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_{\mathbb{R}}^*(\mathcal{X}) = (T_X^{1,0})^* \oplus (T_X^{0,1})^* \simeq T_X^* \oplus \overline{T_X^*};$$

voici comment. Supposons que la 1-forme ω introduite en (3.1) soit diagonalisée en un point z en

$$\omega(z) = i \sum_{j=1}^n d\zeta_j \wedge d\bar{\zeta}_j$$

(la forme hermitienne se présentant alors en ce point comme $2 \sum_j d\zeta_j \otimes \overline{d\zeta_j}$). La base $(d\zeta_1, \dots, d\zeta_n)$ est une base orthonormée de $(T_z(X))^*$ (pour cette métrique hermitienne) et le produit scalaire sur la fibre au dessus de z de $(T_X^{p,q})^* \otimes E$ est défini par

$$\left\langle \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} u_{I,J}(z) d\zeta_I \wedge \overline{d\zeta_J}, \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} v_{I,J}(z) d\zeta_I \wedge \overline{d\zeta_J} \right\rangle := \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} u_{I,J}(z) \overline{v_{I,J}(z)}.$$

Il ne reste plus ensuite qu'à intégrer sur X par rapport à la forme volume pour obtenir le produit scalaire voulu sur l'algèbre extérieure de $\mathbb{C} \otimes T_{\mathbb{R}}^*(\mathcal{X})$.

Si $E \rightarrow X$ est un \mathbb{C} -fibré hermitien de rang m au dessus de X (ramené ici à un repère (e_1, \dots, e_m)), l'opérateur \star , dont l'action sur $\bigwedge^p (T_X)^*$ est définie en section 3.2.2, est étendu au formes à valeurs complexes, de manière à ce que (3.10) reste valide, i.e.

$$(u \otimes e_j) \wedge \star(\bar{v} \otimes e_k) = \langle e_j, e_k \rangle \times \langle u, v \rangle dV_X, \quad u, v \in C_{p,q}^\infty(X).$$

On définit ainsi un opérateur

$$\star : C_{p,q}(X, E) \longmapsto C_{n-p, n-q}(X, E)$$

⁷C'est ici une forme faible, basée sur l'utilisation du théorème d'isomorphisme de de Rham (cette forme faible équivaut à l'énoncé du théorème 3.17). Pour énoncer la forme forte de ce principe, il convient de remplacer l'homologie à valeurs dans \mathbb{Q} par l'homologie à valeurs dans \mathbb{Z} .

dès que $E \rightarrow X$ est un fibré hermitien (le cas le plus important étant celui du fibré trivial $E = X \times \mathbb{C}$).

Outre l'opérateur de de Rham d (avec son adjoint formel d^*) et l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ , nous pouvons dans ce nouveau contexte introduire les cinq opérateurs :

$$\begin{aligned} \partial &: C_{p,q}^\infty(X) \longrightarrow C_{p+1,q}^\infty(X) \\ \bar{\partial} &: C_{p,q}^\infty(X) \longrightarrow C_{p,q+1}^\infty(X) \\ \partial^* &= -\star \partial \star : C_{p,q}^\infty(X) \longrightarrow C_{p-1,q}^\infty(X) \\ \bar{\partial}^* &= -\star \bar{\partial} \star : C_{p,q}^\infty(X) \longrightarrow C_{p,q-1}^\infty(X) \\ \Delta_\partial = \Delta' &:= \partial \circ \partial^* + \partial^* \circ \partial : C_{p,q}^\infty(X) \longrightarrow C_{p,q}^\infty(X) \\ \Delta_{\bar{\partial}} = \Delta'' &:= \bar{\partial} \circ \bar{\partial}^* + \bar{\partial}^* \circ \bar{\partial} : C_{p,q}^\infty(X) \longrightarrow C_{p,q}^\infty(X). \end{aligned}$$

On a immédiatement $d = \partial + \bar{\partial}$. On verra plus loin (section 3.4) qu'en fait les opérateurs Δ' et Δ'' sont tous les deux elliptiques, car ils diffèrent de $\Delta/2$ (opérateur elliptique du second ordre) par des opérateurs différentiels d'ordre 1. Un autre opérateur jouera un rôle important, l'opérateur de Lefschetz L :

$$(3.22) \quad L : u \in C_{p,q}^\infty(X) \longmapsto L(u) := \omega \wedge u,$$

dont l'adjoint formel est l'opérateur $\Lambda = \star^{-1}L\star$ (puisque la forme volume sur X est donnée par $dV_X = \omega^n/n!$) de manière à ce que

$$(3.23) \quad \langle u, \Lambda v \rangle = \langle Lu, v \rangle \quad \forall u \in C_{p,q}^\infty(X), \quad \forall v \in C_{p+1,p+1}^\infty(X).$$

Si $E \rightarrow X$ désigne un fibré holomorphe de rang m sur X , $D'' = D''_E$ sa connexion canonique (voir la définition 1.16), et que $E \rightarrow X$ est équipé d'une structure hermitienne induisant la connexion de Chern $D_E = D_{E,|\cdot|} = D'_E + D''$ (définition 1.17), on peut aussi introduire les opérateurs :

$$\begin{aligned} D'_E &: C_{p,q}^\infty(X, E) \longrightarrow C_{p+1,q}^\infty(X, E) \\ D'' &: C_{p,q}^\infty(X, E) \longrightarrow C_{p,q+1}^\infty(X, E) \\ (D'_E)^* &: C_{p,q}^\infty(X, E) \longrightarrow C_{p-1,q}^\infty(X, E) \\ (D''_E)^* &: C_{p,q}^\infty(X, E) \longrightarrow C_{p,q-1}^\infty(X, E) \\ \Delta'_E &:= D'_E \circ (D'_E)^* + (D'_E)^* \circ D'_E : C_{p,q}^\infty(X, E) \longrightarrow C_{p,q}^\infty(X, E) \\ \Delta''_E &:= D'' \circ (D''_E)^* + (D''_E)^* \circ D'' : C_{p,q}^\infty(X, E) \longrightarrow C_{p,q}^\infty(X, E), \end{aligned}$$

où $(D'_E)^*$ et $(D''_E)^*$ désignent les composants de type respectifs $(-1, 0)$ et $(0, -1)$ de D_E^* . Les deux opérateurs Δ'_E et Δ''_E sont tous deux elliptiques car, ici encore, ils diffèrent de l'opérateur $\Delta_E/2$ associé à la connexion de Chern par un opérateur différentiel d'ordre un. De ces deux opérateurs elliptiques Δ'_E et Δ''_E , celui qui sera amené à jouer un rôle primordial sera Δ''_E , d'une part parce qu'il ne dépend que du fibré holomorphe $E \rightarrow X$ et non de la métrique hermitienne dont ce fibré est équipé, d'autre part, et surtout, parce qu'il est canonique et tout en vérifiant $(D'')^2 = 0$ (on a aussi $(D'_E)^2 = 0$, voir la remarque 1.18, mais D'_E n'est pas canonique), ce qui permet de définir le *complexe de Dolbeault généralisé*

$$\dots \xrightarrow{D''} C_{p,q}^\infty(\mathcal{X}, E) \xrightarrow{D''} C_{p,q+1}^\infty(\mathcal{X}, E) \xrightarrow{D''} \dots,$$

dont l'obstruction à l'exactitude est matérialisée par les groupes de cohomologie de Dolbeault $H_{\text{Db}}^{p,q}(X, E)$:

$$(3.24) \quad H_{\text{Db}}^{p,q}(X, E) := \frac{\{u \in C_{p,q}^\infty(X, E); D''u = 0\}}{D''[C_{p,q-1}^\infty(X, E)]}, \quad 0 \leq p, q \leq n.$$

Les (p, q) formes Δ_E'' harmoniques sont les éléments du sous-espace

$$\mathcal{H}^{p,q}(X, E) := \{u \in C_{p,q}^\infty(X, E); \Delta_E''[u] = 0\}.$$

Dans le cadre des variétés hermitiennes compactes, on peut répéter la démonstration du théorème 3.16 pour obtenir l'énoncé suivant.

THEOREME 3.19. *Soit X une variété hermitienne compacte de dimension (complexe) n , $E \rightarrow X$ un \mathbb{C} -fibré holomorphe de rang m sur X , supposé équipé d'une métrique hermitienne, D_E la connexion de Chern associée, $\Delta_E'' = \Delta_{E,1}''$ l'opérateur de Laplace-Beltrami attaché à la connexion canonique $D'' = D_E''$ sur E .*

(1) *Pour tout $p, q = 0, \dots, n$, on a la décomposition orthogonale*

$$(3.25) \quad C_{p,q}^\infty(X, E) = \mathcal{H}_{\Delta_E''}^{p,q}(X, E) \oplus D''(C_{p,q-1}^\infty(X, E)) \oplus D_E''^*(C_{p,q+1}^\infty(X, E))$$

(avec la convention que $C_{p,-1}^\infty(X, E) = C_{p,n+1}^\infty(X, E) = 0$).

(2) *Toute classe de cohomologie de Dolbeault $\dot{u} \in H_{\text{Db}}^{p,q}(X, E)$ contient un unique représentant Δ_E'' harmonique.*

(3) *Les groupes de cohomologie du complexe de Dolbeault généralisé sont tels que*

$$(3.26) \quad H_{\text{Db}}^{p,q}(X, E) \simeq \mathcal{H}_{\Delta_E''}^{p,q}(X, E), \quad p, q = 0, \dots, n,$$

et sont tous de dimension finie.

DÉMONSTRATION. Elle est identique à celle du théorème 3.16. \square

Dans la ligne de ce second théorème d'isomorphisme de Hodge (théorème 3.19) nous pouvons énoncer le résultat fondant le *principe de dualité de Serre*, pendant « holomorphe » du principe de dualité de Poincaré (théorème 3.17).

THEOREME 3.20. *Soit X une variété hermitienne compacte, E un fibré holomorphe de rang m sur X et $D'' = D_E''$ sa connexion canonique. L'application bilinéaire*

$$(\dot{u}, \dot{v}) \in H_{\text{Db}}^{p,q}(X, E) \times H_{\text{Db}}^{n-p, n-q}(X, E^*) \mapsto \int_X u \wedge v \in \mathbb{C}$$

où, localement sur X ,

$$\left(\sum_{j=1}^m u_j \otimes e_j \right) \wedge \left(\sum_{k=1}^m v_k \otimes e_k^* \right) := \sum_{1 \leq j, k \leq m} (u_j \wedge v_k) e_k^*(e_j),$$

est non dégénérée.

DÉMONSTRATION. Elle est identique à celle du théorème 3.17 fondant la dualité de Poincaré. On utilise simplement le résultat du théorème 3.19 à la place du résultat du théorème 3.16. On renvoie à [De0] (chapitre 6, section 7) pour les détails spécifiques. \square

3.4. Le théorème de décomposition de Hodge (cadre kählérien)

Dans cette section, nous allons préciser les résultats établis dans la sous-section 3.3.2 lorsque nous nous situons dans le cadre des variétés kählériennes, i.e. lorsque la $(1, 1)$ -forme ω définie par (3.1) est fermée. Nous avons alors les quatre identités de Hodge (proposition 3.5 ci-dessous).

Si A et B sont deux endomorphismes de $C_{\bullet, \bullet}^{\infty}(X)$ de degrés⁸ respectifs $\deg A$, $\deg B$, leur *commutateur* (ou *crochet de Lie*) est défini par

$$[A, B] = A \circ B - (-1)^{\deg A \times \deg B} B \circ A.$$

Cette prise de crochet de Lie se plie à la règle (ou identité) de Jacobi « tournante » :

$$(3.27) \quad (-1)^{\deg C \times \deg A} [A, [B, C]] + (-1)^{\deg A \times \deg B} [B, [C, A]] + (-1)^{\deg B \times \deg C} [C, [A, B]] = 0.$$

PROPOSITION 3.5. *Soit X une variété kählérienne, L l'opérateur de Lefschetz défini en (3.22), Λ son adjoint formel, $d = \partial + \bar{\partial}$ l'opérateur de de Rham. On a les quatre relations, dites identités de Hodge :*

$$(3.28) \quad \begin{aligned} [\bar{\partial}^*, L] &= i\partial & [\Lambda, \bar{\partial}] &= -i\partial^* \\ [\partial^*, L] &= -i\bar{\partial} & [\Lambda, \partial] &= i\bar{\partial}^*. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Les relations figurant en seconde ligne s'obtiennent par conjugaison des relations figurant en première ligne, l'opérateur L défini en (3.22) étant un opérateur réel puisque ω est une $(1, 1)$ forme réelle. La seconde relation sur la première ligne s'obtient *via* la formule d'adjonction (3.7) puisque Λ est l'adjoint formel de L (3.23). Il nous reste donc juste à établir la première des quatre identités. On se place tout d'abord dans le cadre où X est un ouvert de \mathbb{C}^n et ω la $(1, 1)$ -forme associée à la métrique euclidienne usuelle. Exactement comme dans l'exemple 3.13, on a, pour toute (p, q) -forme u ,

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \partial^* u &= - \sum_{|I|=p, |J|=q} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_{I, J}}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial z_j} \rfloor dz_I \wedge \bar{d}z_J \\ &= - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \rfloor \frac{\partial u}{\partial z_j}, \end{aligned}$$

⁸Dire que A est de degré $\deg A = a \in \mathbb{Z}$ signifie qu'il envoie $C_p^{\infty}(X)$ dans $C_{p+a}^{\infty}(X)$; on parlera aussi plus loin de *bidegré* $\text{bideg } A = (a_1, a_2)$ si A envoie $C_{p, q}^{\infty}(X)$ dans $C_{p+a_1, q+a_2}^{\infty}(X)$.

où \lrcorner désigne l'opérateur de *contraction* des formes par les champs de vecteurs, tel qu'il a été introduit en (3.19). Il en résulte, comme $\deg \bar{\partial} = 1$ et $\deg L = 2$,

$$\begin{aligned} [\bar{\partial}, L](u) &= -\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \lrcorner \frac{\partial(\omega \wedge u)}{\partial z_j} + \omega \wedge \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \lrcorner \frac{\partial u}{\partial z_j} \\ &= -\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \lrcorner \left(\omega \wedge \frac{\partial u}{\partial z_j} \right) + \omega \wedge \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \lrcorner \frac{\partial u}{\partial z_j} \\ &= -\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \lrcorner \omega \right) \wedge \frac{\partial u}{\partial z_j} \\ &= -\sum_{j=1}^n (-idz_j) \wedge \frac{\partial u}{\partial z_j} = i\partial u \end{aligned}$$

(on a exploité ici le fait que ω était à coefficients constants ainsi que son expression même : $\omega = i \sum_j dz_j \wedge \bar{d}z_j$).

On note enfin que la relation que l'on demande de prouver ne fait intervenir que les dérivées jusqu'au premier ordre des coefficients impliqués dans l'écriture de la métrique. Il suffit donc, d'après la proposition 3.1, de prouver l'identité lorsque U est un ouvert de \mathbb{C}^n et ω la $(1, 1)$ -forme différentielle correspondant à la métrique usuelle, ce que nous venons de faire. \square

COROLLAIRE 3.21. *Soit X une variété kählérienne, ∂ et $\bar{\partial}$ les deux opérateurs résultant du scindage de l'opérateur de de Rham d , ∂^* et $\bar{\partial}^*$ leurs adjoints. On a*

$$(3.30) \quad [\partial, \bar{\partial}^*] = [\bar{\partial}, \partial^*] = 0.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver la première formule, l'autre suivant par conjugaison ou adjonction. On a, d'après les identités de Hodge (3.28) :

$$[\partial, \bar{\partial}^*] = -i[\partial, [\Lambda, \partial]].$$

Or, par l'identité de Jacobi (3.27), il vient

$$-[\partial, [\Lambda, \partial]] + [\Lambda, [\partial, \partial]] + [\partial, [\partial, \Lambda]] = -2[\partial, [\Lambda, \partial]] = 0,$$

Le résultat est établi. \square

COROLLAIRE 3.22. *Soit X une variété kählérienne, $\Delta = \Delta_d$, $\Delta' := \Delta_\partial$ et $\Delta'' := \Delta_{\bar{\partial}}$ les trois laplaciens de Laplace-Beltrami. On a*

$$(3.31) \quad \Delta' = \Delta'' = \frac{\Delta}{2}.$$

En particulier Δ est homogène relativement au bidegré des formes.

DÉMONSTRATION. On a $\Delta'' = [\bar{\partial}, \bar{\partial}^*]$ puisque les deux opérateurs dont on prend le commutateur sont ici de degré 1. D'après les identités (3.28), on a

$$[\bar{\partial}, \bar{\partial}^*] = -i[\bar{\partial}, [\Lambda, \bar{\partial}]].$$

L'identité de Jacobi (3.27) implique

$$-[\bar{\partial}, [\Lambda, \bar{\partial}]] + [\bar{\partial}, [\bar{\partial}, \Lambda]] = 0$$

puisque ∂ et $\bar{\partial}$ anticommulent. On a donc

$$\Delta'' = [\partial, -i[\bar{\partial}, \Lambda]] = [\partial, \partial^*] = \Delta'$$

toujours d'après les identités de Hodge (3.28). En développant Δ après scindage de $d = \partial + \bar{\partial}$ et, en utilisant les identités (3.28), on en déduit $\Delta = \Delta' + \Delta''$. Le corollaire est démontré. \square

De tous ces résultats, découle immédiatement la proposition suivante.

PROPOSITION 3.6. *Soit X une variété kählérienne. L'opérateur de Laplace-Beltrami $\Delta = \Delta_d$ commute avec $\star, \partial, \partial^*, \bar{\partial}, \bar{\partial}^*, L, \Lambda$.*

DÉMONSTRATION. Par l'identité de Jacobi (3.27) et le fait que $[\partial, L] = 0$ (puisque $\partial\omega = \bar{\partial}\omega = 0$), on a

$$[L, \Delta'] = [L, [\partial, \partial^*]] = -[\partial, [\partial^*, L]] = i[\partial, \bar{\partial}] = 0.$$

On a aussi $[\Lambda, \Delta'] = 0$ par adjonction. Ainsi $\Delta/2$, donc Δ , commute avec L et Λ . Les commutations de Δ avec les autres opérateurs sont évidentes. \square

On est en mesure d'énoncer maintenant l'un des résultats majeurs de ce chapitre 3, le *théorème de décomposition de Hodge*.

THÉORÈME 3.23. *Soit X une variété kählérienne et $\Delta = 2\Delta' = 2\Delta''$ le laplacien de Laplace-Beltrami.*

– Pour tout $k = 0, \dots, 2n$, on a

$$(3.32) \quad \mathcal{H}_{\Delta}^k(X) = \bigoplus_{p+q=k}^{\perp} \mathcal{H}_{\Delta''}^{p,q}(X).$$

– Pour tout $k = 0, \dots, 2n$, on a la *décomposition de Hodge*

$$(3.33) \quad H_{\text{DR}}^k(X, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H_{\text{Db}}^{p,q}(X, \mathbb{C}).$$

– Pour tout $p, q = 0, \dots, n$, on a la *symétrie de Hodge*

$$(3.34) \quad H_{\text{Db}}^{p,q}(X, \mathbb{C}) \simeq \overline{H_{\text{Db}}^{q,p}(X, \mathbb{C})}.$$

DÉMONSTRATION. Le premier point résulte de l'assertion finale du corollaire 3.22. Le second point résulte de la combinaison du premier avec les points (2) et (3) des théorèmes 3.16 et 3.19. Le troisième point résulte de ce que l'opérateur Δ'' est réel. Il reste cependant à s'affranchir de la dépendance en la métrique. On remarque pour conclure ici (en particulier montrer que la décomposition 3.33 est intrinsèque, i.e. ne dépend pas de la métrique), qu'il est équivalent pour une (p, q) -forme d'être d -exacte, ∂ -exacte, $\bar{\partial}$ -exacte, orthogonale à $\mathcal{H}_{\Delta''}^{p,q}$, dd^c exacte (faire l'exercice). Pour achever de montrer le caractère intrinsèque de la décomposition, on doit faire appel aux *groupes de cohomologie de Bott-Chern*, définis (pour une variété analytique complexe quelconque X de dimension n) par

$$(3.35) \quad H_{\text{BC}}^{p,q}(X, \mathbb{C}) := \frac{\ker d \cap C_{p,q}^{\infty}(X)}{dd^c[C_{p-1,q-1}^{\infty}(X)]}, \quad 0 \leq p, q \leq n.$$

Il existe, pour chaque couple (p, q) , un morphisme naturel

$$(3.36) \quad H_{\text{BC}}^{p,q}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H_{\text{Db}}^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

ainsi qu'un morphisme

$$H_{\text{BC}}^{p,q}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H_{\text{DR}}^{p+q}(X, \mathbb{C}).$$

Si X est kählérienne, l'équivalence entre les diverses exactitudes (pour $d, \partial, \bar{\partial}, dd^c$) montre que les morphismes (3.36) sont des isomorphismes. La décomposition de Hodge (3.33) peut ainsi être comprise comme une décomposition du groupe de cohomologie de de Rham $H_{\text{DR}}^k(X, \mathbb{C})$ comme somme (à isomorphismes près) des groupes de cohomologie $H_{\text{BC}}^{p,q}(X, \mathbb{C})$ pour $p + q = k$. Ceci prouve le caractère intrinsèque de cette décomposition de Hodge. \square

Parmi les nombreuses conséquences du théorème de décomposition de Hodge, mentionnons ici à titre d'exercice (et puisque les configurations produit sont appelées un rôle important⁹) la *formule de Kunneth* dans le contexte kählérien.

PROPOSITION 3.7. *Soient X_1 et X_2 deux variétés analytiques complexes compactes de dimensions respectives n_1 et n_2 équipées chacune d'une structure kählérienne (respectivement ω_1 et ω_2). On définit naturellement une structure kählérienne sur la variété produit $X_1 \times X_2$ par*

$$\Omega(z_1, z_2) = \omega_1(z_1) + \omega_2(z_2).$$

On a alors

$$H_{\text{Db}}^{p,q}(X_1 \times X_2, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{\substack{p_1+p_2=p \\ q_1+q_2=q}}^{\perp} \left(H_{\text{Db}}^{p_1,q_1}(X_1, \mathbb{C}) \otimes H_{\text{Db}}^{p_2,q_2}(X_2, \mathbb{C}) \right),$$

le produit tensoriel $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ étant induit par passage au quotient à partir du produit

$$(3.37) \quad \varphi_1(z_1) \otimes \varphi_2(z_2) := \varphi_1(z_1) \wedge \varphi_2(z_2).$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'une application du théorème 3.23. \square

REMARQUE 3.24. On peut aussi déduire de la formule de Kunneth la décomposition

$$(3.38) \quad \check{H}^q(X_1 \times X_2, \Omega_{X_1 \times X_2}^p) = \sum_{\substack{p_1+p_2=p \\ q_1+q_2=q}} (\check{H}^{q_1}(X_1, \Omega_{X_1}^{p_1}) \otimes \check{H}^{q_2}(X_2, \Omega_{X_2}^{p_2})),$$

où Ω_X^r désigne le faisceau des r -formes holomorphes sur X , l'accouplement \otimes étant toujours celui mentionné en (3.37). Ceci résulte du théorème d'isomorphisme de Dolbeault, assurant

$$\check{H}^s(X, \Omega_X^r) \simeq H_{\text{Db}}^{p,q}(X, \mathbb{C}).$$

Sous cette forme (3.38), la formule de Kunneth est bien sûr valable hors du cadre kählérien.

⁹Par exemple les *produits d'espaces projectifs*, plus généralement les *variétés toriques simpliciales* complètes de dimension n , présentées sur le modèle de *variétés produit*, ce de manière à mettre en évidence le fait que leur groupe de Chow $A_{n-1}(X)$ soit isomorphe à \mathbb{Z}^r , $n+r$ désignant le nombre d'arêtes de l'éventail simplicial Σ à partir duquel X est construite (voir l'exemple 1.31 et, pour aller plus avant, [ShTY]).

3.5. Cohomologie de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

L'exemple de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ s'avérant un exemple fondamental (déjà introduit maintes fois dans ce cours, voir les exemples 1.30, 3.4, 3.35 à venir), il est important d'en décrire ici sa cohomologie de de Rham et sa cohomologie de Dolbeault.

Nous rappelons pour cela ici dans un premier temps l'important *théorème de Mayer-Vietoris*¹⁰ (voir par exemple [De0], chapitre 4, section 3C) : soient U et V deux ouverts d'une variété différentielle X de dimension N ; soit $\Omega := U \cup V$, $W := U \cap V$; il existe une *longue suite exacte* d'homomorphismes de groupes abéliens :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_{\text{DR}}^0(\Omega, \mathbb{C}) &\longrightarrow H_{\text{DR}}^0(U, \mathbb{C}) \oplus H_{\text{DR}}^0(V, \mathbb{C}) \longrightarrow H_{\text{DR}}^0(W, \mathbb{C}) \longrightarrow H_{\text{DR}}^1(\Omega, \mathbb{C}) \\ &\longrightarrow H_{\text{DR}}^1(U, \mathbb{C}) \oplus H_{\text{DR}}^1(V, \mathbb{C}) \longrightarrow H_{\text{DR}}^1(W, \mathbb{C}) \longrightarrow H_{\text{DR}}^2(\Omega, \mathbb{C}) \longrightarrow \\ &\qquad \qquad \qquad \dots \longrightarrow \\ &\longrightarrow H_{\text{DR}}^N(\Omega, \mathbb{C}) \longrightarrow H_{\text{DR}}^N(U, \mathbb{C}) \oplus H_{\text{DR}}^N(V, \mathbb{C}) \longrightarrow H_{\text{DR}}^N(W, \mathbb{C}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

entre les groupes de cohomologie de de Rham. En admettant ici ce résultat et en remarquant que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la sphère unité \mathbb{S}^N de \mathbb{R}^{N+1} s'écrit comme union de deux « calottes » sphériques U et V homéomorphes à \mathbb{R}^N et dont l'intersection W « se rétracte » sur la sphère équatoriale \mathbb{S}^{N-1} , on montre par récurrence sur N , en utilisant la longue suite exacte de Mayer-Vietoris et le fait que les groupes de cohomologie $H_{\text{DR}}^k(U, \mathbb{C})$, $H_{\text{DR}}^k(V, \mathbb{C})$ des ouverts U et V sont nuls pour $k > 0$ (lemme de Poincaré) et que $H_{\text{DR}}^k(W, \mathbb{C}) \simeq H_{\text{DR}}^k(\mathbb{S}^{N-1}, \mathbb{C})$, que $H_{\text{DR}}^0(\mathbb{S}^N, \mathbb{C}) = H_{\text{DR}}^N(\mathbb{S}^N, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$, tandis que $H_{\text{DR}}^k(\mathbb{S}^N, \mathbb{C}) = 0$ pour $0 < k < N$. On déduit de ce résultat sur la cohomologie de de Rham des sphères réelles la proposition.

PROPOSITION 3.8. (1) *Les groupes de cohomologie de de Rham*

$$H_{\text{DR}}^{2k+1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

sont nuls tandis que les groupes de cohomologie de de Rham

$$H_{\text{DR}}^{2k}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C}), \quad k = 0, \dots, n,$$

sont isomorphes à \mathbb{C} .

(2) *Les seuls groupes de cohomologie de Dolbeault $H_{\text{Db}}^{p,q}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ non nuls sont ceux correspondant à $p = q = 0, 1, 2, \dots, n$. Ils sont tous isomorphes à \mathbb{C} .*

(3) *Les seules formes Δ -harmoniques sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont les (k, k) formes de la forme $\lambda \omega^k$, où $\omega := dd^c \log(|z_0|^2 + \dots + |z_n|^2)$ désigne la $(1, 1)$ -forme définissant la structure kählérienne de Fubini-Study.*

DÉMONSTRATION. On démontre la première assertion par récurrence sur n . On peut écrire $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = U \cup V$, où $U = \{[1 : z_1 : \dots : z_n] ; z \in \mathbb{C}^n\}$ et

$$V = \{[z_0 : z_1 : \dots : z_n] ; (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\}.$$

L'ouvert V se rétracte en $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, tous les groupes de cohomologie $H_{\text{DR}}^k(U, \mathbb{C})$ sont nuls pour $k > 0$ (lemme de Poincaré), et $U \cap V$ est homéomorphe à $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{2n-1}$. En utilisant la *suite longue de Mayer-Vietoris* et le fait (rappelé plus haut) que $H_{\text{DR}}^0(U \cap V, \mathbb{C}) = H_{\text{DR}}^{2n-1}(U \cap V, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ tandis que $H_{\text{DR}}^k(U \cap V, \mathbb{C}) = 0$ pour

¹⁰Il s'agit ici d'un résultat géométrique, dans le contexte des variétés différentiables ; le résultat vaut d'ailleurs aussi pour la cohomologie de Čech.

$k = 1, \dots, 2(n-1)$, on prouve l'assertion 1 au cran n en la supposant satisfaite au cran $n-1$.

D'après le théorème de décomposition de Hodge (théorème 3.23, assertion (3.33)) et le point (1), on a, si $p+q = 2k+1$,

$$H_{\text{DR}}^{2k+1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \simeq 0 \simeq \bigoplus_{p+q=2k+1} H_{\text{Db}}^{p,q}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C}),$$

ce qui implique que tous les groupes $H_{\text{Db}}^{p,q}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ pour $p+q$ impair sont nuls. Si $p+q = 2k$, on a, en tenant compte en plus de l'assertion (3.34),

$$\begin{aligned} H_{\text{DR}}^{2k}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C}) &\simeq \mathbb{C} \\ &\simeq H_{\text{Db}}^{k,k}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \oplus \bigoplus_{\substack{p+q=2k \\ p < q}} (H_{\text{Db}}^{p,q}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \oplus \overline{H_{\text{Db}}^{p,q}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C})}). \end{aligned}$$

En regardant ces isomorphismes comme des isomorphismes entre \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie, on constate, pour des raisons de dimension, que les groupes $H_{\text{Db}}^{p,q}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$, pour $p+q = 2k$ et en même temps $p \neq q$, sont nuls. Le groupe $H_{\text{Db}}^{k,k}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ est, lui, isomorphe à \mathbb{C} .

La dernière assertion résulte, elle, des deux précédentes, combinées avec l'assertion (2) du théorème 3.19 (lorsque le fibré est $X \times \mathbb{C}$). \square

Une équation importante : l'équation de Green. Les (p, p) -courants positifs fermés sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ jouent un rôle important tant en géométrie algébrique, voire arithmétique (e.g. les courants d'intégration sur une variété algébrique projective, i.e. un sous-ensemble de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ défini comme le lieu des zéros d'un nombre fini de polynômes homogènes en n variables, à coefficients complexes ou éventuellement entiers lorsque l'arithmétique est impliquée) qu'en dynamique complexe en plusieurs variables [Sib]. Si T est un tel courant, un « *courant de Green normalisé* » pour T (on dit aussi que $-G = U$ est un *quasi-potentiel* pour T) est un $(p-1, p-1)$ courant solution de l'équation de Green

$$(3.39) \quad dd^c G + T = H(T),$$

où $H(T)$ désigne la projection orthogonale de T sur le sous-espace $\mathcal{H}^{p,p}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ des (p, p) -formes harmoniques, i.e.

$$H(T) = \langle T, \omega^{n-p} \rangle \omega^p,$$

où ω désigne la $(1, 1)$ -forme $dd^c \log |z|^2$ (en coordonnées homogènes). Lorsque T est le courant d'intégration $[A]$ sur un sous ensemble algébrique irréductible (i.e. le lieu des zéros d'un idéal homogène premier) de dimension $n-p$, on a

$$H([A]) = \deg A \times \omega^p,$$

où $\deg A$ désigne le *degré* de l'ensemble algébrique projectif A (ce degré est ici interprété en termes de « volume », ce qui correspond à la formulation du *théorème de Wirtinger*). Un *quasi-potentiel* G pour T est dit *de moyenne nulle* s'il est orthogonal aux formes harmoniques, i.e. $\langle G, \omega^{n-p+1} \rangle = 0$. Lorsque $p = 1$, ce quasi-potentiel normalisé et de moyenne nulle est unique, ce qui n'est pas le cas lorsque $p > 1$ (deux tels quasi-potentiels diffèrent par un courant dd^c -fermé qui peut parfaitement être

singulier!). Lorsque T_1 et T_2 sont respectivement des (p_1, p_1) et (p_2, p_2) courants positifs fermés, on peut tenter de les multiplier formellement en remarquant que

$$\begin{aligned} dd^c[T_1 \wedge G_2 + G_1 \wedge H(T_2)] &= T_1 \wedge (H(T_2) - T_2) + (H(T_1) - T_1) \wedge H(T_2) \\ &= -(T_1 \wedge T_2) + H(T_1) \wedge H(T_2). \end{aligned}$$

Ceci peut aussi s'écrire (toujours formellement)

$$T_1 \wedge T_2 = H(T_1) \wedge H(T_2) - dd^c[T_1 \wedge G_2 + G_1 \wedge H(T_2)]$$

et permet, lorsque $T_1 \wedge G_2$ peut être défini au sens des courants, de définir le produit $T_1 \wedge T_2$. Si le cas $p_1 = p_2 = 1$ se résout bien lorsque G_2 est intégrable par rapport à la mesure trace du courant T_2 , et ne soulève pas d'ambiguïté au vu de l'unicité de G_1 et G_2 , le cas p_1 ou p_2 strictement supérieur à 1 soulève des questions tout à fait actuelles (voir par exemple [DinhS]). Signalons aussi que la théorie arithmétique de l'intersection (telle qu'elle est développée dans les travaux de J.B. Bost, H. Gillet, C. Soulé [BGS, GS], non sans relation étroite avec les outils de géométrie différentielle complexe développés dans ce cours) se fonde sur des idées similaires.

3.6. Fibrés holomorphes positifs, les divers concepts

Dans cette section, nous allons dégager (et comparer) divers concepts importants de *positivité* pour les fibrés holomorphes hermitiens $(E \rightarrow X, | \cdot |)$ au dessus d'une variété analytique complexe. Ces concepts (qui se rejoignent pour les fibrés en droites) seront, dans le cadre compact kählérien, un ingrédient majeur pour les théorèmes d'annulation (section 3.7).

Soit $(E \rightarrow X, | \cdot |)$ un fibré hermitien holomorphe de rang m au dessus d'une variété analytique complexe X . D'après la remarque 1.18, la première forme de Chern $c_1(E, | \cdot |)$, qui s'exprime dans un repère orthonormé

$$i \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l,p} u_{jk;l,p} dz_l \wedge \overline{dz_p} \right) e_j \otimes e_k^* = i \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l,p} u_{jk;l,p} dz_l \wedge \overline{dz_p} \right) (e_j^*)^* \otimes e_k^*,$$

avec $u_{jk;pl} = \overline{u_{kj;lp}}$, induit une forme hermitienne

$$\theta_E = \sum_{1 \leq j, k \leq m} \sum_{1 \leq l, p \leq n} u_{jk;l,p} (dz_l \otimes e_j^*) \otimes (\overline{dz_p} \otimes e_k^*)$$

sur $T(X) \otimes E$, de manière à ce que

$$(3.40) \quad \theta_E(\xi \otimes e_j, \eta \otimes e_k) = \left(\sum_{l,p} u_{jk;l,p} dz_l \wedge \overline{dz_p} \right) (\xi, \bar{\eta}),$$

soit

$$\theta_E \left(\sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \xi_{jl} \frac{\partial}{\partial z_l} \otimes e_j, \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \xi_{jl} \frac{\partial}{\partial z_l} \otimes e_j \right) = \sum_{\substack{1 \leq j, k \leq m \\ 1 \leq l, p \leq n}} u_{jk;l,p} \xi_{jl} \bar{\xi}_{kp}.$$

REMARQUE 3.25. Dans le cas des fibrés en droites, dire que θ_E est une forme hermitienne semi-positive sur $T(X)$ équivaut donc à dire (voir la remarque 2.2) que la première forme de Chern $c_1(E, | \cdot |)$ est positive, ou que la première forme de Chern $c_1(E^*, | \cdot |^*)$ est, elle, une forme négative.

REMARQUE 3.26. Si A désigne la matrice d'un endomorphisme hermitien d'un \mathbb{C} -espace vectoriel exprimée dans une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) , A peut tout aussi bien être considérée comme la matrice de l'opérateur adjoint A^* exprimée dans la base duale (e_1^*, \dots, e_n^*) . On peut donc aussi associer à $c_1(E, | \cdot |) = (i/2\pi)\Theta_{E, | \cdot |}$ une forme hermitienne θ_E^* , non plus cette fois sur $T^*(X) \otimes E$, mais sur $T^*(X) \otimes E^*$, suivant maintenant la règle :

$$(3.41) \quad \theta_E^*(\xi \otimes e_j^*, \eta \otimes e_k^*) = \left(\sum_{l,p} u_{jk;lp} dz_l \wedge \overline{dz_p} \right) (\xi, \bar{\eta}).$$

Dire que θ_E^* est une forme hermitienne positive équivaut à dire, puisque l'on a la relation $\Theta_{E^*, | \cdot |} = -\Theta_{E, | \cdot |}$, que θ_{E^*} est une forme hermitienne négative (il suffit de renverser les rôles de E et E^*).

DÉFINITION 3.27. On définit les deux concepts suivants de *positivité* pour un fibré hermitien holomorphe sur une variété analytique complexe X .

- Un fibré hermitien holomorphe $(E \rightarrow X, | \cdot |)$ de rang m sur une variété analytique complexe est dit *positif* (resp. *semi-positif*) au sens de Nakano ($E >_N 0$) (resp. $E \geq_N 0$) [Nak1] si et seulement si la forme θ_E définit un produit scalaire (resp. une forme positive) sur chaque fibre $(T(X) \otimes E)_z$ du fibré complexe $T(X) \otimes E$; il est dit *négatif* (resp. *semi-négatif*) au sens de Nakano ($E <_N 0$) (resp. $E \leq_N 0$) si et seulement si la forme $-\theta_E$ est un produit scalaire (resp. une forme positive) sur chaque fibre $(T(X) \otimes E)_z$.
- Un fibré hermitien holomorphe $(E \rightarrow X, | \cdot |)$ de rang m sur une variété analytique complexe est dit *positif* (resp. *semi-positif*) au sens de Griffiths ($E >_G 0$) (resp. $E \geq_G 0$) [Gr1] si et seulement si

$$(3.42) \quad \begin{aligned} & \forall \xi \neq 0 \in T_z(X), \forall s \neq 0 \in E_z, \theta_E(\xi \otimes s, \xi \otimes s) > 0 \\ & \text{(resp. } \forall \xi \in T_z(X), \forall s \in E_z, \theta_E(\xi \otimes s, \xi \otimes s) \geq 0 \text{);} \end{aligned}$$

il est dit *négatif* (resp. *semi-négatif*) au sens de Griffiths ($E <_G 0$) (resp. $E \leq_G 0$) si et seulement si

$$(3.43) \quad \begin{aligned} & \forall \xi \in T_z(X), \xi \neq 0, \forall s \in E_z, s \neq 0, \theta_E(\xi \otimes s, \xi \otimes s) < 0 \\ & \text{(resp. } \forall \xi \in T_z(X), \forall s \in E_z, \theta_E(\xi \otimes s, \xi \otimes s) \leq 0 \text{).} \end{aligned}$$

REMARQUE 3.28. Si $(E^* \rightarrow X, | \cdot |^*)$ désigne le fibré dual équipé de la métrique induite sur le dual ($\| \langle \cdot, s \rangle \| = |s|$) Comme $i\Theta_{E^*, | \cdot |^*} = -i^t\Theta_{E, | \cdot |}$ et que l'on a

$$\theta_{E^*}(\xi \otimes \langle \cdot, s \rangle, \xi' \otimes \langle \cdot, s' \rangle) = -\theta_E(\xi \otimes s, \xi' \otimes s'),$$

pour toutes sections ξ, ξ' de $T(X)$, pour toutes sections s, s' de E , il est équivalent de dire que $(E \rightarrow X, | \cdot |)$ est semi-positif au sens de Griffiths et que $(E^* \rightarrow X, | \cdot |^*)$ est semi-négatif au sens de Griffiths.

REMARQUE 3.29. On peut proposer une troisième notion de semi-positivité, au sens de Bott-Chern, en disant que $E \geq_{BC} 0$ (E est « *semi-positif au sens de Bott-Chern* ») si et seulement si la métrique θ_E^* associée à $c^1(E, | \cdot |)$ par (3.41) est une métrique positive sur $T^*(X) \otimes E^*$; on dit aussi que $E >_{BC} 0$ si cette métrique θ_E^* est définie positive sur chaque fibre de $T^*(X) \otimes E^*$, i.e. induit un produit scalaire sur chaque fibre. Dire que $E \geq_{BC} 0$ équivaut donc à dire que $(E^* \rightarrow X, | \cdot |^*)$ est *semi-négatif au sens de Nakano*, puisque le tenseur de courbure de $(E^* \rightarrow X, | \cdot |^*)$ s'obtient par $\Theta_{E^*, | \cdot |^*} = -{}^t\Theta_{E, | \cdot |}$. Dire que $(E \rightarrow X, | \cdot |)$ est *semi-positif au sens de*

Bott-Chern équivaut aussi à dire qu'il existe des sections f_1, \dots, f_M de $T^*(X) \otimes E$ telles que

$$c_1(E, | |) = i \sum_{l=1}^M f_l \otimes f_l^*,$$

où l'on rappelle que l'isométrie de conjugaison $f \mapsto f^*$ a été introduite au chapitre précédent (2.33). Ceci s'avère fort utile pour envisager la positivité des formes de Chern $c_p(E, | |)$ d'ordre supérieur, qui se trouve assurée dans ce cas. On trouvera par exemple cette notion étudiée dans [And3], ainsi d'ailleurs que la preuve du résultat mentionné ici concernant la positivité des formes de Chern. C'est à cette notion de *semi-positivité au sens de Bott-Chern* que nous avons fait référence relativement aux questions de positivité se posant dans l'exemple 2.35.

EXEMPLE 3.30. Sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ par exemple, le fibré en droites $\mathcal{O}(1)$ est positif; sa première forme de Chern est $dd^c[\log |z|^2]$ et est une forme positive. C'est d'ailleurs la forme de Kähler sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. La première forme de Chern du fibré tautologique $\mathcal{O}(-1)$ est, elle, définie négative, puisque c'est l'opposée de la précédente.

REMARQUE 3.31. Les deux concepts de *positivité* au sens de Nakano et de Griffiths coïncident lorsque E est un fibré en droites (aussi d'ailleurs avec celui de Bott-Chern envisagé dans la remarque 3.29); on parle alors de *positivité* tout court. Le cas des fibrés en droites est le seul cas où les trois notions (au sens de Nakano, Griffiths, ou Bott-Chern) coïncident. Cependant, la positivité (*resp.* semi-négativité) au sens de Nakano implique bien sûr dans tous les cas la positivité (*resp.* semi-négativité) au sens de Griffiths.

3.7. Positivité et théorèmes d'annulation

La positivité des fibrés rejaillit dans le cadre kählérien en des *théorèmes d'annulation des groupes de cohomologie de Dolbeault* qu'ils induisent. Nous ne donnerons dans ce cours, à titre d'exemple, qu'un seul énoncé, le plus simple, à savoir le *théorème de Kodaira-Akizuki-Nakano* [AkN], puisque ce sera le théorème que nous invoquerons lors de la preuve du *théorème de plongement de Kodaira* (théorème 3.41 dans la section 3.9 à venir).

THEORÈME 3.32. Soit X une variété analytique complexe de dimension n , au dessus de laquelle $E \rightarrow X$ est un fibré en droites holomorphe.

- (1) S'il existe une métrique hermitienne $| |$ sur E qui confère à $(E \rightarrow X, | |)$ une structure de fibré positif, alors

$$(3.44) \quad p + q \geq n + 1 \implies H_{\text{Db}}^{p,q}(X, E) = 0.$$

- (2) S'il existe une métrique hermitienne $| |$ sur E qui confère à $(E \rightarrow X, | |)$ une structure de fibré négatif, on a

$$(3.45) \quad p + q \leq n - 1 \implies H_{\text{Db}}^{p,q}(X, E) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Le principe de dualité de Serre (théorème 3.20) permet de déduire l'assertion (2) de l'assertion (1) puisque la condition $p + q > n$ équivaut à ce que $(n - p) + (n - q) < n$ et que la positivité de $(E \rightarrow X, | |)$ équivaut à la négativité du fibré $(E^* \rightarrow X, | |^*)$. Nous pouvons donc nous contenter de prouver la

première assertion. La première forme de Chern $i\Theta_{E,|}$ de $(E \rightarrow X, |)$ définit une structure kählérienne ω sur X . Nous notons Λ l'adjoint de l'opérateur de Lefschetz

$$L : s \in C_{p,q}^\infty(X, E) \mapsto \omega \wedge s \in C_{p+1,q+1}^\infty(X, E).$$

Nous introduisons aussi les opérateurs

$$D'_E : C_{p,q}^\infty(X, E) \rightarrow C_{p+1,q}^\infty(X, E) \quad D'' : C_{p,q}^\infty(X, E) \rightarrow C_{p,q+1}^\infty(X, E)$$

et leurs adjoints formels $(D'_E)^*$ et $(D'')^*$, comme à la section 3.3.2. Les identités de Hodge (3.28) restent valables et deviennent :

$$(3.46) \quad \begin{aligned} [(D'')^*, L] &= iD'_E & [\Lambda, D''] &= -i(D'_E)^* \\ [(D'_E)^*, L] &= -iD'' & [\Lambda, D'_E] &= i(D'')^*. \end{aligned}$$

Prenons pour voir cela un point z_0 de X et un système de coordonnées $z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ centré en z_0 . Si l'on exprime l'action des opérateurs $D_E, D'_E, D'', (D'_E)^*, (D'')^*$ dans un repère orthonormé e , on constate (par exemple) que

$$\begin{aligned} D_E(\sigma \otimes e) &= d\sigma \otimes e + O(|z|) \\ D''(\sigma \otimes e) &= \bar{\partial}\sigma \otimes e + O(|z|) \\ D'_E(\sigma \otimes e) &= \partial\sigma \otimes e + O(|z|), \end{aligned}$$

où les termes impliqués dans les expressions du type $O(|z|)$ font intervenir les coefficients du tenseur de courbure $\Theta_{E,|}$. Pour prouver ponctuellement les formules de commutation (3.46), on peut donc se ramener à les prouver dans le cadre du fibré trivial $X \times \mathbb{C}$, cadre où ces identités de commutation sont connues puisque ce sont les identités de Hodge (3.28). On peut d'ailleurs aussi ajouter la relation de commutation

$$(3.47) \quad [D'_E, D''] = D_E^2 = \Theta_{E,|}.$$

Ceci vaut d'ailleurs lorsque $E \rightarrow X$ est un fibré de rang quelconque¹¹. D'après l'identité de Jacobi (3.27), on a

$$\begin{aligned} [D'', [\Lambda, D'_E]] &= [\Lambda, [D'_E, D'']] + [D'_E, [D'', \Lambda]] = [\Lambda, \Theta_{E,|}] + i[D'_E, (D'_E)^*] \\ &= [D'', i(D'')^*] \end{aligned}$$

et, par conséquent, en tenant compte des relations de commutation (3.46) et (3.47),

$$(3.48) \quad \Delta''_E = \Delta'_E + [i\Theta(E), \Lambda].$$

Or un calcul immédiat montre (compte tenu ici du fait que $\omega = i\Theta_{E,|}$) que, pour tout $u \in C_{p,q}^\infty(X, E)$, on a

$$\langle [i\Theta_{E,|}, \Lambda]u, u \rangle \geq (p + q - n)\|u\|^2.$$

La positivité de l'opérateur Δ'_E , le fait que l'on ait la relation (3.48), combinée enfin avec le point (2) du théorème 3.19, assurent la nullité du groupe de cohomologie $H_{\text{Db}}^{p,q}(X, E)$ lorsque $p + q > n$. Il ne saurait y avoir en effet de solution non nulle de $\Delta''_E[u] = 0$ dans $C_{p,q}^\infty(X, E)$ si $p + q > n$. Ceci achève la preuve du *théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano*. \square

¹¹Dans le cadre où X n'est plus kählérienne, ces identités de commutation se trouvent perturbées par l'opérateur de type $(1,0)$ défini par $\tau := [\Lambda, \partial\omega]$; on trouvera ces formules « corrigées » dans la section 1 du chapitre 7 de [De0] (voir aussi la remarque 3.33 un peu plus loin). Comme, dans notre cours, nous ne nous placerons que dans le cas kählérien, nous ne développerons pas ici ces calculs.

Une inégalité importante s'est fait jour dans le déroulement de cette preuve. Il s'agit des *inégalités de Bochner-Kodaira-Nakano* sur les variétés analytiques complexes. Nous ne les mentionnons ici que dans le cadre kählérien, mais elles admettent une version « corrigée » dans le cadre des variétés hermitiennes. Nous retrouverons ces inégalités dans le contexte L^2 au chapitre 4 (section 4.1); elle sera le moteur de l'attaque du problème de la résolution de l'équation $D''f = u$ dans le cadre hilbertien L^2 via les techniques d'analyse fonctionnelle développées dans le cas des ouverts pseudoconvexes de \mathbb{C}^n (voir le cours de P. Charpentier [**Charp**]).

PROPOSITION 3.9. *Soit X une variété kählérienne et $E \rightarrow X$ un fibré holomorphe de rang m au dessus de X , que l'on suppose équipé d'une métrique hermitienne. Pour tout p, q , pour toute section u à support compact de $C_{p,q}^\infty(X, E)$, on a*

$$(3.49) \quad \langle \Delta_E'' u, u \rangle = \langle D'' u, D'' u \rangle + \langle (D'')^* u, (D'')^* u \rangle \geq \int_X \langle [i\Theta_{E,| \cdot |}, \Lambda](u), u \rangle dV_X.$$

REMARQUE 3.33. Dans le cadre hermitien (et non plus kählérien), la métrique étant notée ω et Λ désignant l'adjoint formel de l'opérateur de Lefschetz L_ω , il convient simplement de remplacer l'opérateur hermitien $[i\Theta_{E,| \cdot |}, \Lambda]$ figurant sous l'intégrale de droite par

$$[i\Theta_{E,| \cdot |}, \Lambda] + T_\omega$$

où

$$T_\omega = \left[\Lambda, [\Lambda, \pi (dd^c \omega)^\wedge] \right] - [(\partial \omega)^\wedge, ((\partial \omega)^\wedge)^*]$$

(on note ici, étant donnée une forme différentielle $\alpha \in C_\bullet^\infty(X)$, α^\wedge l'opérateur de « multiplication » à gauche par la forme α). Cette version « hermitienne » est un résultat de J.P. Demailly [**De1bis**].

DÉMONSTRATION. L'inégalité (3.49) (plus généralement sa version « corrigée » dans le cadre hermitien non kählérien, suivant la remarque 3.33) résulte du fait que $\langle \Delta_E' u, u \rangle \geq 0$ pour toute section $u \in C_{p,q}^\infty(X, E)$ à support compact et de l'identité

$$\Delta_E'' = \Delta_E' + [i\Theta_{E,| \cdot |}, \Lambda].$$

□

3.8. Notions d'amplitude; exemples projectifs et toriques

Les notions de *semi-amplitude* et d'*amplitude* pour un fibré holomorphe $E \rightarrow X$ sont des notions de nature algébrique¹², dont on va voir qu'elles sont liées aux divers concepts de *positivité* introduits dans la section 3.6 précédente (qu'elles complètent pour fournir le cadre des théorèmes d'annulation ou de plongement de la section 3.7). Listons ici les trois notions importantes, de la notion de *semi-amplitude* à celle d'*amplitude* en partant de la notion « *fibré engendré par ses sections holomorphes globales* ». Nous les illustrerons ensuite par des exemples de fibrés en droites empruntés au cadre projectif ou au cadre torique.

DÉFINITION 3.34. Soit $E \rightarrow X$ un fibré holomorphe de rang m au dessus d'une variété analytique complexe X . On note par $H^0(X, E)$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des section holomorphes globales de X .

¹²La notion intuitive d'« *amplitude* » se traduit, dans un langage « imagé », par le concept d'« occupation de l'espace ».

- (1) On dit que $E \rightarrow X$ est *engendré par ses sections holomorphes globales* ou encore *globalement engendré* si et seulement si, pour chaque $z \in X$, l'application d'évaluation

$$s \in H^0(X, E) \longmapsto s(z) \in E_z$$

est surjective, i.e. chaque section locale de $E \rightarrow X$ s'exprime comme combinaison linéaire de sections globales.

- (2) On dit que $E \rightarrow X$ est *semi-ample* si et seulement si, pour $p \in \mathbb{N}$ assez grand, les puissances symétriques¹³ $S^p E \rightarrow X$ du fibré $E \rightarrow X$ sont globalement engendrées.

- (3) On dit que $E \rightarrow X$ est *très ample* si et seulement si les évaluations

$$s \in H^0(X, E) \longmapsto [j^1(s)]_z := \left(\dot{s}_z \text{ modulo } \mathfrak{M}_{X,z}^2 \mathcal{O}_{X,z}(E) \right) \in \frac{\mathcal{O}_{X,z}(E)}{\mathfrak{M}_{X,z}^2 \mathcal{O}_{X,z}(E)}$$

$$s \in H^0(X, E) \longmapsto s(z) + s(z') \in E_z \oplus E'_z$$

sont surjectives¹⁴ pour tout z, z' dans X avec $z \neq z'$.

- (4) On dit que $E \rightarrow X$ est *ample* si et seulement si les puissances symétriques $S^p E \rightarrow X$ sont très amples pour $p \in \mathbb{N}$ assez grand.

EXEMPLE 3.35. Sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, le fibré en droites $\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, associé (voir l'exemple 1.30) au diviseur $-[z_0 = 0]$, est l'exemple-type d'un fibré *très ample*. Les sections holomorphes globales du fibré $\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont en effet les polynômes homogènes de degré 1 en les coordonnées homogènes $[z_0 : \dots : z_n]$, i.e. les formes linéaires en ces $n + 1$ variables. Notons d'ailleurs qu'un élément de $H^0(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathcal{O}(1))$ est associé de manière bijective à un point $[u_0 : \dots : u_n]$ de l'espace projectif $(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))^*$ (le point $[u_0 : \dots : u_n]$ correspondant à la forme linéaire $z \mapsto u_0 z_0 + \dots + u_n z_n = \langle u, z \rangle$). La vérification des conditions (3) de la définition 3.34 est ici immédiate. Si X est une variété analytique complexe qui peut être considérée comme plongée (via un plongement ι) dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, alors le fibré $\iota^* \mathcal{O}(1) \rightarrow X$ (soit, si l'on considère $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, le fibré $\mathcal{O}(1)|_X$) est un fibré *très ample* sur X . Au dessus de toute variété projective (i.e. d'une sous-variété de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, ou pouvant être plongée dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$), on peut ainsi toujours construire au moins un fibré *très ample*.

EXEMPLE 3.36. Un autre exemple « jouet » particulièrement intéressant (et plus riche que le précédent) pour illustrer (et classer) les diverses notions d'*amplitude* présentées dans la définition 3.34 est celui des *variétés toriques complètes lisses* présentées dans l'exemple 1.31. Les diverses notions d'*amplitude* se traduiraient dans l'espace « géométrique » qu'occupe un certain polyèdre du monde $(\mathbb{R}^n)^*$ dual de celui où vit l'*éventail* Σ à partir duquel la variété torique a été construite (comme dans l'exemple 1.31). On reprend ici les notations utilisées dans cet exemple. La

¹³La puissance symétrique $S^p V$ d'un \mathbb{C} -espace vectoriel V est le quotient de $V^{\otimes p}$ sous l'action naturelle du groupe symétrique \mathcal{S}^p suivant $\sigma \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_p) = v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(p)}$. Ce concept passe naturellement aux fibrés vectoriels.

¹⁴On dit que $[j^1(s)]_z$ est le 1-jet de s au point z ; en remplaçant $\mathfrak{M}_{X,z}^2$ par $\mathfrak{M}_{X,z}^{k+1}$, on obtient le jet d'ordre k , noté $[j^k(s)]_z$, de la section s au point z . Le fibré correspondant est noté $J^k E \rightarrow X$ et appelé *fibré des k -jets de E* au dessus de X .

présentation d'une telle variété comme le quotient géométrique (1.25) permet d'associer à chaque coordonnée homogène z_1, \dots, z_{n+r} (donc à chaque cône ξ_j de dimension 1 de l'éventail Σ à partir duquel la variété torique est construite¹⁵) un diviseur de Cartier effectif D_j dont le support est défini en coordonnées homogènes par $\{z_j = 0\}$ (voir [Co1] ou [CLO]). Au diviseur de Weil

$$D = a_1 D_1 + \dots + a_{n+r} D_{n+r}, \quad a_1, \dots, a_{n+r} \in \mathbb{Z},$$

on associe le polyèdre P_D de $(\mathbb{R}^n)^*$ défini par

$$P_D := \{x^* \in (\mathbb{R}^n)^* ; \langle x^*, \xi_j \rangle + a_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n+r\}.$$

Si $f(x_1, \dots, x_n)$ est un polynôme de Laurent de support P_D dans lequel on effectue la substitution

$$x_k := \prod_{j=1}^{n+r} z_j^{\xi_j k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

On obtient ainsi une fraction rationnelle en (z_1, \dots, z_{n+r}) de dénominateur précisément $z_1^{a_1} \dots z_{n+r}^{a_{n+r}}$, que l'on peut interpréter comme une section globale s du fibré $\mathcal{O}(D)$ (ce fibré correspond au cycle $-\sum_j a_j [t_j = 0]$, exactement comme $\mathcal{O}(1)$ correspond à $-[z_0 = 0]$ dans les exemples 1.30 et 3.35). Le numérateur F de cette fraction rationnelle induit, sur la variété X , la définition d'un diviseur de Cartier effectif $\text{div}_0(s)$ tel que $\text{div}_0(s) = \text{div}(s) + D$. On associe à P_D un polyèdre Δ_D de $(\mathbb{R}^+)^{n+r}$, défini comme le support de F . Si (ξ_1, \dots, ξ_n) engendrent l'un des cônes σ de dimension n de l'éventail Σ , on note $\Delta_{D,\sigma}$ la projection de Δ_D sur l'espace des n premières coordonnées. À chaque cône σ de dimension n de Σ ($\sigma \in \Sigma(n)$, supposé pour simplifier engendré par (ξ_1, \dots, ξ_n) , de base duale $(\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$), il est ainsi possible d'associer un polyèdre $\Delta_{D,\Sigma}$ de $(\mathbb{R}^+)^n$. On constate alors que le fibré $\mathcal{O}(D) = [-D]$ est *semi-ample* si et seulement si, pour tout $\sigma \in \Sigma(n)$, l'origine est un sommet de $\Delta_{D,\sigma}$, ce qui revient aussi à dire que le vecteur

$$u_{D,\sigma}^* := -\sum_{j=1}^n a_j \xi_j$$

est, pour tout $\sigma \in \Sigma(n)$, un sommet de P_D , ou encore que le diviseur

$$D_\sigma := \sum_{j=1}^r (a_{n+j} + \langle u_{D,\sigma}^*, \xi_{n+j} \rangle) D_{n+j}$$

est effectif. Le fibré $\mathcal{O}(D) = [-D]$ est *ample* si et seulement si pour tout cône $\sigma \in \Sigma(n)$, le diviseur D_σ est strictement effectif, i.e. $a_{n+j} + \langle u_{D,\sigma}^*, \xi_{n+j} \rangle > 0$ pour tout $j = 1, \dots, r$. Le fibré $\mathcal{O}(D) = [-D]$ est *très ample* si de plus les points $(\delta_{jk})_{1 \leq k \leq n}$, $j = 1, \dots, n$, extrémités des vecteurs de la base canonique de $(\mathbb{R}^n)^*$, appartiennent au polyèdre $\Delta_{D,\Sigma}$ pour tout $\sigma \in \Sigma(n)$. On pourra à titre d'exemple examiner le cas du produit de deux espaces projectifs. Ces caractérisations de la *semi-amplitude*, de l'*amplitude* et de la notion *fibré très ample* pour un tel fibré en droites $\mathcal{O}(D) = [-D]$ se lisent aussi d'une autre manière : tout point x^* de l'espace affine $(\mathbb{R}^n)^*$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{j \in J} x_{j_i}^* \xi_{j_i}$, où $J \subset \{1, \dots, n+r\}$, le cône

¹⁵On convient par la suite de noter aussi ξ_j le vecteur à coordonnées entières et premières entre elles dirigeant le cône ou « arête » (car de dimension un) ξ_j .

engendré par les ξ_{j_l} étant le plus petit cône de Σ contenant x^* (d'où l'unicité de la décomposition); on associe alors à D la fonction $\Psi_D : (\mathbb{R}^n)^* \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi_D \left(\sum_{j \in J} x_{j_l}^* \xi_{j_l} \right) = - \sum_l x_{j_l}^* a_{j_l}.$$

Dire que $\mathcal{O}(D) = [-d]$ est *semi-ample* équivaut à dire que cette *fonction support* Ψ_D est *convexe*, i.e. $\Psi_D(u^* + v^*) \geq \Psi_D(u^*) + \Psi_D(v^*)$ pour tout u^*, v^* dans $(\mathbb{R}^n)^*$; dire que $\mathcal{O}(D)$ est *ample* équivaut à dire qu'elle est *strictement convexe*, i.e.

$$\Psi_D(u^* + v^*) \geq \Psi_D(u^*) + \Psi_D(v^*),$$

avec égalité si et seulement si u^* et v^* appartiennent au même cône de l'éventail Σ .

Amplitude et *positivité* sont deux notions entre lesquelles existent des liens, la première étant de nature algébrique, la seconde de nature à la fois géométrique et métrique. Les conditions d'*amplitude* assurent en effet la possibilité d'équiper le fibré d'une métrique hermitienne qui en fasse un *fibré positif* (*resp.* semi-positif) *au sens de Griffiths* ou de son dual E^* un *fibré négatif* (*resp.* semi-négatif) *au sens de Nakano*.

PROPOSITION 3.10. *Soit $E \rightarrow X$ un fibré holomorphe de rang m au dessus d'une variété analytique complexe X de dimension n .*

- (1) *Si $E \rightarrow X$ est engendré par ses sections globales, il existe un sous-espace vectoriel complexe V de dimension au plus $n + m$ de $H^0(X, E)$ tel que*

$$\text{vect} \{s(z); s \in V\} = E_z$$

pour tout $z \in X$.

- (2) *Si $E \rightarrow X$ est engendré par ses sections globales, il est possible de munir E d'une structure hermitienne $|\cdot|$ de manière à ce que le fibré hermitien holomorphe $(E \rightarrow X, |\cdot|)$ soit semi-positif au sens de Griffiths (idem de manière à ce que le fibré $E^* \rightarrow X$ soit semi-négatif au sens de Nakano).*
- (3) *Si $E \rightarrow X$ est un fibré en droites holomorphe semi-ample, il est possible d'équiper $E \rightarrow X$ d'une métrique hermitienne de manière à ce que le fibré hermitien ainsi réalisé soit semi-positif.*

DÉMONSTRATION. *Preuve du point (1).* Il s'agit là d'un résultat de nature topologique, reposant sur l'utilisation du *théorème de Baire*¹⁶. L'espace de Fréchet que nous considérons est l'espace $\mathcal{F} := (H^0(X, E))^{n+m}$, la topologie étant la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de X (on a auparavant équipé E d'une métrique arbitraire, ce qui implique que la topologie de la convergence uniforme sur tout compact sur X induise une topologie d'espace de Fréchet sur \mathcal{F}). On introduit une suite de compacts $(K_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$ exhaustant X et, pour chaque $l \in \mathbb{N}^*$, le sous-ensemble \mathcal{A}_l de \mathcal{F} constitué des $(n + m)$ -uplets de sections globales de E n'engendrant pas E sur K_l . Chaque ensemble \mathcal{A}_l est fermé car caractérisé par la condition fermée

$$\min_{K_l} \left(\sum_{i_1 < \dots < i_m} |s_{i_1} \wedge \dots \wedge s_{i_m}| \right) > 0$$

¹⁶« Dans un espace de Fréchet, toute union dénombrable de fermés sans points intérieurs est sans point intérieur ».

(le fibré E étant, on le rappelle, de rang m). On montre aussi que les fermés \mathcal{A}_l sont tous d'intérieur vide. Ce point est une conséquence du *lemme de Sard*¹⁷. L'idée est d'introduire $N = N(K_l)$ sections globales s'_1, \dots, s'_N de E , telles que les $s'_j(z)$ engendrent E_z pour tout z dans un voisinage ouvert U_l (relativement compact) de K_l ; si (s_1, \dots, s_{n+m}) est un $(n + m)$ -uplet de sections globales de E , on construit ensuite le morphisme affine de fibrés :

$$\Phi : (x, \lambda) \in U_l \times \mathbb{C}^{N(n+m)} \longmapsto \left(s_j(z) + \sum_{1 \leq k \leq N} \lambda_{jk} s'_k \right)_{1 \leq j \leq n+m};$$

le lemme de Sard (on trouvera l'argument détaillé dans [De0], preuve de la proposition 11.2, chapitre 7) permet précisément d'affirmer que, pour presque toute valeur du vecteur de paramètres « perturbateur » λ , le système

$$\left(s_j(z) + \sum_{1 \leq k \leq N} \lambda_{jk} s'_k \right)_{1 \leq j \leq n+m}$$

est de rang (maximal) m dans E_z , ce pour tout z dans U_l ; il est donc impossible que (s_1, \dots, s_{n+m}) soit un point intérieur de \mathcal{A}_l . L'union des \mathcal{A}_l n'a donc pas de point intérieur, ce qui implique bien l'existence de $n + m$ sections globales de E , $\sigma_1, \dots, \sigma_{n+m}$ telles que $\text{vect}(\sigma_j(z))_{1 \leq j \leq n+m} = E_z$ pour tout $z \in X$. Le point (1) est ainsi démontré.

Preuve du point (2). Pour chaque $z \in V$, on note S_z le sous-espace de codimension m de V défini par

$$S_z := \{s \in V; s(z) = 0\}.$$

Désignons par $S \rightarrow X$ le $(n - m)$ -fibré sur X dont la fibre au dessus de z est S_z . On a une suite exacte de fibrés :

$$(3.50) \quad 0 \longrightarrow S = \bigcup_{z \in X} S_z \xrightarrow{\iota : (z,s) \mapsto (z,s)} X \times V = \underline{V} \xrightarrow{\pi : (z,s) \mapsto (z,s(z))} E \longrightarrow 0.$$

On peut équiper le fibré trivial $\underline{V} := X \times V$ d'une métrique arbitraire¹⁸. Les fibrés S et E peuvent être respectivement équipés avec la métrique restreinte induite et la métrique quotient. Notons $D_S, D_{\underline{V}}, D_E$ les connexions de Chern correspondantes et $\iota^* : \underline{V}^* \rightarrow S^*$ et $\pi^* : E^* \rightarrow \underline{V}^*$. Le morphisme $\iota^* \oplus \pi$ réalise un isomorphisme C^∞ entre les fibrés \underline{V} et $S \otimes E$. Suivant cet isomorphisme, la connexion de Chern $D_{\underline{V}}$ se représente matriciellement sous la forme

$$(3.51) \quad D_{\underline{V}} = \begin{bmatrix} D_S & -\beta^* \\ \beta & D_E \end{bmatrix}$$

¹⁷« L'ensemble des valeurs critiques d'une application f d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p (i.e. des $y \in \mathbb{R}^p$ images d'un point x de U tel que $\text{rang } df_x < p$) est de mesure de Lebesgue nulle dans \mathbb{R}^p » ; le lemme de Sard [Sa] joue un rôle très important en géométrie analytique complexe ; son pendant algébrique est le théorème de Bertini ou encore de Bertini-Sard (voir par exemple [Jo]). Pour une esquisse de preuve dans un cas simple, mais édifiant ($n = p$), voir par exemple le chapitre 1 de [HY].

¹⁸L'argument que nous allons développer ici est en fait très général (voir [De0], chapitre 5, section 14) ; il précise comment calculer la première forme de Chern des métriques induites sur E et S (respectivement par passage au quotient et restriction) à partir d'une métrique sur le fibré trivial \underline{V} lorsque ces trois fibrés S, \underline{V}, E sont en situation de suite exacte (3.50). Nous avons eu l'occasion de mentionner ce résultat à propos de questions de positivité de courants impliqués dans l'exemple 2.35.

où $\beta \in C_{1,0}^\infty(X, \text{Hom}(S, E))$ est appelée *première forme fondamentale* de S « dans » \underline{V} et $\beta^* \in C_{0,1}^\infty(X, \text{Hom}(E, S))$ désigne la $(0, 1)$ -forme adjointe. Pour démontrer ce résultat, il faut voir comment « corriger » la connexion $\nabla_{\underline{V}}$ sur \underline{V} définie (modulo l'isomorphisme $\iota^* \oplus \pi$) par $\nabla_{\underline{V}} = D_S \oplus D_E$ (et compatible avec la structure hermitienne sur \underline{V}) de manière à en faire la connexion de Chern $D_{\underline{V}}$. Il s'agit donc de trouver ici la matrice $\Gamma \in C_1^\infty(X, \text{Hom}(\underline{V}, \underline{V}))$ de 1-formes telle que

$$\nabla_{\underline{V}} + \Gamma \wedge \bullet$$

soit à la fois compatible avec la structure hermitienne (donc $\Gamma^* = -\Gamma$) comme $\nabla_{\underline{V}}$, mais en plus avec la structure complexe sur \underline{V} . Ce sont ces calculs algébriques (conduits dans la preuve du théorème 14.3 de [De0]) que nous admettrons ici et qui conduisent à la représentation matricielle (3.51); le point essentiel à utiliser est l'holomorphie des morphismes ι et π ($D_0''[\iota] = 0$ et $D_0''[\pi] = 0$ si D_0'' désigne dans chaque cas la connexion canonique sur les fibrés holomorphes respectivement S ou \underline{V}). Le calcul du tenseur de courbure de $(\underline{V} \rightarrow X, | \cdot |)$ donne alors

$$(3.52) \quad D_{\underline{V}}^2 = \begin{bmatrix} D_S^2 - \beta^* \wedge \beta & -(D_S \circ \beta^* + \beta^* \circ D_E) \\ \beta \circ D_S + D_E \circ \beta & D_E^2 - \beta \wedge \beta^* \end{bmatrix}$$

Comme

$$\begin{aligned} D_{\text{Hom}(S,E)}[\beta] &= \beta \circ D_S + D_E \circ \beta \\ D_{\text{Hom}(E,S)}[\beta^*] &= D_S \circ \beta^* + \beta^* \circ D_E \end{aligned}$$

et que D_E^2 est de type $(1, 1)$, on a nécessairement $D_{\text{Hom}(S,E)}''\beta = 0$ et par conséquent

$$(3.53) \quad D_{\underline{V}}^2 = \begin{bmatrix} D_S^2 - \beta^* \wedge \beta & -D_{\text{Hom}(E,S)}'\beta^* \\ D_{\text{Hom}(S,E)}''\beta & D_E^2 - \beta \wedge \beta^* \end{bmatrix}$$

On déduit de ceci les relations importantes au niveau des premières formes de Chern ¹⁹ :

$$(3.54) \quad \begin{aligned} i\Theta_{E,| \cdot |} &= i\Theta_{\underline{V},| \cdot |}_E + i\beta \wedge \beta^* \\ i\Theta_{S,| \cdot |} &= i\Theta_{\underline{V},| \cdot |}_S + i\beta^* \wedge \beta. \end{aligned}$$

Nous utilisons dans un premier temps la première des relations (3.54). Si l'on exprime en coordonnées locales la $(1, 0)$ -forme β comme

$$\beta = \sum_{j=1}^n dz_j \otimes \beta_j,$$

où β_1, \dots, β_n sont des sections de $\text{Hom}(S, E)$, on peut écrire

$$i\beta \wedge \beta^* = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n idz_j \wedge \overline{dz_k} \otimes (\beta_j \circ \beta_k^*).$$

À cette $(1, 1)$ -forme correspond la forme hermitienne θ_β sur $T(X) \otimes E$ définie par

$$\theta_\beta(\xi \otimes s, \xi' \otimes s') = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \xi_j \overline{\xi'_k} \langle \beta_j \circ \beta_k^*(s), s' \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \xi_j \overline{\xi'_k} \langle \beta_k^*(s), \beta_j^*(s') \rangle_S.$$

¹⁹Ce sont ces relations que nous avons mentionné dans l'exemple 2.35, où elles permettent d'assurer la positivité de $C_E(E|_{X \setminus Y}/L_s, | \cdot |)$ lorsque $(E^* \rightarrow X, | \cdot |^*)$ est *semi-négatif au sens de Nakano*.

On note en particulier que

$$\theta_\beta(\xi \otimes s, \xi \otimes s) = \left| \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k \beta_k^* \right|_S \geq 0.$$

Ainsi, on a

$$(3.55) \quad \theta_E(\xi \otimes s, \xi \otimes s) \geq (\theta_{\underline{V}})_|E(\xi \otimes s, \xi \otimes s) \geq 0.$$

si $\underline{V} \simeq S \oplus^\perp E$ est la décomposition orthogonale de \underline{V} induite par l'isomorphisme $\iota^* \oplus \pi$ (la positivité finale dans (3.55) vient du fait que l'on a travaillé à partir d'une métrique hermitienne sur le fibré trivial \underline{V}). Le fibré $E \rightarrow X$ peut donc bien être équipé d'une métrique hermitienne (induite par la métrique hermitienne arbitraire dont on a décidé d'équiper \underline{V}), de manière à ce que $(E \rightarrow X, | \cdot |)$ soit semi-positif au sens de Griffiths.

En raisonnant avec les duaux, on a aussi la suite exacte

$$(3.56) \quad 0 \longrightarrow E^* \longrightarrow \underline{V}^* \longrightarrow S^* \longrightarrow 0.$$

On répète alors le même raisonnement avec cette nouvelle configuration et l'on déduit, en utilisant cette fois la seconde des relations (3.54) et en notant cette fois $\tilde{\beta} \in C_1^\infty(E^*, S^*)$ la première forme fondamentale de E^* dans \underline{V}^* ,

$$\theta_{E^*}(\xi \otimes s^*, \xi \otimes s^*) = (\theta_{\underline{V}^*})_{|S^*} - |\tilde{\beta}(\xi \otimes s^*)|^2$$

pour toute section ξ de $T(X)$, pour toute section s^* de E^* . On en déduit alors, pour toute section u de $T(X) \otimes E^*$,

$$\theta_{E^*}(u, u) \leq (\theta_{\underline{V}^*})_{S^*}(u, u) \leq 0$$

de par le choix de la métrique hermitienne arbitraire dont on a équipé le fibré V et, par ricochet, V^* (cette fois $\theta_{\underline{V}^*}(\cdot, \cdot) \leq 0$). On en déduit la semi-négativité au sens de Nakano du fibré $(E^*, | \cdot |^*)$.

REMARQUE 3.37. Considérons le *fibré tautologique quotient* Q au dessus de la *grassmannienne* $G_m(V)$ des $(\dim V - m)$ -plans de V . Cette grassmannienne est $\mathbb{P}(V^*)$ lorsque $m = 1$ ²⁰; dans le cas général, on peut la munir d'une structure de variété analytique compacte de dimension $m(\dim V - m)$: la fibre Q_x au dessus du point x de $G_m(V)$ est définie comme le sous-espace V/x . Une manière de rephraser l'exactitude de la suite (3.50) est de dire que l'on dispose du diagramme commutatif (les morphismes étant holomorphes) :

$$(3.57) \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Psi_V : (z, u) \mapsto \{s \in V; s(z) = u\} \in V/S_z} & Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\psi_V : z \mapsto S_z} & G_m(V) \end{array}$$

Le fibré $E \rightarrow X$ s'interprète alors comme le *pullback* d'un fibré tautologique quotient de rang m au dessus de $G_m(V)$ *via* un morphisme holomorphe. On aurait donc pu traiter également ce point (2) en partant d'une métrique hermitienne sur le fibré trivial $G_m(V) \times V$ (qui aurait joué dans ce cas le rôle de \underline{V} , mais cette fois au

²⁰En effet, si V est rapporté à une base v_1, \dots, v_M , $M \leq n + 1$, un $(M - 1)$ -plan de V (i.e. un hyperplan de codimension 1 défini par l'équation $\xi_0^* x_1 + \dots + \xi_M^* x_M = 0$ dans le repère (v_1, \dots, v_M)) s'identifie au point $[\xi_0^* : \dots : \xi_M^*]$ de $\mathbb{P}(V^*)$. Nous avons remarqué ceci lorsque $V = \mathbb{C}^n$ dans l'exemple 3.35.

dessus de la grassmannienne $G_m(V)$). Dans le cas particulier où $m = 1$ et où $G_1(V)$ s'identifie à $\mathbb{P}(V^*)$, le fibré Q s'identifie au fibré dual du fibré tautologique au dessus de $\mathbb{P}(V^*)$, c'est-à-dire (voir l'exemple 1.30) au fibré $\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$.

Preuve du point (3). Dans le cas où $m = 1$ ($E \rightarrow X$ est un fibré holomorphe en droites), dire que $E \rightarrow X$ est *semi-ample* équivaut à dire que pour k assez grand, le fibré $E^{\otimes k}$ est engendré par ses sections globales. D'après le point (2), il est donc possible d'équiper une certaine puissance tensorielle $E^{\otimes k_0}$ de E d'une métrique hermitienne $|\cdot|_{k_0}$ telle que $(E^{\otimes k_0} \rightarrow X, |\cdot|_{k_0})$ soit un fibré semi-positif au sens de Griffiths. En extrayant la racine $1/k_0$ de la métrique, on construit une métrique $|\cdot|$ sur le fibré $E \rightarrow X$ de manière à ce que $(E \rightarrow X, |\cdot|)$ soit semi-positif (ou encore $(E^*, |\cdot|)$ semi-négatif). \square

PROPOSITION 3.11. *Soit $E \rightarrow X$ un fibré holomorphe de rang m au dessus d'une variété analytique complexe X de dimension n .*

- (1) *Si $E \rightarrow X$ est très ample, il est possible d'équiper $E \rightarrow X$ d'une métrique hermitienne de manière à ce que $(E \rightarrow X, |\cdot|)$ soit positif au sens de Griffiths, et que $(E^* \rightarrow X, |\cdot|)$ soit négatif au sens de Nakano. De plus X est alors compacte et peut être plongée comme sous-variété dans la grassmannienne $G_m(V)$ des $(\dim V - m)$ -plans de V .*
- (2) *Si $m = 1$ et que $E \rightarrow X$ est ample, il est possible d'équiper $E \rightarrow X$ d'une structure hermitienne de manière à ce que $(E \rightarrow X, |\cdot|)$ soit positif. De plus X est alors compacte et peut être plongée comme sous-variété dans $\mathbb{P}^{2n+1}(\mathbb{C})$.*

DÉMONSTRATION. *Preuve du point (2).* On commence par prouver ce point, parce que d'une part, c'est le plus facile, d'autre part parce qu'il nous sera le plus utile par la suite (dans la section 3.9, pour prouver le *théorème de Kodaira* 3.41). Si $E \rightarrow X$ est ample, il existe un entier k tel que $E^{\otimes k} \rightarrow X$ est très ample. Exactement comme dans la preuve de la proposition 3.10, on montre qu'il existe un sous-espace V de dimension cette fois au plus $2(n+m) = 2(n+1) = \max(n+m(n+1), 2n+2m)$ tel que, pour chaque z dans X , les évaluations des éléments de V en z engendrent $(J^1 E^{\otimes k})_z$ (fibre au dessus de z du fibré des 1-jets de $E^{\otimes k}$) et, qu'en outre, les évaluations $s \in H^0(X, E^{\otimes k}) \mapsto s(z) + s(z') \in E_z^{\otimes k} \oplus E_{z'}^{\otimes k}$ pour $z \neq z'$ soient surjectives²¹. On reprend ensuite le diagramme (3.57), avec ici $G_1(V) = \mathbb{P}(V^*) \simeq \mathbb{P}^{2n+1}(\mathbb{C})$ et Q dans ce cas particulier le fibré $\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ (voir la remarque 3.37). L'application $\psi_V : z \in X \mapsto \{s \in V; s(z) = 0\} \in \mathbb{P}^1(V^*)$ est injective puisque, lorsque $z \neq z'$, les évaluations $s \in V \mapsto s(z) + s(z') \in E_z^{\otimes k} \oplus E_{z'}^{\otimes k}$ sont surjectives. Le fait que l'évaluation $s \in V \mapsto [j^1(s)]_z$ soit surjective pour tout $z \in X$ implique que, pour tout $z \in X$, l'application $s \in S_z = \{s \in V; s(z) = 0\} \mapsto d_z s \in \text{Hom}(T_z(X), E_z^{\otimes k})$ soit aussi surjective. Nous allons en déduire que la différentielle de ψ_V en un point $z \in X$ est injective, ce qui prouvera que ψ_V est un *plongement holomorphe*, i.e. réalise un homéomorphisme entre X et $\psi_V(X)$ équipé de la topologie de $\mathbb{P}(V^*)$ restreinte, de plus holomorphe; en effet, toute immersion

²¹À la place du fibré $E^{\otimes k} \rightarrow X$, on considère les fibrés $J^1(E^{\otimes k}) \rightarrow X$ (des 1-jets de E au dessus de X , de rang $m(n+1) = n+1$) et $E^{\otimes k} \times E^{\otimes k} \rightarrow (X \times X) \setminus \Delta_X$ (de rang $2m = 2$ au dessus de la variété analytique $(X \times X) \setminus \Delta_X$, de dimension $2n$, Δ_X désignant ici la diagonale de $X \times X$).

injective propre holomorphe (c'est le cas de ψ_V , ici en plus holomorphe) est un *plongement holomorphe* (voir l'exemple 2.6 du chapitre 2 de [HY]). Décrivons pour cela l'action de $d_z\psi_V$ sur $h \in T_z(X)$. On a, si W_z désigne un supplémentaire de S_z dans V (ici une droite vectorielle de V)

$$S_{z+h} = \{\tilde{s} = s + t \in V; s \in S_z, t = u_h(s) \in W_z; \tilde{s}(z+h) = 0\}$$

puisque S_{z+h} se présente comme un graphe. Comme

$$\tilde{s}(z+h) = 0 = \tilde{s}(z) + d_z\tilde{s}(h) + O(|\tilde{s}||h|^2) = t(z) + d_zs(h) + O(|s||h|^2)$$

(d'après la formule de Taylor²², plus le fait que $|t| = O(|h|)$), il vient

$$t(z) = -d_zs(h) + O(|s||h|^2),$$

donc, puisque Ψ_V réalise au niveau des fibres l'isomorphisme entre E_z et $V/S_z \simeq W_z$,

$$u_h(s) = t(z) = \Psi_V(t(z)) = \Psi_V(-d_zs(h) + O(|s||h|^2)) = -\Psi_V(d_zs(h) + O(|s||h|^2)).$$

On utilise ensuite l'identification entre l'espace tangent $T_{S_z}(\mathbb{P}(V^*))$ et $\text{Hom}(S_z, V/S_z)$ pour remarquer que l'application :

$$h \in T_z(X) \mapsto d_z\psi_V(h) \in T_{S_z}(G_1(V)) = T_{S_z}(\mathbb{P}(V^*))$$

s'identifie à l'application

$$s \in S_z \mapsto -\Psi_V(d_zs(h)).$$

La surjectivité de $s \in V \mapsto d_zs \in \text{Hom}(T_z(X), E_z^{\otimes k})$ et le fait que Ψ_V réalise au niveau des fibres un isomorphisme entre $E_z^{\otimes k}$ et $W_z \simeq V/S_z$ impliquent l'injectivité de $d_z\psi_V$, ce qui assure que ψ_V est un plongement holomorphe. Non seulement ceci implique que X est compacte, mais encore que $E^{\otimes k}$ (équipé ainsi d'une métrique $|\cdot|_k$) est le *pullback* du fibré tautologique $\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ *via* le plongement ψ_V . D'où la définie-positivité de $i\Theta_{E^{\otimes k}, |\cdot|_k} = \psi_V^*[i\Theta_{\mathcal{O}(1), |\cdot|}]$ (on munit $\mathcal{O}(1)$ de la métrique de Fubini-Study). Il suffit ensuite d'extraire la racine k -ième de cette métrique positive pour construire une métrique permettant d'équiper le fibré en droites $E \rightarrow X$ d'une structure de fibré hermitien positif.

Preuve du point (1). On reprend le même schéma de preuve en introduisant un sous-espace vectoriel V de dimension au plus égale à $\max(n+m(n+1), 2n+2m)$ (construit comme à la proposition 3.10) de manière à ce que l'application ψ_V impliquée dans le diagramme (3.57) (cette fois dans le cas général et non plus le cas où $m = 1$) soit un *plongement holomorphe* (la preuve est identique à celle qui a été faite lors de la preuve du point 2). On en déduit d'une part que X est compacte (car plongée dans la variété compacte $G_m(V)$) et que le fibré $E \rightarrow X$ s'obtient comme *pullback* *via* Ψ_V du fibré Q restreint à $\psi_V(X)$. Ce fibré Q est équipé naturellement d'une métrique; il suffit pour cela de choisir une métrique arbitraire sur V . On constate, si $h \in T_z(X)$ et $\sigma \in E_z$, que, par *pullback* *via* Ψ_V et choix de la métrique sur V :

$$\begin{aligned} \theta_E(h \otimes \sigma, h \otimes \sigma) &= \theta_Q((d_z\psi_V(h)) \otimes \Psi_V(\sigma), (d_z\psi_V(h)) \otimes \Psi_V(\sigma)) \\ (3.58) \quad &= |s \in S_z \mapsto \langle \Psi_V(d_z\sigma(h)), \Psi_V(\sigma) \rangle|^2 \\ &= |s \in S_z \mapsto \langle d_zs(h), \sigma \rangle|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

²²Il faut penser aussi à utiliser le fait suivant : puisque s est une section holomorphe, les inégalités de Cauchy assurent un contrôle local uniforme de toutes les dérivées de s en termes de $|s| = \sup |s(\zeta)|$ au voisinage de z .

D'après la surjectivité de $s \in S_z \mapsto d_z s \in T_z^*(X) \otimes E_z = \text{Hom}(T_z(X), E_z)$, on voit que $\theta_E(h \otimes \sigma, h \otimes \sigma) > 0$ si $h \neq 0$ et $\sigma \neq 0$. Le fibré $E \rightarrow X$ équipé de la métrique ainsi transportée depuis $Q \rightarrow G_m(V)$ est *positif au sens de Griffiths*. Mais on peut aussi interpréter ds_z comme une forme linéaire sur $T_z(X) \otimes E_z^*$. On a ainsi, d'après (3.58) ré-interprétée :

$$\theta_{E^*}(u, u) = -|s \in S_z \mapsto d_z s(u)|^2 < 0 \quad \forall u \neq 0 \in T_z(X) \otimes E_z^*.$$

Ceci montre que $E^* \rightarrow X$ équipé de la métrique duale $|\cdot|_*$ est *néгатif au sens de Nakano*. \square

Le *théorème d'annulation de Kodaira-Nakano* (théorème 3.32) implique enfin un résultat majeur concernant l'*équivalence entre positivité et amplitude* pour les fibrés en droites holomorphes $E \rightarrow X$ au dessus d'une variété analytique complexe.

PROPOSITION 3.12. *Soit X une variété analytique complexe compacte de dimension n et $E \rightarrow X$ un fibré holomorphe en droites sur X . Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1) *Le fibré $E \rightarrow X$ est positif, i.e. peut être équipé d'une métrique $|\cdot|$ telle que $c_1(E, |\cdot|)$ corresponde à une $(1, 1)$ forme définie positive.*
- (2) *Le fibré $E \rightarrow X$ est ample, i.e. il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $E^{\otimes k} \rightarrow X$ soit très ample.*

DÉMONSTRATION. L'implication (2) \implies (1) est l'assertion (2) de la proposition 3.11. Il reste donc à prouver l'implication (1) \implies (2). Considérons donc un fibré positif $E \rightarrow X$. Pour montrer que $E \rightarrow X$ est *ample*, nous allons utiliser l'éclatement $\pi_Y : X_{\mathcal{I}_Y} \rightarrow X$ de X suivant le faisceau cohérent d'idéaux associé à une sous-variété particulière, en l'occurrence soit $Y = \{z, z'\}$, où z et z' sont deux points distincts de X , soit $Y = \{z\}$, pour montrer que, pour k assez grand, les évaluations $s \in H^0(X, E^{\otimes k}) \mapsto s(z) + s(z') \in E_z^{\otimes k} \oplus E_{z'}^{\otimes k}$ et $s \in H^0(X, E^{\otimes k}) \mapsto [j^1(s)]_z \in (J^1 E^{\otimes k})_z$ sont surjectives (la condition « k suffisamment grand » ne dépendant pas du choix de z ou z'). Ceci prouvera bien que le fibré $E^{\otimes k} \rightarrow X$ est *très ample*, d'où l'amplitude du fibré $E \rightarrow X$.

Soit Y est une sous-variété de X et $X_{\mathcal{I}_Y} \xrightarrow{\pi} X$ l'*éclatement* de X suivant le faisceau cohérent d'idéaux \mathcal{I}_Y . Cette opération d'*éclatement* est décrite dans la section 1.4.6 et fournit dans ce cas une variété analytique complexe $X_{\mathcal{I}_Y}$, elle aussi de dimension n , équipée d'un *diviseur exceptionnel* $D_{\mathcal{I}_Y}$ de support $\pi^{-1}(Y)$ défini par (1.33), avec le fibré en droites $\mathcal{O}(D_{\mathcal{I}_Y})$ qui lui correspond, voir la section 1.4.1. On voit aisément que, si K_X désigne le fibré canonique sur X (i.e. le fibré $(T^*(X))^{\wedge n}$), le fibré canonique $K_{X_{\mathcal{I}_Y}}$ sur $X_{\mathcal{I}_Y}$ est donné par

$$K_{X_{\mathcal{I}_Y}} = \mathcal{O}((\text{codim } Y - 1)D_{\mathcal{I}_Y}) \otimes \pi^*[K_X]$$

(il suffit pour cela d'examiner la *pullback* d'une forme s'exprimant en coordonnées locales $dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ au voisinage d'un point y de Y). D'autre part, le fibré $(\mathcal{O}(D_{\mathcal{I}_Y}))_{\pi^{-1}(Y)}$ est isomorphe au fibré normal $N(\pi^{-1}(Y))$ au dessus de l'hyper-surface (dans ce cas lisse) $\pi^{-1}(Y)$, ou encore au fibré $\mathcal{O}(-1) \mapsto \mathbb{P}(NY)$, fibré tautologique trivial au dessus du fibré projectivisé normal $\mathbb{P}(NY) \rightarrow Y$ au dessus de Y (la fibre au dessus du point $(y, [\xi])$ étant la droite $\mathbb{C}\xi$); voir la preuve de la proposition 12.4 du chapitre 7 de [De0]. Notons que dans le cas particulier où Y est de dimension 0 (cas qui nous intéressera ici), ces assertions sont immédiates

puisque, si par exemple $Y = \{z_0\}$, le diviseur exceptionnel de l'éclatement de X suivant \mathcal{I}_Y s'identifie dans ce cas à $\{z_0\} \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$.

Dans notre cas ici, comme Y est dans les ceux cas de codimension n , nous avons

$$K_{X_{\mathcal{I}_Y}} = \mathcal{O}((n-1)D_{\mathcal{I}_Y}) \otimes \pi^*[K_X].$$

Si $k \in \mathbb{N}$, notons \mathcal{L}_k le faisceau localement libre de rang 1 des sections du fibré en droites

$$\mathcal{O}(-2D_{\mathcal{I}_Y}) \otimes \pi^*[E^{\otimes k}] \rightarrow X_{\mathcal{I}_Y}.$$

On remarque que l'on a

$$\begin{aligned} \check{H}^1(X_{\mathcal{I}_Y}, \mathcal{L}_k) &= H_{\text{Db}}^{n,1}\left(X_{\mathcal{I}_Y}, K_{X_{\mathcal{I}_Y}}^{-1} \otimes \mathcal{O}(-2D_{\mathcal{I}_Y}) \otimes \pi^*[E^{\otimes k}]\right) \\ &= H_{\text{Db}}^{n,1}\left(X_{\mathcal{I}_Y}, \mathcal{O}(-(n+1)D_{\mathcal{I}_Y}) \otimes \pi^*[K_X^{-1} \otimes E^{\otimes k}]\right). \end{aligned}$$

Or le fibré en droites

$$\tilde{\mathcal{L}}_k := \mathcal{O}(-(n+1)D_{\mathcal{I}_Y}) \otimes \pi^*[K_X^{-1} \otimes E^{\otimes k}]$$

est un fibré positif lorsque k est suffisamment grand.

Pour voir cela, on prend une métrique arbitraire sur K_X et la métrique de Fubini-Study sur $(\mathcal{O}(-D_{\mathcal{I}_Y}))|_{\pi^{-1}(Y)}$ qui fait, on le sait, de ce fibré un fibré positif comme l'est $\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, $(-dd^c \log |s|^2)$ est une forme positive si s est une section de $\mathcal{O}(1)$, i.e. un polynôme homogène de degré 1; cette métrique sur $(\mathcal{O}(-D_{\mathcal{I}_Y}))|_{\pi^{-1}(Y)}$ peut être prolongée de manière arbitraire en une métrique sur le fibré $\mathcal{O}(-D_{\mathcal{I}_Y})$, considéré cette fois comme un fibré en droites au dessus de $X_{\mathcal{I}_Y}$ toute entière. Comme $E \rightarrow X$ est positif et que X est compacte, le fibré

$$L_k := \mathcal{O}(-D_{\mathcal{I}_Y}) \otimes \pi^*[E^{\otimes k}] \rightarrow X_{\mathcal{I}_Y}$$

est positif pour k assez grand ($k \geq C_0(Y)$) : en effet, pour tout $T(X_{\mathcal{I}_Y})$, on a

$$\theta_{L_k}(t, t) = \theta_{\mathcal{O}(-D_{\mathcal{I}_Y})}(t, t) + k\theta_E(d\pi(t), d\pi(t));$$

or, si $z \in E$ et $\tau \neq 0 \in T_z(X_{\mathcal{I}_Y})$, on a $d\pi_z(\tau) = 0$ si et seulement si $z \in \pi^{-1}(Y)$ et τ est tangent à la fibre au dessus de z du fibré $\mathcal{O}(-D_{\mathcal{I}_Y})$, ce qui implique

$$\theta_{\mathcal{O}(-D_{\mathcal{I}_Y})}(\tau, \tau) > 0.$$

En choisissant k assez grand, on parvient donc, du fait que le fibré tangent unitaire à $X_{\mathcal{I}_Y}$ est, comme X , compact, à compenser le fait de ne disposer d'aucune information sur la positivité de $\mathcal{O}(-D_{\mathcal{I}_Y})$ au dessus de $X_{\mathcal{I}_Y} \setminus \pi^{-1}(Y)$, et à assurer ainsi la positivité du fibré holomorphe hermitien L_k (pour $k \geq C_0(Y)$). On a donc en particulier

$$i(\Theta_{\mathcal{O}(-D_{\mathcal{I}_Y})} + C_0(Y)\sigma^*[\Theta_E]) > 0$$

sur $X_{\mathcal{I}_Y}$. Comme $E \rightarrow X$ est positif, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$i(k_0\Theta_E - \Theta_{K_X}) > 0$$

sur X et on en déduit la positivité de $\tilde{\mathcal{L}}_k$ pour $k \geq k_0 + (n+1)C_0(Y)$. Le *théorème d'annulation de Kodaira-Nakano* (théorème 3.32) implique alors

$$(3.59) \quad \check{H}^1(X_{\mathcal{I}_Y}, \mathcal{L}_k) = 0$$

pour $k \geq k_0 + C_0(Y)(n+1)$ lorsque $Y = \{z, z'\}$ ou $Y = \{z\}$, z et z' étant deux points distincts de X . Si l'on examine soigneusement la preuve, et en particulier l'argument de compacité utilisé, on constate que $C_0(Y)$ ne dépend en fait que du

nombre de points impliqués dans Y (ici 1 ou 2) et non de Y . On peut donc poser $C_0(Y) = C_0$.

Il reste à en déduire que le fibré $E^{\otimes k}$ est *très ample* pour k assez grand (précisément $k \geq k_0 + C_0(n+1)$). Prenons donc k ainsi. Considérons deux points distincts z et z' de X , un voisinage U de z et un voisinage U' de z' de manière à ce qu'il existe une section $\sigma \in H^0(U, E^{\otimes k})$ (*resp.* une section de $\sigma' \in H^0(U', E^{\otimes k})$) telles que σ (*resp.* σ') réalise un 1-jet prescrit de $E^{\otimes k}$ au point z (*resp.* z'). On introduit des fonctions plateau ψ et ψ' de supports respectivement inclus dans U et U' , identiquement égales à 1 au voisinage respectivement de z et z' . La section

$$\tilde{s} = \psi\sigma + \psi'\sigma' \in C_{0,0}^\infty(X, E^{\otimes k})$$

réalise bien les 1-jets prescrits en z et z' , mais elle est C^∞ et il faut donc la corriger pour en faire une section de $H^0(X, E^{\otimes k})$ réalisant les mêmes 1-jets aux points z et z' . Au voisinage de $Y = \{z, z'\}$, on a $D''[\tilde{s}] = 0$ (ici D'' est la connexion canonique sur $E^{\otimes k}$). Transportons nous sur l'éclatement $X_{\mathcal{I}_Y} \xrightarrow{\pi} X$ de X suivant $\{z, z'\}$ et notons h la section canonique de $\mathcal{O}(-D_{\mathcal{I}_Y})$ telle que $[D_{\mathcal{I}_Y}] = \text{div}(h)$. La forme $\pi^*[D''[\tilde{s}]]$ s'annulant au voisinage du lieu des zéros de h , on peut considérer la $(0, 1)$ -forme fermée

$$h^{-2}\pi^*[D''[\tilde{s}]] \in C_{0,1}^\infty(X_{\mathcal{I}_Y}, \mathcal{O}(-2D_{\mathcal{I}_Y}) \otimes \pi^*[E^{\otimes k}]).$$

Il résulte de la trivialité du groupe $\check{H}^1(X_{\mathcal{I}_Y}, \mathcal{L}_k)$ (3.59) qu'il existe (dès que l'on assure $k \geq k_0 + C_0(n+1)$) un élément

$$u \in C_{0,0}^\infty(X_{\mathcal{I}_Y}, \mathcal{O}(-2D_{\mathcal{I}_Y}) \otimes \pi^*[E^{\otimes k}])$$

tel que $D''u = h^{-2}D''[\tilde{s}]$. On dispose ainsi d'une section

$$v = \pi^*[\tilde{s}] - h^2u \in H^0(X_{\mathcal{I}_Y}, \pi^*[E^{\otimes k}]).$$

Comme le fibré $\pi^*[E]$ est trivial au dessus d'un voisinage de $\pi^{-1}(Y)$, il existe une section $s \in H^0(X, E^{\otimes k})$ telle que

$$\pi^*[s] = \pi^*[\tilde{s}] - h^2u.$$

Comme h s'annule à l'ordre 1 sur $\pi^{-1}(Y)$, les 1-jets en z et z' de s et \tilde{s} coïncident et l'on a donc trouvé la section holomorphe de $E^{\otimes k}$ réalisant les 1-jets prescrits au dessus de z et z' . Ceci montre que le fibré $E^{\otimes k} \rightarrow X$ est *très ample* dès que $k \geq k_0 + C_0(n+1)$. Le fibré $E \rightarrow X$ est donc *ample*. Ceci conclut la preuve de l'implication (1) \implies (2) et clôt celle de la proposition 3.12. Ouf! \square

3.9. Un critère d'algébricité : le théorème de Kodaira

La notion de positivité permet non seulement d'établir (comme dans la section 3.7) des résultats précisant l'annulation de la cohomologie à partir d'un certain seuil, mais aussi de formuler des *critères d'algébricité*.

DÉFINITION 3.38. Une variété analytique complexe compacte est dite *algébrique projective* si et seulement s'il existe un *plongement holomorphe* de X comme sous-variété analytique complexe de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$.

REMARQUE 3.39. Une sous-variété de dimension n de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ peut toujours (c'est la conséquence d'un célèbre théorème de Chow, l'une des nombreuses incarnations du principe G.A.G.A.²³ de Jean-Pierre Serre) être définie comme le lieu des zéros communs d'un idéal homogène (P_1, \dots, P_M) de $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]$ tel que l'idéal engendré par P_1, \dots, P_M et tous les mineurs de rang $N - n$ de la matrice jacobienne

$$\text{Jac}(P_1, \dots, P_M) := \left[\frac{\partial P_j}{\partial z_k} \right]_{\substack{1 \leq j \leq M \\ 0 \leq k \leq N}}$$

soit un idéal (X_0, \dots, X_N) -primaire.

EXEMPLE 3.40. Les exemples typiques de variétés algébriques projectives sont les grassmanniennes $G_m(V)$ d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $M \geq m$. Le produit de deux espaces projectifs $\mathbb{P}^{N_1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^{N_2}(\mathbb{C})$ est une variété algébrique projective, le plongement (dit de *Segre*) dans $\mathbb{P}^{(N_1+1)(N_2+1)-1}$ étant donné par l'application :

$$([z_0 : \dots : z_{N_1}], [w_0 : \dots : w_{N_2}]) \mapsto [z_0 w_0 : \dots : z_0 w_{N_2} : \dots : z_{N_1} w_0 : \dots : z_{N_1} w_{N_2}].$$

Les variétés toriques complètes X telles qu'elles sont définies (comme quotients géométriques) dans l'exemple 1.31 ne sont pas toujours projectives ; elles ne le sont que s'il est possible de définir (voir l'étude faite dans l'exemple 3.36) un diviseur de Weil

$$a_1 D_1 + \dots + a_{n+r} D_{n+r}$$

(on reprend ici les notations de cet exemple) tel que le fibré en droites associé soit *ample* (voir aussi dans cet exemple la caractérisation combinatoire de cette propriété d'amplitude en termes de l'éventail Σ à partir duquel X a été construite). Cela résulte de l'assertion (2) de la proposition 3.11.

Nous formulons ici le *théorème de plongement de Kodaira* [Kod1]

THEORÈME 3.41. *Soit X une variété analytique complexe compacte de dimension n . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1) *La variété X est une variété algébrique projective.*
- (2) *Il existe un fibré en droites holomorphe $E \rightarrow X$ qu'il est possible d'équiper d'une métrique hermitienne de manière à en faire un fibré positif.*
- (3) *La variété X peut être munie d'une structure kählérienne ω telle que la classe de cohomologie de de Rham de ω dans $H_{\text{DR}}^2(X, \mathbb{R})$ corresponde à une classe rationnelle, i.e à un élément de $\check{H}^2(X, \mathbb{Q})$ via l'isomorphisme entre $H_{\text{DR}}^2(X, \mathbb{R})$ et $\check{H}^2(X, \mathbb{R})$.*

DÉMONSTRATION. *Preuve de (1) \implies (2).* C'est immédiat ; il suffit de prendre le *pullback* via le plongement ι dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ du fibré $\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, équipé de la métrique de Fubini-Study. On a bien ainsi un fibré holomorphe hermitien positif sur X .

Preuve de (2) \implies (3). On considère la première forme de Chern $c_1(E, | \cdot |)$ du fibré positif $(E \rightarrow X, | \cdot |)$, représentant donc dans $H_{\text{DR}}^2(X, \mathbb{R})$ la première classe caractéristique du fibré en droites $E \rightarrow X$. Dans l'isomorphisme entre $H_{\text{DR}}^2(X, \mathbb{R})$ et $\check{H}^2(X, \mathbb{R})$, cette classe correspond à un élément de $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$, à savoir la première forme de Chern du fibré $E \rightarrow X$ (voir la définition 1.27 et la remarque 1.28).

²³« Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique »[Ser1].

Preuve de (3) \implies (2). En multipliant $\{\omega\}$ par un entier, on peut supposer que la classe de cohomologie de de Rham $\{\omega\}$ (supposée rationnelle) définit un élément de $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$ (toujours *via* l'isomorphisme entre $H_{\text{DR}}^2(X, \mathbb{R})$ et $\check{H}^2(X, \mathbb{R})$). La forme ω est une $(1, 1)$ forme C^∞ positive (on peut donc la considérer comme un courant positif fermé) et l'on voit, en reprenant mot pour mot la méthode utilisée dans l'exemple 2.11, et en utilisant l'*hypoellipticité* de l'opérateur de Cauchy-Riemann impliqué dans l'utilisation du lemme de Dolbeault, qu'il est possible de construire un recouvrement de X par des ouverts U_α de manière à ce que, dans chaque U_α , on dispose d'une solution C^∞ réelle φ_α de l'équation $dd^c\varphi_\alpha = \omega$. Les fonctions $\varphi_\beta - \varphi_\alpha$, chacune définie dans l'ouvert $U_\alpha \cap U_\beta$ (supposé simplement connexe) sont donc pluriharmoniques et l'on peut donc trouver²⁴, pour chaque paire d'indices (α, β) , une fonction holomorphe $f_{\alpha, \beta}$ dans $U_\alpha \cap U_\beta$ telle que

$$\forall z \in U_\alpha \cap U_\beta, \varphi_\beta(z) - \varphi_\alpha(z) = 2\text{Re}[f_{\alpha, \beta}(z)].$$

Il ne reste plus ensuite (quitte à faire quelques ajustements) qu'à vérifier que la cochaîne $(U_\alpha \cap U_\beta, \exp(-f_{\alpha, \beta}))_{\alpha, \beta}$ définit un élément de $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ (\mathcal{U} désignant le recouvrement de X par les U_α , voir la proposition 1.4 et ses suites pour les rappels concernant la cohomologie de Čech), donc un fibré holomorphe en droites $E \rightarrow X$. On note δ la prise de bord des *cochaines* au sens de Čech. Comme

$$2\text{Re}(\delta f)_{\alpha\beta\gamma} = (\varphi_\gamma - \varphi_\beta) - (\varphi_\gamma - \varphi_\alpha) + (\varphi_\beta - \varphi_\alpha) = 0,$$

on a $(\delta f) \in \check{H}^2(\mathcal{U}, i\mathbb{R})$. Posons maintenant, dans chaque U_α ,

$$A_\alpha = (i/4\pi)(\bar{\partial}\varphi_\alpha - \partial\varphi_\alpha).$$

On remarque que

$$(\delta A)_{\alpha\beta} := A_\beta - A_\alpha = \frac{1}{2\pi}d[\text{Im} f_{\alpha\beta}]$$

dans $U_\alpha \cap U_\beta$. Les classes de cohomologie de Čech de $\delta[(1/2\pi)\text{Im} f_{\alpha\beta}]_{\alpha, \beta}$ et de $\{\omega\}$ (considéré comme élément de $\check{H}^2(X, \mathbb{R})$, en fait de $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$ par hypothèses) coïncident et il existe donc un cocycle $(n_{\alpha\beta\gamma})_{\alpha, \beta, \gamma}$ dans $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$ tel que

$$\delta\left[\left(\frac{1}{2\pi}\text{Im} f_{\alpha\beta}\right)_{\alpha, \beta}\right] = (n_{\alpha\beta\gamma})_{\alpha, \beta, \gamma} + \delta[(c_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta}],$$

où $(c_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta}$ est une 1-cochaîne à valeurs dans \mathbb{R} . En remplaçant $f_{\alpha\beta}$ par $\tilde{f}_{\alpha\beta} := f_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta}$, on assure $\delta[(\tilde{f}_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta}] \in 2i\pi\mathbb{Z}$ et $(\exp(-\tilde{f}_{\alpha\beta}))_{\alpha, \beta}$ devient un 1-cocycle à valeurs dans \mathcal{O}_X^* . Nous avons ici notre fibré en droites holomorphe $E \rightarrow X$ grâce à la proposition 1.4. Mais

$$\varphi_\beta - \varphi_\alpha = 2\text{Re} f_{\alpha\beta} = -\log |g_{\alpha\beta}|^2,$$

où $g_{\alpha\beta} = \exp(-f_{\alpha\beta})$. En posant $h_\alpha = \exp(-\varphi_\alpha)$, nous définissons une métrique sur $E \rightarrow X$ telle que

$$c_1(E, | \cdot |) = dd^c\varphi_\alpha = \omega \text{ dans } U_\alpha.$$

L'assertion (2) est bien prouvée.

²⁴Il s'agit juste là de la transposition au cadre multi-variables du fait qu'une fonction harmonique dans un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} s'écrit dans cet ouvert comme la partie réelle d'une fonction holomorphe, voir [De0], théorème 5.16 du chapitre 1.

REMARQUE 3.42. Nous pouvons adapter l'argument utilisé ici pour montrer que si X est une sous-variété projective (équipée de la métrique de Fubini-Study restreinte), toute classe de cohomologie de $H_{\text{Db}}^{1,1}(X, \mathbb{C})$, ayant une classe de cohomologie rationnelle $\{\omega\}$ lorsqu'on la considère comme élément de $H^2(X, \mathbb{C})$, se représente par un $(1, 1)$ -courant d'intégration (le courant d'intégration attaché à une section holomorphe du fibré $E \rightarrow X$ construit suivant la démarche ci-dessus). Il s'agit là d'un *théorème de Lefschetz* qui constituera le cas $m = 1$ de la conjecture de Hodge que nous énoncerons plus loin (conjecture 3.45).

Preuve de (2) \implies (1). Il s'agit ici du point essentiel de la preuve du théorème de Kodaira, celui où interviennent les résultats d'annulation établis à la section 3.7, au travers de la proposition 3.12 (conséquence du théorème d'annulation 3.32 de Kodaira-Nakano). Il résulte en effet de cette proposition que le fibré en droites $E \rightarrow X$, supposé positif au sens de Griffiths est *ample*, i.e. tel que pour k assez grand, $E^{\otimes k} \rightarrow X$ soit *très ample*. On reprend alors la preuve du point 2 de la proposition 3.11 qui nous permet de conclure que X est nécessairement une variété algébrique projective, qu'il est possible de plonger dans $\mathbb{P}^{2n+1}(\mathbb{C})$. L'assertion (1) est bien ainsi démontrée.

Le *théorème de Kodaira* est ainsi complètement démontré. \square

REMARQUE 3.43. Il résulte du *théorème de Kodaira* que toute surface de Riemann compacte peut être plongée dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ comme une courbe projective. En effet, il existe sur X une structure kählérienne ω (voir l'exemple 3.6) qu'il suffit de normaliser de manière à ce que $\int_X \omega = 1$ pour que sa classe de cohomologie soit rationnelle (même de fait entière).

En relation étroite avec le *théorème de Kodaira*, nous allons pour conclure ce chapitre 3 énoncer la *conjecture de Hodge* sur une variété algébrique projective X . Nous avons tout d'abord besoin d'une définition, à lier au théorème 3.23 de décomposition de Hodge des variétés kählériennes.

DÉFINITION 3.44. Soit X une variété kählérienne compacte de dimension n . Une *classe de Hodge* de degré $2m$ ($0 \leq m \leq n$) est par définition un élément de $H_{\text{Db}}^{m,m}(X, \mathbb{C}) \simeq H_{\text{BC}}^{m,m}(X, \mathbb{C})$ définissant (une fois considéré comme un élément de $H_{\text{DR}}^{2m}(X, \mathbb{C})$ suivant la décomposition de $H_{\text{DR}}^{2m}(X, \mathbb{C})$ donnée par (3.33)) une classe de cohomologie rationnelle $\{\omega\} \in \check{H}^{2m}(X, \mathbb{Q})$, ou encore induisant un \mathbb{Q} -homomorphisme de $H_{2m}(X, \mathbb{Q})$ dans \mathbb{Q} . Les classes de Hodge de degré $2m$ forment un groupe additif, dit *groupe des classes de Hodge de degré $2m$* .

Voici donc l'énoncé de la célèbre *conjecture de Hodge* (formulée par Hodge [Hod1] en 1950) :

CONJECTURE 3.45. *Toute classe de Hodge de degré $2m$ ($0 \leq m \leq n$) sur une variété algébrique projective de dimension n est une combinaison linéaire finie à coefficients rationnels de classes de cohomologie (au sens des courants (m, m)) de courants d'intégration $[A]$ sur des sous-ensembles algébriques irréductibles de dimension $n - m$ de X . Ou encore : toute classe de Hodge de degré $2m$ sur X , $m = 0, \dots, n$, est « algébrique » (au sens précisé ci-dessus).*

Cas connu. La conjecture est vraie lorsque $m = 1$. C'est un *théorème de Lefschetz*, que nous avons mentionné dans la preuve du *théorème de Kodaira* (remarque 3.42). On sait aussi que si elle est vraie pour les classes de degré m avec $2m \leq n$, elle

l'est aussi pour les classes de degré $2(n - m)$; cela résulte du *théorème « vache » de Lefschetz* (« *Hard Lefschetz theorem* », voir [De0], théorème 8.17, chapitre 6) que nous ne démontrerons pas dans ce cours; la conjecture est donc aussi vraie pour $m = n - 1$. Pour une présentation du statut de la conjecture, on pourra par exemple consulter [Del] et [Vois], ainsi que [Simp] pour d'autres aspects, cette fois plus en relation avec le point de vue de l'« effectivité » en géométrie algébrique. Une formulation alternative de la *conjecture de Hodge* implique la construction des *courants résiduels* (voir par exemple [Fab]), en relation avec les objets introduits au chapitre 2 de ces notes de cours (section 2.5.2).

La résolution L^2 du D''

Nous allons dans ce chapitre transposer dans un contexte géométrique les méthodes d'obédience hilbertienne (basées sur des techniques L^2) introduites par L. Hörmander (voir [Hor] et le chapitre IV du cours de P. Charpentier [Chap]). Ceci nous permettra en particulier de revenir dans une ultime section sur l'attaque du *complexe de Koszul* telle qu'elle a été proposée au chapitre 2 (dans la section 2.5.3) et sur l'important *théorème de Briançon-Skoda* (énoncé comme le théorème 2.42 de ce même chapitre 2).

4.1. Le cadre kählérien « complet »

Dans cette section, X sera toujours une variété analytique complexe (supposée connexe) équipée d'une structure kählérienne (voir les définitions 3.1 et 3.2 de la section 3.1), s'exprimant en coordonnées locales

$$h(z) := \sum_{1 \leq j, k \leq n} h_{jk}(z) dz_j \otimes d\bar{z}_k;$$

on notera ω la $(1, 1)$ -forme différentielle fermée $-\text{Im } h$, et l'on introduira à nouveau, étant donné un fibré holomorphe hermitien de rang m au dessus de X , $E \rightarrow X$, les opérateurs D'_E, D'' , et leurs adjoints formels $(D'_E)^*$ et $(D'')^*$, ainsi que les laplaciens de Laplace-Beltrami Δ'_E et Δ'' .

Nous supposerons dans un premier temps ici que (X, h) est une *variété kählérienne complète*, ce qui signifie que (X, δ_h) est un espace métrique complet si δ_h désigne la *distance géodésique*¹ induite par la métrique h . Outre les axiomes habituels régissant la définition d'une distance, il faut ajouter que cette distance δ_h se plie à la règle suivante :

$$(4.1) \quad \forall z_1, z_2 \in X, \quad \inf_{z \in X} (\delta_h(z_1, z), \delta_h(z_2, z)) = \frac{\delta_h(z_1, z_2)}{2}$$

(prendre z à mi-chemin entre z_1 et z_2 le long d'une « géodésique » à ϵ près pour majorer $\delta_h(z_1, z)$ et $\delta_h(z_2, z)$ par $(1/2)(\delta_h(z_1, z_2) + \epsilon)$). Les boules géodésiques fermées de X sont compactes d'après le *théorème de Hopf-Rinow*, et l'on peut construire une fonction de classe C^∞ *d'exhaustion ou exhaustive*

$$\Psi : X \mapsto \mathbb{R}$$

(i.e. telle que les ensembles $\{\Psi < c; c \in \mathbb{R}\}$ soient relativement compacts pour tout $c \in \mathbb{R}$), avec de plus $\|d\Psi\|_h \leq 1$, ce en régularisant, par exemple par convolution avec une approximation d'unité dans \mathbb{C}^n , la fonction $z \mapsto \delta(z_0, z)/2$, z_0 étant un point arbitraire de X .

¹La distance entre deux points est la longueur de la *géodésique*, i.e. le chemin de longueur minimale, reliant ces points et tracée sur la surface.

Nos espaces de référence seront cette fois les espaces de Hilbert

$$L^2_{p,q}(X, E) := W^0\left(X, \left[\bigwedge^p (T_X^{1,0})^* \otimes \bigwedge^q (T_X^{0,1})^*\right] \otimes E\right), \quad 0 \leq p, q \leq n.$$

Le produit scalaire est défini par

$$\langle u, v \rangle := \int_X \langle u(z), v(z) \rangle dV_X(z)$$

(pour plus de détails, se reporter à la section 3.3.2 où ce produit scalaire a été introduit pour les sections C^∞ à support compact). Le fait qu'il s'agisse d'espaces de Hilbert résulte de la *complétude* de (X, h) , plus spécifiquement de l'existence de la fonction exhaustive Ψ nous permettant de nous ramener au cas où X est compacte.

Notons toutefois que l'action de ces opérateurs a été jusque là (voir le chapitre 3) définie sur les espaces $C_{p,q}^\infty(X, E)$, et qu'il s'agit dans cette section de la repenser dans le cadre hilbertien L^2 , en particulier de reprendre soigneusement² la définition des adjoints formels $(D'_E)^*$ et $(D'')^*$ (donc aussi celle de Δ''_E et Δ''). Notre principal centre d'intérêt sera de fait l'opérateur D'' (analogue dans ce cadre géométrique du $\bar{\partial}$ de l'analyse pluricomplexe, voir le cours de P. Charpentier [Charp]) et sa résolution *via* des techniques d'inspiration L^2 , donc de nature hilbertienne ([Hor]).

En tant qu'opérateurs différentiels de $C_{\bullet,\bullet}^\infty(X, E)$ dans $C_{\bullet,\bullet}^\infty(X, E)$, les opérateurs D'' et D'_E se prolongent en des opérateurs \tilde{D}'' et \tilde{D}'_E agissant sur les espaces de courants $\mathcal{D}^{\bullet,\bullet}(X, E)$, tels qu'ils ont été définis au chapitre 2 (section 2.1.2) ; il en est de même pour les adjoints formels $(D'')^*$ et $(D'_E)^*$ que l'on prolonge ainsi en $\widetilde{D''^*}$ et $\widetilde{D'_E^*}$. On peut envisager les quatre opérateurs ainsi prolongés comme des opérateurs non bornés (voir [Charp], chapitre IV, section 1) de $L^2_{\bullet,\bullet}(X, E)$ dans $L^2_{\bullet,\bullet}(X, E)$, le domaine de chacun de ces opérateurs différentiels \tilde{P} étant par définition l'ensemble des $u \in L^2_{\bullet,\bullet}(X, E)$ tel que $\tilde{P}[u] \in L^2_{\bullet,\bullet}(X, E)$. Tous ces opérateurs non bornés sont des opérateurs à domaine dense ($C_{\bullet,\bullet}^\infty$ est dense dans leurs domaines) et de graphe fermé (les espaces $L^2_{\bullet,\bullet}(X, E)$ sont faiblement fermés dans les espace des courants équipés de la topologie de la convergence faible).

Les opérateurs D'' et D'_E admettent donc (considérés au sens L^2 cette fois) des adjoints $(D'')^\dagger$ et $(D'_E)^\dagger$ au sens de Von Neumann, opérateurs eux aussi non bornés, à domaine dense et de graphe fermé, avec :

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \text{Ker}[(D'')^\dagger] &= (\text{Im } D'')^\perp, & \text{Ker}[(D'_E)^\dagger] &= (\text{Im } D'_E)^\perp \\ (\text{Ker } D'')^\perp &= \overline{\text{Im}[(D'')^\dagger]}, & (\text{Ker } D'_E)^\perp &= \overline{\text{Im}[(D'_E)^\dagger]} \end{aligned}$$

Ceci résulte de la théorie de Von Neumann (voir la section 1 du chapitre IV du cours de P. Charpentier [Charp]). Il se trouve en fait que les opérateurs $(D'')^\dagger$ et

²En profitant de la théorie développée par Von Neumann pour les opérateurs linéaires non bornés d'un Hilbert \mathbb{H}_1 dans un autre (\mathbb{H}_2), lorsque ces opérateurs sont définis sous un sous-espace dense de \mathbb{H}_1 et ont de plus leur graphe fermé dans $\mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_2$. Pour tout ce qui concerne la théorie des *opérateurs non bornés d'un espace de Hilbert dans un autre* et les définitions qui l'accompagnent (*domaine d'un opérateur, adjoint au sens de Von Neumann*, etc.), on renvoie à la section 1 du chapitre IV du cours de P. Charpentier [Charp].

$(D'_E)^\dagger$ coïncident dans ce cas³ avec les opérateurs obtenus en étendant $(D'')^*$ et $(D'_E)^*$ aux espaces $\mathcal{D}'^{\bullet,\bullet}(X, E)$, puis en les restreignant (comme indiqué plus haut) au cadre L^2 ; ceci résulte de ce que l'existence de la fonction exhaustive Ψ implique la densité de $\mathcal{D}'^{\bullet,\bullet}(X, E)$ (sections C^∞ à support compact) dans les domaines des opérateurs non bornés D'' , $(D'')^*$ (considérés au sens L^2) ou l'intersection de ces domaines, ce respectivement pour les normes

$$\begin{aligned} u &\mapsto \|u\| + \|D''u\| \\ u &\mapsto \|u\| + \|(D'')^*u\| \\ u &\mapsto \|u\| + \|D''u\| + \|(D'')^*u\| \end{aligned}$$

(idem pour D'_E et $(D'_E)^*$ en place de D'' , $(D'')^*$).

Nous rappelons également ici la définition de l'opérateur Λ de Lefschetz (adjoint formel de $L : (\cdot) \mapsto \omega \wedge (\cdot)$). Il ne sera pas nécessaire par contre de repenser la définition de cet opérateur Λ (agissant sur les $C_{\bullet,\bullet}^\infty(X, E)$). Sur $C_{\bullet,\bullet}^\infty(X, E)$, on dispose de la relation

$$[i\Theta_{E,|\cdot|}, \Lambda] = \Delta'' - \Delta'_E$$

mesurant le « défaut » entre les deux opérateurs de Laplace-Beltrami; s'en déduisent (proposition 3.9) les inégalités de Bochner-Kodaira-Nakano :

$$\begin{aligned} \langle \Delta''_E u, u \rangle &= \langle D''u, D''u \rangle + \langle (D'')^*u, (D'')^*u \rangle \\ &= \|D''u\|^2 + \|(D'')^*u\|^2 \\ (4.3) \quad &\geq \int_X \langle [i\Theta_{E,|\cdot|}, \Lambda](u), u \rangle dV_X, \quad \forall u \in \mathcal{D}'^{\bullet,\bullet}(X, E). \end{aligned}$$

Les méthodes d'analyse fonctionnelle (déjà exploitées dans la section IV-1 du cours de P. Charpentier [**Charp**]) permettent de prouver l'important résultat suivant, concernant la résolubilité de l'équation $D''f = g$ en norme L^2 .

THEOREME 4.1. *Soit (X, h) une variété kählérienne complète de dimension n . Soient $0 \leq p, q \leq n$, $q \geq 1$, et $g \in L^2_{p,q}(X, E)$ telle que, pour presque tout $z \in X$, il existe $\alpha(z) \in [0, \infty[$, tel que*

$$(4.4) \quad \forall u \in C_{p,q}^\infty(X, E), \quad |\langle g(z), u(z) \rangle|^2 \leq \alpha(z) \langle [i\Theta_{E,|\cdot|}, \Lambda](u)(z), u(z) \rangle.$$

Notons, pour z fixé presque partout dans X ,

$$\left\langle [i\Theta_{E,|\cdot|}, \Lambda]^{-1}(g)(z), g(z) \right\rangle$$

le minimum des $\alpha(z)$ satisfaisant (4.4). Si g vérifie $D''[g] = 0$ (D'' étant envisagé ici comme un opérateur non borné de $L^2_{p,q}(X, E)$ dans $L^2_{p,q+1}(X, E)$) et satisfait l'estimation

$$\int_X \left\langle [i\Theta_{E,|\cdot|}, \Lambda]^{-1}(g)(z), g(z) \right\rangle dV_X(z) < +\infty,$$

il existe $f \in L^2_{p,q-1}(X, E)$ tel que $D''f = g$ et

$$(4.5) \quad \|f\|^2 := \int_X |f(z)|^2 dV_X(z) \leq \int_X \left\langle [i\Theta_{E,|\cdot|}, \Lambda]^{-1}(g)(z), g(z) \right\rangle dV_X(z).$$

³Attention! Ceci n'est pas toujours le cas pour des opérateurs quelconques définis *a priori* sur les objets C^∞ et que l'on entend soit prolonger à L^2 en suivant la démarche de Von Neumann, soit prolonger en tant qu'opérateurs agissant sur les distributions ou les courants en définissant leur action au sens faible.

DÉMONSTRATION. Pour tout élément $u \in \mathcal{D}^{p,q}(X, E)$, on a, du fait de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, de l'hypothèse (4.4), et surtout des inégalités (4.3) de Bochner-Kodaira-Nakano :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_X \langle u(z), g(z) \rangle dV_X(z) \right|^2 &\leq \left(\int_X \langle [i\Theta_{E,|\cdot|}, \Lambda]^{-1}(g)(z), g(z) \rangle dV_X(z) \right) \\
 &\quad \times \left(\int_X \langle i[\Theta_{E,|\cdot|}, \Lambda](u), u \rangle dV_X \right) \\
 &\leq \left(\int_X \langle [i\Theta_{E,|\cdot|}, \Lambda]^{-1}(g)(z), g(z) \rangle dV_X(z) \right) \\
 (4.6) \quad &\quad \times (\|D''u\|^2 + \|(D'')^*u\|^2).
 \end{aligned}$$

Ces inégalités subsistent pour tout u dans l'intersection des domaines de D'' et de $(D'')^\dagger$. Si u est un élément du domaine de $(D'')^\dagger$, décomposons u sous la forme

$$u = u_1 + u_2, \quad u_1 \in \text{Ker } D'', \quad u_2 \in (\text{Ker } D'')^\perp = \overline{\text{Im } (D'')^\dagger}.$$

Comme $(D'')^2 = 0$, on a aussi $(D'')^\dagger \circ (D'')^\dagger = 0$ et, par conséquent, $(D'')^\dagger(u_2) = 0$. Comme $D''(g) = 0$, on a

$$\begin{aligned}
 \left| \int_X \langle u, g \rangle dV_X \right|^2 &= \left| \int_X \langle u_1, g \rangle dV_X + \int_X \langle u_2, g \rangle dV_X \right|^2 \\
 &= \left| \int_X \langle u_1, g \rangle dV_X \right|^2 \\
 &\leq \left(\int_X \langle [i\Theta_{E,|\cdot|}, \Lambda]^{-1}(g)(z), g(z) \rangle dV_X(z) \right) \times \|(D'')^\dagger u_1\|^2 \\
 &= \left(\int_X \langle [i\Theta_{E,|\cdot|}, \Lambda]^{-1}(g)(z), g(z) \rangle dV_X(z) \right) \times \|(D'')^\dagger u\|^2.
 \end{aligned}$$

Le théorème de Hahn-Banach permet de prolonger la forme linéaire

$$(D'')^\dagger(u) \in L^2_{p,q-1}(X, E) \mapsto \int_X \langle u, g \rangle dV_X$$

en un élément $f \in L^2_{p,q-1}(X, E)$, pour lequel on continue à disposer de l'estimation

$$\|f\|^2 \leq \int_X \langle [i\Theta_{E,|\cdot|}, \Lambda]^{-1}(g)(z), g(z) \rangle dV_X(z).$$

D'autre part, on a $\langle u, g \rangle = \langle (D'')^\dagger(u), f \rangle$ pour tout u dans le domaine de $(D'')^\dagger$, ce qui signifie précisément $D''[f] = g$. \square

4.2. Le cadre kählérien « non complet »

Nous considérons maintenant une variété kählérienne (X, h) , mais ne supposons plus cette fois que (X, h) est une variété complète; par contre, nous ferons l'hypothèse qu'il est possible d'équiper X d'une métrique kählérienne \widehat{h} de manière à ce que (X, \widehat{h}) soit une variété kählérienne complète.

EXEMPLE 4.2. L'exemple le plus important pour nous sera celui des variétés kählériennes (non nécessairement complètes) sur lesquelles il est possible de construire une fonction d'exhaustion $\Psi \in C_0^\infty(X, \mathbb{R})$ de manière à ce que $dd^c\Psi$ soit un courant positif (voir la définition 2.7), i.e. que Ψ soit une fonction C^∞ à valeurs réelles plurisousharmonique (voir l'exemple 2.11). Une telle variété kählérienne sera dite faiblement pseudoconvexe. Comme $\{\Psi < 0\}$ est alors relativement compact (du

fait que Ψ est exhaustive) et que Ψ est minorée sur tout compact (car de classe C^∞), on peut, quitte à ajouter à Ψ une constante, supposer $\Psi \geq 0$. Posons, si $\omega = -\text{Im } h$ désigne la $(1, 1)$ -forme positive fermée associée à la métrique h ,

$$(4.7) \quad \widehat{\omega} = \omega + 2\pi dd^c(\Psi^2) = \omega + 4\pi\Psi dd^c\Psi + i\partial\Psi \wedge \bar{\partial}\Psi \geq \omega + i\partial\Psi \wedge \bar{\partial}\Psi.$$

Cette $(1, 1)$ -forme $\widehat{\omega}$ induit une structure kählérienne (X, \widehat{h}) sur X . On déduit de plus de (4.7) (puisque $d\Psi = \partial\Psi + \bar{\partial}\Psi$ et que ω est positive) que

$$\sqrt{2}\|\partial\Psi\|_h \leq 1,$$

d'où, par Pythagore,

$$\|d\Psi\|_{\widehat{h}} = \sqrt{2}\|\partial\Psi\|_{\widehat{h}} \leq 1.$$

Les boules pour la distance géodésique sont donc relativement compactes grâce au fait que Ψ est exhaustive et à l'inégalité des accroissements finis, qui implique en effet $|\Psi(z) - \Psi(z_0)| \leq \delta_{\widehat{h}}(z_0, z)$ pour tout couple (z_0, z) de points de X . La métrique « corrigée » (X, \widehat{h}) ainsi réalisée est donc bien, elle, au contraire de (X, h) qui pouvait ne pas l'être, une métrique kählérienne complète.

EXEMPLE 4.3. Les *ouverts pseudoconvexes* U de \mathbb{C}^n , la métrique h étant la métrique usuelle sur \mathbb{C}^n , illustrent la situation (X, h) décrite dans l'exemple précédent (4.2)⁴.

Le résultat que nous avons choisi de mentionner ici est dû à J.P. Demailly (théorème 6.5 de [De0]). Il fournit d'ailleurs un résultat en relation avec le *théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano* (théorème 3.32), où l'on sait que les groupes de cohomologie de Dolbeault $H_{\text{Db}}^{p,q}(X, E)$ sont nuls lorsque $p+q \geq n+1$ et $E \rightarrow X$ est un fibré en droites holomorphe hermitien positif au dessus d'une variété kählérienne X de dimension n . On est ici dans le cas particulier $p = n$, $q \geq 1$. Lorsque $E \rightarrow X$ est positif, ce résultat précise en termes de contrôle L^2 le *théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano*.

THEOREME 4.4. *Soit (X, h) une variété kählérienne faiblement pseudoconvexe, $E \rightarrow X$ un fibré en droites holomorphe hermitien, $\varphi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ une fonction « poids » telle que la forme hermitienne $\theta_{E, | \cdot |, \varphi}$ sur $T(X)$ associée au tenseur*

$$\frac{i}{2\pi} \Theta_{E, | \cdot |, \varphi} + dd^c \varphi \otimes \text{Id}_E$$

soit semi-positive⁵ et de valeurs propres $0 \leq \lambda_1(z) \leq \dots \leq \lambda_n(z)$ ⁶. Pour tout $q \geq 1$, pour toute forme g dans $L_{n,q,\text{loc}}^2(X, E)$ telle que $D''g = 0$ (au sens des courants sur

⁴Voir le cours de P. Charpentier [Charp], section III.2.

⁵Il s'agit, si

$$dd^c \varphi = \sum_{1 \leq j, k} c_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k, \quad c_{jk} = \overline{c_{kj}},$$

de la forme $\theta_{E, | \cdot |, \varphi} := \theta_{E, | \cdot |} + \Phi$, où $\theta_{E, | \cdot |} = \theta_E$ a déjà été définie en (3.40) et

$$\Phi := \sum_{1 \leq j, k \leq n} c_{jk} dz_j \otimes d\bar{z}_k.$$

⁶Lorsque l'on effectue, dans la fibre $T_z(X)$ la diagonalisation de la matrice associée à la métrique θ_E dans une base orthonormée pour la métrique h déduite de la forme de Kähler ω .

X à valeurs dans E) et que

$$(4.8) \quad \int_X \frac{|g(z)|^2 e^{-\varphi}}{\lambda_1(z) + \cdots + \lambda_q(z)} dV_X(z) < +\infty,$$

il existe une forme $f \in L^2_{p,q,\text{loc}}(X, E)$ telle que $D''[f] = g$ (au sens des courants sur X à valeurs dans E) et que

$$(4.9) \quad \int_X |f|^2 e^{-\varphi} dV_X(z) \leq \int_X \frac{|g(z)|^2 e^{-\varphi}}{\lambda_1(z) + \cdots + \lambda_q(z)} dV_X(z).$$

DÉMONSTRATION. On introduit le fibré holomorphe hermitien « pondéré » par le « poids » $e^{-\varphi/2}$, $(E \rightarrow X, | \cdot | e^{-\varphi/2})$, dont la première forme de Chern est

$$c_1(E, | \cdot | e^{-\varphi/2}) = c_1(E, | \cdot |) + dd^c \varphi = i\Theta_{E, | \cdot |} + dd^c \varphi.$$

On note $A_{\varphi,q}$ l'opérateur $[i\Theta_{E, | \cdot | e^{-\varphi/2}}, \Lambda]$, où Λ désigne l'opérateur de Lefschetz de multiplication à gauche par ω (forme de Kähler associée à h), agissant sur les éléments $u \in C^\infty_{n,q}(X, E)$. Si l'on exprime ces formes en utilisant un repère $(\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$ dual d'un repère (ξ_1, \dots, ξ_n) qui soit orthonormé pour le produit scalaire correspondant à la métrique kählérienne h et orthogonal pour la métrique $\theta_{E, | \cdot |, \varphi}$ (les valeurs propres, toutes positives ou nulles, étant donc par hypothèses $0 \leq \lambda_1(z) \leq \cdots \leq \lambda_n(z)$), un calcul algébrique simple (conduit par exemple dans la preuve de la proposition 5.8, section 5 du chapitre 6 de [De0]), et que nous admettrons, nous donne

$$\langle A_{\varphi,q}(u)(z), u(z) \rangle_z \geq (\lambda_1(z) + \cdots + \lambda_q(z)) |u(z)|^2 e^{-\varphi}.$$

L'hypothèse (4.8) implique donc

$$(4.10) \quad \int_X \langle A_{\varphi,q}^{-1}(g), g \rangle dV_X \leq \int_X \frac{|g(z)|^2 e^{-\varphi}}{\lambda_1(z) + \cdots + \lambda_q(z)} dV_X(z) < +\infty.$$

Introduisons une fonction exhaustive $\Psi \in C^\infty_0(X, \mathbb{R})$ comme nous y invite (d'après l'exemple 4.2) le fait que X soit *faiblement pseudoconvexe*. Pour tout $c > 0$, l'ensemble $\{z \in X; \Psi(z) < c\}$ est évidemment une variété faiblement pseudoconvexe, sur laquelle on sait qu'existe une métrique kählérienne \widehat{h}_c qui fait de (X_c, \widehat{h}_c) une variété kählérienne complète. On introduit sur X_c , pour $\epsilon > 0$ appelé à tendre ultérieurement vers 0, l'opérateur $A_{\varphi,q,\epsilon}$ défini comme l'opérateur

$$\left[i\Theta_{E, | \cdot | e^{-\varphi/2}}, \Lambda_\epsilon \right]$$

agissant sur les formes de bidegré (n, q) , où Λ_ϵ désigne l'opérateur de Lefschetz associé à la structure kählérienne $\omega + \epsilon \widehat{\omega}_c$ ($\widehat{\omega}_c$ étant la forme de Kähler correspondant à la métrique \widehat{h}_c) sur X_c . On constate alors que

$$(4.11) \quad \begin{aligned} |u|_\epsilon^2 e^{-\varphi} dV_{X,\epsilon} &\leq |u|^2 e^{-\varphi} dV_X \\ \langle A_{\varphi,q,\epsilon}^{-1}(u), u \rangle_\epsilon dV_{X,\epsilon} &\leq \langle A_{\varphi,q}^{-1}(u), u \rangle dV_X \end{aligned}$$

pour tout $u \in C^\infty_{n,q}(X, E)$, les ϵ figurant en indice signifiant que les calculs de normes, de produits scalaires, de forme volume, sont ici effectués relativement à la métrique associée à la forme de Kähler $\omega + \epsilon \widehat{\omega}_c$, métrique kählérienne « perturbée » pour laquelle $(X_c, \widehat{h} + \epsilon \widehat{h}_c)$ est complète. Les détails techniques de cette vérification se trouvent dans [De0] (lemme 6.3, section 6 du chapitre 8) et on les omettra.

Il résulte de l'hypothèse (4.10) induite sur g par (4.8), combinée avec la seconde inégalité dans (4.11), que

$$\int_{X_c} \langle A_{\varphi, q, \epsilon}^{-1}(g), g \rangle_\epsilon dV_{X, \epsilon} \leq \int_{X_c} \langle A_{\varphi, q}^{-1}(g), g \rangle dV_X \leq \int_X \frac{|g(z)|^2 e^{-\varphi}}{\lambda_1(z) + \dots + \lambda_q(z)} dV_X(z).$$

Nous pouvons appliquer dans la variété kählérienne complète $(X_c, h + \epsilon \hat{h}_c)$ le théorème 4.1 et trouver $f_{c, \epsilon} \in L_{n, q-1, \text{loc}}^2(X_c, E)$ tel que $D''[f_{c, \epsilon}] = g$ dans X_c (au sens des courants sur X_c à valeurs dans E) et que

$$\int_{X_c} |f_{c, \epsilon}|_\epsilon^2 e^{-\varphi} dV_{X, \epsilon} \leq \int_X \frac{|g(z)|^2 e^{-\varphi}}{\lambda_1(z) + \dots + \lambda_q(z)} dV_X(z) < +\infty.$$

On extrait une limite faiblement convergente d'une suite $(f_{c, \epsilon_k})_k$ lorsque ϵ_k tend vers 0, puis une suite faiblement convergente de la suite $(f_{c_k})_k$ ainsi obtenue lorsque $(c_k)_k$ est une suite de nombres réels tendant vers $+\infty$. Le lemme de Fatou et la première inégalité dans (4.11) nous permettent de conclure à l'estimation voulue pour la limite faible f ainsi obtenue. \square

REMARQUE 4.5. L'exemple du fibré trivial $X \times \mathbb{C}$, équipé de la métrique $| \cdot | e^{-\varphi/2}$, est un exemple particulièrement important d'application du théorème 4.4 de résolution L^2 du $\bar{\partial}$: par exemple si la forme hermitienne Φ sur $T(X)$ associée au « poids » φ est telle que $\lambda_{\Phi, q}(z) > 0$ (i.e. admet au moins $n - q + 1$ valeurs propres strictement positives pour presque tout $z \in X$).

EXEMPLE 4.6. En particulier, dans le cas où $X = U$ est un ouvert pseudoconvexe de \mathbb{C}^n et où φ est une fonction semicontinue plurisousharmonique dans U (que l'on sera amené à régulariser), on peut appliquer de résultat avec

$$\varphi_\epsilon(z) = \varphi(z) + \log(1 + (1 + |z|^2)^\epsilon)$$

($\epsilon \in]0, 1[$) en exploitant le fait que la plus petite valeur propre $\lambda_{1, \epsilon}(z)$ de la forme hermitienne associée à

$$z \mapsto \log(1 + (1 + |z|^2)^\epsilon)$$

est minorée par

$$\lambda_{1, \epsilon}(z) \geq \frac{\epsilon^2}{2(1 + |z|^2)(1 + (1 + |z|^2)^\epsilon)}$$

(voir la preuve du lemme 6.10 de [De0], chapitre 8, pour le détail des calculs). Si $g \in L_{p, q, \text{loc}}^2(U)$ et $\bar{\partial}g = 0$ au sens des courants sur U , l'estimation *a priori*

$$\int_U (1 + |z|^2) |g|^2 e^{-\varphi} dV_{\mathbb{C}^n}(z) < +\infty$$

induit la possibilité de résoudre $\bar{\partial}f = g$ (au sens des courants sur U) avec $f \in L_{p, q-1, \text{loc}}^2(U)$ et

$$(4.12) \quad \int_U (1 + |z|^2)^{-\epsilon} |f|^2 e^{-\varphi} dV_{\mathbb{C}^n}(z) \leq \frac{4}{q\epsilon^2} \int_U (1 + |z|^2) |g|^2 e^{-\varphi} dV_{\mathbb{C}^n}(z).$$

Notons que ce résultat fait l'objet (dans le cas $\epsilon = 1$, en prenant $\varphi + \log(1 + |z|^2)$ au lieu de φ), du théorème IV.2.1 du cours de P. Charpentier [Charp].

4.3. Méthodes L^2 et résolution du complexe de Koszul

Le théorème 4.4, et en particulier la possibilité, par exemple dans les ouverts *pseudoconvexes*⁷ de \mathbb{C}^n , de résoudre (pour les (n, q) -formes) l'équation $\bar{\partial}f = g$ via des *techniques L^2* avec des estimations adéquates (celles fournies par les inégalités 4.12, suivant la démarche proposée dans l'exemple 4.6) permet de reprendre sous un angle différent la résolution du *complexe de Koszul* (2.35), telle qu'elle est envisagée à coup de résolutions croisées des équations $\bar{\partial}u = v$ et $\int_s \tilde{u} = \tilde{v}$ dans la section 2.5.3 du chapitre 2.

L'utilisation croisée du théorème 4.4 et de la « marche » au travers du double complexe (4.12) permet en effet d'établir l'important résultat suivant, dû sous cette forme à H. Skoda [Skod]; on en trouvera une généralisation (établie en 1982 par J.P. Demailly) dans [De0] (théorème 9.8, chapitre 8).

THEORÈME 4.7. *Soit (X, h) une variété kählérienne faiblement pseudoconvexe de dimension n et $F : E_1 \rightarrow E_2$ un morphisme holomorphe surjectif entre deux fibrés hermitiens holomorphes $(E_1 \rightarrow X, | \cdot |_1)$ et $(E_2 \rightarrow X, | \cdot |_2)$ de rangs respectifs m_1 et m_2 (avec $m_1 \geq m_2$ du fait de l'hypothèse de surjectivité) au dessus de X . On suppose d'une part que le fibré $(E_1 \rightarrow X, | \cdot |_1)$ est quasi-positif⁸ au sens de Nakano (définition 3.27), d'autre part qu'il existe un fibré en droites holomorphe hermitien $(L \rightarrow X, | \cdot |)$ tel que, si $\mu := \min(n, m_1 - m_2)$, la $(1, 1)$ forme*

$$c_1(L, | \cdot |) - (\mu + \epsilon)c_1(\det E_2, | \cdot |_2)$$

soit une $(1, 1)$ -forme positive pour un certain $\epsilon > 0$. Pour toute forme f_2 dans $L^2_{n,0,\text{loc}}(X, E_2 \otimes L)$ telle que $D''[f_2] = 0$ (au sens des courants à valeurs dans $E_2 \otimes L$, D'' désignant précisément la connexion canonique du fibré $E_2 \otimes L$), telle que

$$\int_X \langle \widetilde{\mathbb{F} \circ \mathbb{F}^*}[f_2], f_2 \rangle_2 (\det(\mathbb{F} \circ \mathbb{F}^*))^{-\mu-1-\epsilon} dV_X < +\infty$$

(où $\mathbb{F} := F \otimes \text{Id}_L$, \mathbb{F}^ son adjoint, $\widetilde{\mathbb{F} \circ \mathbb{F}^*}$ l'extension aux sections distributions de l'opérateur $\mathbb{F} \circ \mathbb{F}^* : C^\infty_\bullet(X, E_2 \otimes L) \rightarrow C^\infty_\bullet(X, E_2 \otimes L)$), il existe f_1 dans $L^2_{n,0,\text{loc}}(X, E_1 \otimes L)$ telle que $\mathbb{F}[f_1] = f_2$ (toujours au sens des courants à valeurs dans $E_2 \otimes L$) avec*

$$\begin{aligned} \int_X |f_1|_1^2 (\det(\mathbb{F} \circ \mathbb{F}^*))^{-\mu-\epsilon} dV_X &\leq \left(1 + \frac{\mu}{\epsilon}\right) \times \\ &\times \int_X \langle \widetilde{\mathbb{F} \circ \mathbb{F}^*}[f_2], f_2 \rangle_2 (\det(\mathbb{F} \circ \mathbb{F}^*))^{-\mu-1-\epsilon} dV_X \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On admet ici ce résultat, dont on trouvera la preuve dans le chapitre 8 de [De0] (théorème 9.3). Cette preuve suit en fait les pas de celle du théorème 2.40, les résolutions de l'équation $\bar{\partial}[u] = v$ étant remplacées par des résolutions *via* des techniques L^2 pour la résolution de $D''[u] = v$, où D'' désigne la connexion canonique du fibré $E_2 \otimes L$. \square

⁷Plus généralement dans les variétés kählériennes faiblement pseudoconvexes, voir l'exemple 4.2.

⁸Cette hypothèse pourrait être affaiblie, et remplacée, si θ_{E_1} désigne la métrique associée par (3.40) à $(E_1 \rightarrow X, | \cdot |_1)$, par le fait que $\theta_{E_1}(u, u) \geq 0$ pour tout $u \in T(X) \otimes E_1$ que l'on puisse écrire comme somme de moins de $(m_1 - m_2)$ termes $\xi_j \otimes e_{1,j}$; on a juste supposé ici ceci vrai avec m_1 au lieu de $m_1 - m_2$, en imposant à $(E_1 \rightarrow X, | \cdot |_1)$ (fibré de rang m_1) d'être *semi-positif au sens de Nakano*.

Un exemple d'application très important de ce théorème reste celui où U désigne un ouvert *pseudonvexe* de \mathbb{C}^n , (f_1, \dots, f_m) étant m fonctions holomorphes dans U . On prend pour $(E_1 \rightarrow U, | \cdot |_1)$ le fibré trivial $U \times \mathbb{C}^m$, équipé de sa métrique plate usuelle, pour $(E_2 \rightarrow U, | \cdot |_2)$, le fibré en droites trivial $U \times \mathbb{C}$; enfin $(L \rightarrow U, | \cdot |)$ désigne le fibré en droites $(U \times \mathbb{C}, | \cdot | e^{-\varphi/2})$, où φ est une fonction *réelle plurisousharmonique* dans U . On prend en fait $X = U \setminus \{f = 0\}$ (qui est bien ici *kählérienne faiblement pseudoconvexe*) de manière à avoir surjectivité du morphisme \downarrow_f de $E_1 \rightarrow X$ dans $E_2 \rightarrow X$ qui à (a_1, \dots, a_m) associe $a_1 f_1 + \dots + a_m f_m$. On peut alors énoncer le théorème de division suivant, dû à H. Skoda [**Skod**] en 1978.

THÉORÈME 4.8. *Soit U un ouvert pseudoconvexe de \mathbb{C}^n , φ une fonction plurisousharmonique dans U , f_1, \dots, f_m m fonctions holomorphes dans U , définissant dans U un sous-ensemble analytique fermé $Y = \{f_1 = \dots = f_m = 0\}$. On note $|f|^2 := |f_1|^2 + \dots + |f_m|^2$, $\mu := \inf(n, m - 1)$ et $\epsilon > 0$. Pour toute fonction h holomorphe dans U , et telle que*

$$\int_{U \setminus Y} |h|^2 |f|^{-2(\mu+1+\epsilon)} e^{-\varphi} dV_{\mathbb{C}^n} < +\infty,$$

il existe m fonctions a_1, \dots, a_m holomorphes dans U , telles que

$$h(z) \equiv a_1(z)f_1(z) + \dots + a_m(z)f_m(z), \quad \forall z \in U,$$

et

$$\int_{U \setminus Y} |a|^2 |f|^{-2(\mu+\epsilon)} e^{-\varphi} dV_{\mathbb{C}^n} \leq (1 + \mu/\epsilon) \int_{U \setminus Y} |h|^2 |f|^{-2(\mu+1+\epsilon)} e^{-\varphi} dV_{\mathbb{C}^n}$$

si $|a| := |a_1|^2 + \dots + |a_m|^2$.

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'une application directe du théorème 4.7, avec les données indiquées en exergue de cet énoncé. \square

REMARQUE 4.9. Le *théorème de Skoda* constitue un résultat majeur. Pour en souligner l'importance, on peut signaler ici que ce fut ce résultat qui permit en 1989 à D.W. Brownawell de mettre en évidence, dans l'article fondateur ([**Brow1**]), la première borne effective en $O(D^n)$ pour la solution du *problème des zéros de Hilbert* (ou *nullstellensatz*), pour un idéal (P_1, \dots, P_m) de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, avec $\deg P_j \leq D$, $j = 1, \dots, m$. Quand bien même ce résultat fut ensuite redémontré (et affiné) par des méthodes algébriques ([**Ko1**]), ou, plus récemment, suivant une approche géométrique élémentaire reposant sur la théorie du degré et fondée sur l'utilisation d'un théorème d'O. Perron ([**Jel**]), cette « victoire » en quelque sorte inattendue des méthodes analytiques L^2 face à des questions d'algèbre commutative mérite d'être soulignée. L'interface entre la géométrie différentielle complexe et les questions de géométrie algébrique s'avère souvent très intéressante à explorer. Ces notes de cours se veulent précisément une très modeste invitation à pareille transversalité, souvent nécessaire et payante!

C'est aussi le théorème de Skoda qui permet de préciser les résultats relatifs au *théorème de Briançon-Skoda* et à la *clôture intégrale d'un idéal* (ou d'un faisceau d'idéaux cohérent de \mathcal{O}_X -modules) proposés dans la section 2.5.4 (proposition 2.8 et théorème 2.42). Voici d'abord un retour sur le point laissé en suspens dans la preuve de la proposition 1.8 du chapitre 1.

COROLLAIRE 4.10. Soit I un idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ et f_1, \dots, f_m des générateurs de I . Si $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ vérifie une inégalité du type $|h(z)| \leq C|f(z)|$ au voisinage de l'origine, h est dans la clôture intégrale de l'idéal I dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,z}$, autrement dit, il existe au voisinage de l'origine une relation de dépendance intégrale « homogène » :

$$(4.13) \quad h^N + u_1 h^{N-1} + \dots + u_N \equiv 0,$$

avec $u_j \in I^j$ pour $j = 1, \dots, N$ ⁹.

DÉMONSTRATION. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit l'idéal I_k défini comme l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ constitué des germes g tels que

$$\int_U |g|^2 |f|^{-2(k+\epsilon)} dV_{\mathbb{C}^n} < +\infty.$$

pour un certain $\epsilon > 0$ et un certain polydisque $U \subset U_0$ voisinage de l'origine (on a pris ici des représentants pour tous les germes f_1, \dots, f_m, h , représentants tous définis dans un certain polydisque U_0 voisinage de 0 dans \mathbb{C}^n). Soit $p = \min(n-1, m-1)$. Nous allons montrer que, si $|h| \leq C|f|$ au voisinage de 0, alors

$$(4.14) \quad hI_p \in I \cdot I_p.$$

Admettons un instant ce résultat. Comme $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ est noëthérien, l'idéal I_p est engendré par un nombre fini d'éléments v_1, \dots, v_N de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. Il existe donc une matrice $(a_{jk})_{1 \leq j,k \leq N}$ d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ tels que

$$hv_j = \sum_{k=1}^N a_{jk} v_k.$$

En écrivant que le déterminant de la matrice $(h\delta_{jk} - a_{jk})_{1 \leq j,k \leq N}$ est nul (puisque l'opérateur linéaire correspondant admet le vecteur non nul (v_1, \dots, v_N) dans son noyau), on en déduit une relation du type (4.13).

Il reste à prouver (4.14). On remarque tout d'abord que $hI_p \subset I_{p+1}$, ce qui est immédiat ; on se ramène donc à prouver que $I_{p+1} \subset I \cdot I_p$. Supposons dans un premier temps $m \leq n$ et prenons h tel que

$$\int_U |h|^2 |f|^{-2(p+1+\epsilon)} dV_{\mathbb{C}^n} < +\infty$$

pour un certain $\epsilon > 0$ et un certain polydisque U . On applique le *théorème de Skoda* 4.8 dans U avec la fonction plurisousharmonique $\varphi = (p - (m-1)) \log[|f|^2]$, ce qui donne exactement le résultat voulu, à savoir $h \in I \cdot I_p$. Si $m > n$, on construit (suivant le *principe des tiroirs*¹⁰) n combinaisons linéaires $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ des f_j de manière à ce que $|f|$ et $|\tilde{f}|$ soient équivalentes au voisinage de 0, i.e. qu'il existe des constantes strictement positives κ et K telles que $\kappa|f| \leq |\tilde{f}| \leq K|f|$ et l'on se ramène ainsi au cas $m \leq n$. \square

⁹L'assertion réciproque est vraie, voir la proposition 1.8 du chapitre 1.

¹⁰Principe popularisé par C. Siegel, qui l'utilisa souvent dans ses arguments : « si l'on doit ranger $N+1$ allumettes dans N tiroirs, deux allumettes au moins doivent être dans un même tiroir » ! Plus sérieusement ici, on pourra voir le détail de l'argument dans la preuve du lemme 10.3, section 10 du chapitre 8 de [De0]. On aurait pu aussi utiliser le *théorème de Krull*, qui assure que I est l'intersection de tous les $I + \mathfrak{M}_0^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ et se ramener ainsi au cas où I est un idéal \mathfrak{M}_0 -primaire, auquel cas, il est aisé de montrer qu'il a même clôture intégrale que l'idéal engendré par une suite de n combinaisons linéaires génériques de ses générateurs f_1, \dots, f_m (alors que $m \geq n$).

On peut également revenir ici sur le résultat annoncé dans la remarque 2.43, concernant la formulation du *théorème de Briançon-Skoda* dans son intégralité.

COROLLAIRE 4.11. *Soit I un idéal de l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, engendré par m éléments f_1, \dots, f_m . Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\overline{I^{\min(n,m)+k-1}} \subset I^k.$$

DÉMONSTRATION. L'argument utilisé dans la preuve du corollaire précédent pour prouver $I_{p+1} \subset I \cdot I_p$ permet en fait de prouver que $I_{k+1} \subset I \cdot I_k$ pour tout $k \geq p$, où $p = \min(n-1, m-1)$, i.e. $p+1 = \min(n, m)$. Ceci permet aisément d'assurer le résultat demandé par induction sur k , initiée avec $k = p$. \square

REMARQUE 4.12. Les formulations de cet énoncé en termes de courants résiduels (voir [**And4**, **AndSS**]) permettent d'en comprendre l'*essence algébrique*, ce que ne permettent pas (en tout cas, sous cette forme) les outils impliqués dans les méthodes hilbertiennes d'obédience L^2 . Elles permettent par exemple (ce que les méthodes L^2 n'autorisent pas, tout au moins directement) de montrer que la réalisation effective globale du problème de Briançon-Skoda pour un idéal (P_1, \dots, P_m) de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ se résout avec un contrôle en $O(D^{\inf(n,m)})$, où $D := \max_j(\deg P_j)$, i.e. que si $Q \in \overline{(P_1, \dots, P_m)}$, il existe des polynômes a_1, \dots, a_m dans $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ tels que

$$Q^{\inf(n,m)} = \sum_{j=1}^m a_j P_j$$

avec

$$\max_j(\deg(a_j P_j)) \leq \inf(n, m)(\deg Q + D^{\min(n,m)})$$

(c'est un résultat de M. Hickel ¹¹, tout récemment revisité par M. Andersson et E. Götmark [**Hick**, **AndG**]). Les méthodes de division explicite *via* les courants résiduels semblent plus à même de se prêter au contrôle effectif lorsque les problèmes de division sont posés dans $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$, et que le contrôle des degrés se double alors d'un contrôle de la « taille » (voir [**BY1**, **BY2**]).

¹¹Le contrôle en $D^{\min(n,m)}$ peut d'ailleurs être précisé en termes de multiplicité d'annulation du faisceau cohérent d'idéaux $({}^h P_1, \dots, {}^h P_m) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})_{\mathcal{I}}}$ (obtenu par transport du faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I} := ({}^h P_1, \dots, {}^h P_m) \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}$ dans l'éclatement normalisé de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ suivant le faisceau d'idéaux \mathcal{I} , les ${}^h P_j$ désignant les homogénéisés des P_j le long des composantes du *diviseur exceptionnel* de cet éclatement normalisé (voir la section 1.4.6 pour toutes ces définitions)).

Bibliographie

- [AchM1] R. Achilles, M. Manaresi, *Multiplicities of a bigraded ring and intersection theory*, Math. Ann. **309** (1997) pp. 573–591.
- [AchR] R. Achilles, S. Rams, *Intersection numbers, Segre numbers and generalized Samuel multiplicities*, Arch. Math. **77** (2001), pp. 391–398.
- [AkN] Y. Akizuki, S. Nakano, *Note on Kodaira-Spencer’s proof of Lefschetz theorems*, Proc. Jap. Acad. **30** (1954), pp. 266–272.
- [And1] M. Andersson, *Residue currents and ideals of holomorphic functions*, Bull. Sci. Math. **128** (2004), no.6, pp. 481–512.
- [And2] M. Andersson, *Residues of holomorphic sections and Lelong currents*, Ark. Mat. **43** (2005), no. 2, pp. 201–219.
- [And3] M. Andersson, *A generalized Lelong-Poincaré formula*, Math. Scand. **101** (2007), no. 2, pp. 195–218.
- [And4] M. Andersson, *Explicit versions of the Briançon-Skoda theorem with variations*, Michigan Math. J. **54** (2006), no. 2, pp. 361–373.
- [AndG] M. Andersson, E. Götmark, *Explicit representation of membership in polynomial ideals*, Math. Ann. **349** (2011), no. 2, pp. 345–365.
- [AndSS] M. Andersson, H. Samuelsson, J. Sznajdman, *On the Briançon-Skoda theorem on a singular variety*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **60** (2010), no. 2, pp. 417–432.
- [AndW1] M. Andersson, E. Wulcan, *Residue currents with prescribed annihilator ideals*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **40** (2007) pp. 985–1007.
- [ASWY] M. Andersson, H. Samuelsson, E. Wulcan, A. Yger, *manuscrit en préparation*.
- [Ba1] D. Barlet, *Le faisceau ω_X^\bullet sur un espace analytique X de dimension pure*, Lecture Notes in Math. **670**, Springer-Verlag, 1978, 187–204.
- [BG] C. A. Berenstein, R. Gay, *Complex Variables, an Introduction*, Springer-Verlag, GTM 125, 1991.
- [BY1] C. A. Berenstein, A. Yger, *Effective Bézout identities in $\mathbb{Q}[z_1, \dots, z_n]$* , Acta Math. **166** (1991), pp. 69–120.
- [BY2] C. A. Berenstein, A. Yger, *Residue Calculus and effective Nullstellensatz*, American Journal of Mathematics, **121**, no.4 (1999), pp. 723–796.
- [BY3] C. A. Berenstein, A. Yger, *Green currents and analytic continuation*, Journal d’Analyse Mathématique **75** (1998), pp. 1–50.
- [BY4] C. A. Berenstein, A. Yger, *Residue currents, integration currents in the non complete intersection case*, J. reine. angew. Math. **527** (2000), pp. 203–235.
- [Bj1] J. E. Björk, *Rings of differential operators*, North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [Bj2] J. E. Björk, *Analytic \mathcal{D} -modules and applications*, Mathematics and its Applications, **247**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.
- [Bj3] J. E. Björk, *Residues and \mathcal{D} -modules. The legacy of Niels Henrik Abel*, pp. 605–651, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [BGS] J.-B. Bost, H. Gillet, and C. Soulé, *Heights of projective varieties and positive Green forms*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), pp. 903–1027.
- [BoH] J. Y. Boyer, M. Hickel, *Une généralisation de la loi de transformation pour les résidus*, Bull. Soc. Math. France **125** (1997), no. 3, pp. 315–335.

- [BoR] J. Bochnak, J.J. Risler, *Sur les exposants de Lojasiewicz*, Comment. Math. Helvetici **50** (1975), pp. 493-507.
- [BriS] J. Briançon, H. Skoda, *Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de \mathbb{C}^n* , Comptes Rendus Acad. Sciences Paris, Sér. A, **278** (1974), pp. 949-951.
- [Brow1] D. W. Brownawell, *Bounds for the degrees in the Nullstellensatz*, Ann. of Math. **126** (1987), pp. 577-591.
- [Charp] P. Charpentier, *Introduction à l'analyse pluricomplexe en plusieurs variables*, notes du cours à Niamey, Octobre 2009. Notes en ligne sur le site :
<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~pcharpen/enseignement/enseignement.html>
- [Chirk] E. M. Chirka, *Complex analytic sets*, Kluwer, Dordrecht - Boston, 1989.
- [CLO] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Using algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **135**, Springer-Verlag, New-York, 1998.
- [Co1] D. A. Cox, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Algebraic geometry **4** (1995), pp. 17-50.
- [CoH] N. Coleff, M. Herrera, *Les courants résiduels associés à une forme méromorphe*, Lecture Notes in Math. 633, Springer-Verlag, Berlin, New-York, 1978.
- [Dan] V. Danilov *The geometry of toric varieties*, Russian Math. Surveys **33** (1978), pp. 97-154.
- [De0] J. P. Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry*, disponible en ligne sur le site <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf>
- [De1] J.P. Demailly, *Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégrabilité et d'analyticité*, Acta Math **159** (1987), pp. 153-169.
- [De1bis] J.P. Demailly, *Sur l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano en géométrie hermitienne*, Séminaire Lelong-Dolbeault-Skoda, 1983-1984, Lecture Notes **1198**, Springer-Verlag, 1985, pp. 88-97.
- [De2] J. P. Demailly, *Courants positifs et théorie de l'intersection*, Gaz. Math. **53** (1992), pp. 131-159.
- [De3] J. P. Demailly, *Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory*, Complex Analysis and Geometry, Univ. Series in Math., edited by V. Ancona and A. Silva, Plenum Press, New-York (1993).
- [Del] P. Deligne, *The Hodge conjecture*, en ligne sur :
http://www.claymath.org/millennium/Hodge_Conjecture/Official_Problem_Description.pdf
- [DinhS] T. C. Dinh, N. Sibony, *Super-potentials of positive closed currents, intersection theory and dynamics*, Acta Math. **203** (2009), pp. 1-82.
- [dR1] G. De Rham, *Sur la notion d'homologie et les résidus des intégrales multiples*, Verhandlungen des Internationalen Mathematike-Kongresse, Zürich (1932), vol. II, p. 195.
- [dR2] G. De Rham, *Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples*, Ens. math. **35** (1936), pp. 213-228.
- [DS2] A. Dickenstein, C. Sessa, *Résidus de formes méromorphes et cohomologie modérée*, Géométrie complexe, Actualités Sci. Indust., **1438**, Hermann, Paris, 1996, pp. 35-59.
- [EGA] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique I,II,III,IV*, Publi. Math. I.H.E.S, no. **4,8,11,17,20,24,28,32**, 1960-1967.
- [Eis1] D. Eisenbud, *Commutative algebra, with a view towards algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **229**, Springer, New York, 1995.
- [Eis2] D. Eisenbud, *The Geometry of Syzygies*, A second course in Commutative Algebra and Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics, **229**, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [Elh] F. Ehlers, *Eine Klasse komplexer Mannigfaltigkeiten und die Auflosung einiger isolierter Singularitäten*, Math. Ann. **218** (1975), no. 2, 127-156.
- [ElKM] M. Elkadi, B. Mourrain, *Introduction à la résolution des systèmes polynomiaux*, Publications Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (S.M.A.I), Paris, 2006.

- [Ew] G. Ewald, *Combinatorial convexity and algebraic geometry*, GTM **168**, Springer-Verlag, 1996.
- [ELM] H. El Mir *Sur le prolongement des courants positifs fermés*, Acta Math. **153**, (1984), pp. 1–45.
- [Fab] B. Fabre, *Sur la cohomologie de Dolbeault des variétés projectives et les courants localement résiduels*, preprint 2005 :
http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0505/0505061v1.pdf
- [Fu] W. Fulton, *Introduction to intersection theory in Algebraic Geometry*, American Math. Soc., Providence, RI, 1984.
- [Fu1] W. Fulton, *Intersection theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [Fu2] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press, Princeton, 1993.
- [GKZ] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Mathematics : Theory and Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.
- [God] R. Godement, *Théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.
- [GS] H. Gillet, C. Soulé, *Arithmetic intersection theory*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **72** (1990), pp. 93–74.
- [GA] P. Griffiths, J. Adams, *Topics in Algebraic and Analytic Geometry*, Mathematical Notes, Princeton University Press, 1974.
- [GH] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience, New York, 1978.
- [Gr1] P. Griffiths, *Hermitian differential geometry*, Chern classes and positive vector bundles, papers in honor of K. Kodaira, Princeton Univ. Press, Princeton (1969), pp. 181–251.
- [Grau] H. Grauert, *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume Komplexer Strukturen*, Publ. Math. I.H.E.S. **5** (1960), pp. 233–292.
- [GrR] H. Grauert, R. Remmert, *Coherent analytic sheaves*, Grundlehren der math. Wissenschaften **265**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [GRo] R. C. Gunning, H. Rossi, *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1985.
- [Gyo] A. Gyoja, *Bernstein-Sato's polynomial for several analytic functions*. J. Math. Kyoto Univ. **33** (1993), no. 2, pp. 399–411.
- [Ha1] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [Ha2] R. Hartshorne, *Residues and duality*, Lecture Notes in Math. 20, Springer-Verlag, Berlin-New York 1966.
- [HL] M. Herrera, D. Lieberman, *Residues and principal values on complex spaces*, Math. Ann. **194** (1971), pp. 259–294.
- [HY] A. Hénaut, A. Yger, *Éléments de Géométrie*, Mathématiques pour l'Université, Ellipses, Paris, 2004.
- [Hick] M. Hickel, *Solution d'une conjecture de C.A. Berenstein et A. Yger et invariants de contact à l'infini*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **51**, no. 3, (2001), pp. 707–744.
- [Hir] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. of Math. **79**, 1 et 2 (1964), pp. 109–203 et 205–326.
- [Hod] W. V. D. Hodge, *The theory and applications of harmonic integrals*, Cambridge University Press (1941).
- [Hod1] W. V. D. Hodge, *The topological invariants of algebraic varieties*, Proc. Int. Cong. of Math., Cambridge, 1950, vol. 1, pp. 182 – 192, AMS (1952).
- [Hor] L. Hörmander, *An introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland Publishing Company, 1973.
- [Hun] C. Huneke, *Uniform bounds in Noetherian rings*, Invent. Math. **107** (1992), pp. 203–223.
- [Jel] Z. Jelonek, *On the effective Nullstellensatz*, Invent. Math. **162** (2005), pp. 1–17.

- [Jo] J. P. Jouanolou, *Théorèmes de Bertini et applications*, Progress in Mathematics 42, Birkhäuser, 1983.
- [JP] T. de Jong, G. Pfister, *Local analytic geometry*, Braunschweig/Wiesbaden : Vieweg, 2000.
- [Ka] M. Kashiwara, *B-functions and holonomic systems*, Invent. Math. **38** (1976/77), no. 1, pp. 33–53.
- [King] J. R. King, *A residue formula for complex subvarieties*, Proc. Carolina Conf. on Holomorphic mappings and minimal surfaces, University of North Carolina, Chapel Hill, 1970, pp. 43–56.
- [Kod1] K. Kodaira, *On Kähler varieties of restricted type*, Ann. of Math. **60** (1954), pp. 28–48.
- [Ko1] J. Kollár, *Sharp effective Nullstellensatz*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), pp. 963–975.
- [Ko2] J. Kollár, *Effective Nullstellensatz for arbitrary ideals*, Jour. Eur. Math. Soc. **1** (1999), no. 3, pp. 313–337.
- [Ku] E. Kunz, *Über den n -dimensionalen Residuesatz*, J. ber. d. DMV **94** (1992), pp. 170–188.
- [Ky] A. M. Kytmanov, *A transformation formula for Grothendieck residues and some of its applications*, Siberian Math. Journal **29** (1989), pp. 495–499.
- [Lang1] S. Lang, *Introduction to Arakelov theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [Lang2] S. Lang, *Algebra*, Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [Lel] P. Lelong, *Plurisubharmonic functions and positive differential forms*, Gordon and Breach, New-York, 1968.
- [LeT] M. Lejeune, B. Teissier, *Clôture intégrale des idéaux et équisingularité, Chapitre I*, Publications de l'Institut Fourier, F38402. St. Martin d'Hères, 1975.
- [Le] J. Leray, *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe, Problème de Cauchy III*, Bull. Soc. Math. France, **87** (1959), pp. 81–180.
- [Lip] J. Lipman, *Residues and Traces of Differential Forms via Hochschild Homology*, Contemporary Mathematics 61, American Mathematical Society, Providence, RI, 1987.
- [Lo] S. Lojasiewicz, *Introduction to Complex Analytic Geometry*, Translated from the Polish by Maciej Klimek. Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.
- [LS] J. Lipman, A. Sathaye, *Jacobian ideals and a theorem of Briançon-Skoda*, Michigan Math. J. **28** (1981), pp. 199–222.
- [LT] J. Lipman, B. Teissier, *Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals*, Michigan Math. J. **28** (1981), pp. 97–116.
- [Mass] D. B. Massey, *Numerical control over Complex Analytic Singularities*, Memoirs of the American Mathematical Society **163**, no. 778 (2003).
- [Meo1] M. Méo, *Résidus dans le cas non nécessairement intersection complète*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333** (2001), no.1, pp. 33–38.
- [Meo2] M. Méo, *Courants résidus et formule de King*, Ark. Mat. **44** (2006), no. 1, pp. 149–165.
- [Nak1] S. Nakano, *On complex analytic vector bundles*, J. Math. Soc. Japan **7** (1955), pp. 1–12.
- [Pas1] M. Passare, *Residues, currents, and their relation to ideals of holomorphic functions*. Math. Scand. **62** (1988), no. 1, pp. 75–152.
- [PR] M. Passare, H. Rullgård, *Amæbas, Monge-Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope*, Duke Math. J. **121** (2004), no. 3, 481–507.
- [PT] M. Passare, A. Tsikh, *Defining the residue of a complete intersection*, Complex variables, harmonic analysis and applications, Pitman Research Notes in Mathematics Series, **347**, Addison Wesley Longman, Harlow, 1996, pp. 250–267.
- [PTY] M. Passare, A. Tsikh, A. Yger, *Residue currents of the Bochner-Martinelli type*, Publications Matématiques **44** (2000), pp. 85–117.
- [Pc1] H. Poincaré, *Sur une généralisation du théorème d'Abel*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences Paris, t. **100** (1885), pp. 40–42.
- [Pc2] H. Poincaré, *Sur les résidus des intégrales doubles*, Acta Math. **9** (1887), pp. 321–380.

- [Pc3] H. Poincaré, Sur les périodes des intégrales doubles, *Journal de Mathématiques*, 6-ème série, t. **2** (1906), pp. 135-189.
- [Pomp] D. Pompeiu, *Sur la représentation des fonctions analytiques par des intégrales définies*, C. R. Acad. Sc. Paris **149** (1909), 1355–1357.
- [Rey] E. Reyssat, *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, *Progress in Maths* **77**, Birkäuser, 1989.
- [Sa] A. Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps*, *Bull. Ann. Math. Soc.* **48** (1942), pp. 883–890.
- [Sab] C. Sabbah, *Proximité évanescence II, Equations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques*, *Compositio Math* **64** (1987), no. 2, pp. 213-241.
- [Sam] H. Samuelsson, *Analytic continuation of residue currents* *Ark. Mat.* **47** (2009), no. 1, pp. 127–141.
- [Sch] L. Schwartz, *Division par une fonction holomorphe sur une variété analytique*, *Summa Brazil Math.* **39** (1955), pp. 181–209.
- [ShTY] A. Shchuplev, A. Tsikh, A. Yger, *Residual kernels with singularities on coordinate planes*, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* **253** (2006), pp. 256–274.
- [Sou] C. Soulé (with D. Abramovich, J.F. Burnol, J. Kramer), *Lectures on Arakelov Theory*, Cambridge University Press, 1992.
- [Ser1] J. P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, *Ann. Inst. Fourier* **6**, (1956) pp. 1–42.
- [Ser2] J.P. Serre, *Algèbre locale, Multiplicités*, Cours au Collège de France, PUF.
- [Sib] N. Sibony, *Dynamique des applications rationnelles de \mathbb{P}^k* , *Dynamique et géométrie complexes* (Lyon, 1997), ix–x, xi–xii, 97–185, *Panor. Synthèses*, **8**, Soc. Math. France, Paris, 1999.
- [Siu] Y. T. Siu, *Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents*, *Inventiones Math.* **27** (1974) pp. 53–156.
- [Skod] H. Skoda, *Morphismes vectoriels de fibrés vectoriels semi-positifs*, *Ann. Sci. École Normale Sup.* **11** (1978), pp. 577–611.
- [Smi0] K. Smith, *Tight closure and vanishing theorems*, *School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry* (Trieste, 2000), pp. 149–213, *ICTP Lect. Notes*, **6**, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2001.
- [Smi1] K. E. Smith, L. Kahanpää, P. Kekäläinen, W. Traves, *An invitation to Algebraic Geometry*, 2-ième édition, Universitext, Springer, 2004.
- [Sol] J. E. Solomin *Le résidu logarithmique dans les intersections non complètes*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **284** (1977) no. 17, pp. A1061–A1064.
- [ST] J. Stückrad, W. Vogel, *An algebraic approach to the intersection theory*, *Queen's Papers in Pure and Appl. Math.* **61** (1982) pp. 1–32.
- [Simp] C. Simpson, *Algebraic cycles from a computational point of view*, *Theoret. Comput. Sci.* **392** (2008), no. 1-3, pp. 128–140.
- [Te1] B. Teissier, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*, *Singularities a Cargèse* (Rencontre Singularities Geom. Anal., Inst. Etudes Sci., Cargèse, 1972), pp. 285–362. *Asterisque*, Nos. 7 et 8, Soc. Math. France, Paris, 1973.
- [Te2] B. Teissier, *Variétés polaires. II. Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney* (*La Rábida, 1981*), *Lecture Notes in Math.* **961**, pp. 314–491, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [Tou] J.C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 71*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
- [Tsi] A. Tsikh, *Multidimensional residues and their applications*, *Transl. Amer. Math. Soc.* **103**, 1992.
- [TsiY] A. Tsikh, A. Yger, *Residue currents*, *Complex analysis. J. Math. Sci. (N. Y.)* **120** (2004), no. 6, 1916–1971.
- [Tum] A. Tumanov, *Geometry of CR manifolds*, *Encyclopaedia Math. Sci.* **9**, pp. 201–221, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

- [Tw] P. Tworzewski, *Intersection theory in complex analytic geometry*, Ann. Polon. Math. **62** (1995), pp. 177–191.
- [Vois] C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours Spécialisés, **10**, Société Mathématique de France, Paris, 2002.
- [We0] R. O. Wells, *Differential analysis on complex manifolds*, Graduate Texts in Mathematics **65**, Springer-Verlag, 2008.
- [Y2] A. Yger, *Introduction à la géométrie analytique complexe et à ses applications en arithmétique*, Cours DEA, Ecole Doctorale de Mathématiques, Bordeaux, 1991-1992.
- [YPc] A. Yger, *Un concept transversal en mathématiques, celui de « résidu » depuis Poincaré*, chapitre 11, dans *L'héritage scientifique d'Henri Poincaré*, Collection Échelles, Belin, 2008, pp. 235–253.

Index

- adjoint formel, 104
- adjonction
 - relation d', 104
- amibes, co-amibes, 101
- amplitude, 125, 126
- analytique complexe réduit, espace, 40
- analytique complexe, variété, 9
- analytique, sous-ensemble, 28
- annulation, théorèmes d', 123
- Arakelov, métrique d', 101

- Baire, théorème de, 128
- Barlet, faisceau de, 72
- Bernstein-Sato, équation fonctionnelle de, 70
- Bertini-Sard, théorème de, 129
- Bianchi, identité de, 7
- Bochner-Kodaira-Nakano
 - inégalités de, 125, 143
- Bochner-Martinelli, forme de, 81
- Bott-Chern
 - cohomologie de, 117
 - semi-positivité au sens de, 122
- Briançon-Skoda, théorème de, 47, 87, 149, 151

- canonique
 - connexion, 14
 - diviseur, 101
 - fibré, 101
 - orientation, 51
- caractéristique, classe, 21
- Cartier, diviseur de, 22
- champ de vecteurs
 - antiholomorphe, 11
 - holomorphe, 11
 - réel, 1, 2
- Chern
 - première forme de, 17
 - classe de, 21, 22
 - connexion de, 14
 - forme totale de, 19
 - formes de, 19
 - première classe d'un fibré en droites, 25
 - tenseur de courbure de, 14
- Chow
 - faisceau d'idéaux de, 39
 - groupe de, 26, 49
 - théorème de, 137
- clôture intégrale
 - d'un idéal dans un anneau commutatif, 46, 150
 - d'un sous-anneau dans un anneau, 41
- classe caractéristique, 22
- cobord
 - au sens de Čech, 24
 - morphisme de Leray, 80
- cochaîne
 - de Čech, 24, 138
- cocycle
 - au sens de Čech, 3, 24
- cohérence, 31
- cohérent, faisceau de \mathcal{O}_X -modules, 31
- Cohen-Macaulay, faisceau, 34
- cohomologie de Čech, groupes de, 24
- commutateur, 115
- comorphisme, 39
- compatibilité d'une connexion à une métrique, 8
- complète, variété kählérienne, 141
- composantes
 - distinguées, 77
 - immergées, 29
 - irréductibles d'un espace analytique complexe, 40
 - isolées, 29
- conjugaison, isométrie de, 82, 123
- connexion
 - de type $(1, 0)$, $(0, 1)$, 12
 - duale, 7
 - plate, 110
 - sur un fibré, 5
- connexions
 - opérations sur les, 6
 - somme de, 7
- contact, multi-indice de, 75
- contour apparent, 39
- contraction

- d'une forme par un champ de vecteurs, 109, 116
- cotangent, fibré, 4
- courant
 - d'intégration sur un $n - p$ cycle, 64
 - d'intégration sur un diviseur, 17
 - d'intégration sur un diviseur à croisements normaux, 57
 - d'intégration sur un sous-ensemble analytique irréductible, 63
 - de degré (p, q) ou de dimension $(n - p, n - q)$, 52
 - normal, 54
 - positif, fortement positif, 53
 - résiduel, 83
- courbure
 - matrice de, 6
 - tenseur de, 6
- Cousin, donnée de, 22
- creux, problèmes d'effectivité polynomiale, 100
- cycle, 30
- décomposition
 - de Hodge, 117
- dénominateur universel, 38
- dérivation, 1
- de Rham
 - complexe généralisé de, 110
 - opérateur de, 108
 - opérateur généralisé de, 108
- dimension
 - d'un espace analytique complexe, 40
 - de Krull d'un anneau local, 72
 - de Krull d'un idéal, 29
 - locale d'un ensemble analytique, 29
- discriminant, lieu, 37
- diviseur
 - canonique, 101
 - d'une section méromorphe d'un fibré en droites, 17
 - de Weil, 26
 - de Weil principal, 26, 49
 - effectif, 26
 - exceptionnel de l'éclatement normalisé, 43, 151
- diviseurs, groupe des, 23
- division, attaque des problèmes de, 83
- Dolbeault
 - complexe de, 14, 84
 - complexe généralisé de, 113
 - théorème d'isomorphisme de, 85
- dualité
 - de Serre, 114
 - théorème de, 93
- éclatement
 - normalisé, 43, 151
 - suivant un faisceau cohérent d'idéaux, 43
 - suivant une sous-variété, 44, 134
- El Mir, théorème de prolongement, 59
- elliptique
 - courbe, 15
- elliptique, opérateur différentiel, 105
- étroite, clôture d'un idéal, 87
- éventail
 - dual d'un polytope, 100
 - simple, 27
 - simplicial, 100
- exhaustion
 - fonction d', 61, 85, 141, 144
- extension-standard, propriété d', 71, 90
- factorisation
 - du courant d'intégration, 95
- faisceau
 - d'anneaux commutatifs, 24, 31
 - de \mathcal{D}_X -modules, 31
 - de \mathcal{O}_X -modules cohérent, 31
 - de groupes abéliens, 24
 - localement libre, 13, 32
 - structurel, d'un espace analytique réduit, 40
- fibré
 - déterminant, 3
 - en droites, 3
 - vectorel complexe, 4
 - ample, 126
 - canonique, 101
 - globalement engendré, 126
 - holomorphe, 13
 - semi-ample, 126
 - tautologique quotient, 131
 - très ample, 126
 - vectorel réel, 2
- fonction support
 - d'un diviseur sur une variété torique, 128
- forme
 - fondamentale, première, 130
 - volume, 51
- forme différentielle, 4
 - à valeurs dans un fibré, 5
 - harmonique, 110
 - positive, fortement positive, 51
 - sur un espace analytique réduit, 64
- G.A.G.A
 - principe, 137
- géodésique
 - boule, 141
 - distance, 141
- Gårding
 - inégalité de, 107
- gap sheaf, 64
- genre
 - d'une surface de Riemann, 15, 101
 - topologique d'une surface, 15, 101
- globalement engendré, fibré, 126

- grassmannienne, 131, 132, 137
- Green
 - équation de, 120
 - courant de, 120
- Griffiths, positivité au sens de, 122
- Hartogs, théorème de, 41, 46
- Hefer, formule de division, 34
- hermitienne
 - structure, 7
 - variété analytique complexe, 99
- Hilbert
 - fonction de, 72
- Hilbert, problème des zéros de, 149
- Hilbert-Samuel
 - multiplicité de, 73
 - multiplicité généralisée de, 74
- Hodge
 - classe de, 139
 - conjecture de, 139
 - décomposition de, 117
 - identités de, 115
 - symétrie de, 117
 - théorème d'isomorphisme, 110
- Hodge star, opérateur, 105
- holonomie
 - au sens de Björk, 69
- Hopf-Rinow, théorème de, 141
- Hörmander, Lars, 141
- hypoellipticité
 - du $\bar{\partial}$, 72, 138
- idéal
 - \mathfrak{A} -primaire, 29
 - premier, 29
 - primaire, 29
- impropre, théorie de l'intersection, 75
- inductive
 - limite, 24
- intégrable, variété différentiable, 12
- intersection arithmétique, théorie de l', 121
- intersection complète, 30, 90
 - globale, 30, 35, 90
 - locale, 30
- isomorphisme
 - entre fibrés holomorphes de même rang, 23
 - entre fibrés loc. triviaux de même rang, 2
- Jacobi
 - identité de, 115
- Jacobi-Kronecker, méthodes de dualité de, 95
- jets
 - espace des, 126
- kählérienne, variété, 100
- Klein, bouteille de, 15
- Kodaira
 - théorème de plongement de, 137
- Kodaira-Akizuki-Nakano
 - théorème d'annulation de, 145
- Kodaira-Akizuki-Nakano, théorème d'annulation de, 123
- Koszul
 - complexe de, 35, 83, 90, 91
- Koszul, complexe de, 148
- Krull
 - dimension d'un anneau local, 72
 - dimension d'un idéal, 29
 - théorème de, 150
- Kunneth
 - formule de, 118
- Laplace-Beltrami, opérateur de, 108, 109, 112
- laplacien, 105, 109
- Lefschetz
 - opérateur de, 113
 - théorème « vache » de, 140
 - théorème de, 139
- Lelong
 - nombre de, 62
 - nombre généralisé de, 62
- Lelong-Poincaré, formule de, 17, 96
- Leray
 - morphisme cobord de, 80
 - morphisme résidu de, 81
- Lie
 - crochet de, 12, 115
- loi de transformation, 93
- Lojasiewicz, inégalité locale de, 59
- longueur
 - d'un module sur un anneau commutatif, 33, 43
 - minimale d'une résolution libre, 34
- méromorphe
 - fonction, 22
 - fonction sur un espace analytique complexe, 41
 - section, 16
- Mayer-Vietoris
 - longue suite exacte de, 119
- moindres carrés, méthode des, 69
- morphisme
 - entre ensembles analytiques, 39
- multi-connexité, ordre de, 101
- multiplicité, 65
- Nakano
 - inégalité de Bochner-Kodaira, 125
 - positivité au sens de, 77, 122
- normal, espace analytique complexe, 42
- normalisé, courant de Green, 120
- normalisation, 42
- nullstellensatz, 149

- Oka
 - dénominateur universel d', 38
 - théorème de cohérence, 32
 - théorème de normalisation, 42
- opérateur différentiel entre fibrés, 103
- opérateur non borné d'un Hilbert dans un autre, 142
- opérations sur les fibrés, 3
- orbifold, 28
- orientabilité
 - d'une variété analytique complexe, 15, 51
 - d'une variété différentiable, 51
- Picard, groupe de, 24
- platitude, 25
- plongement holomorphe, 33, 132, 136
- pluripolaire, sous ensemble, 59
- plurisousharmonique, fonction, 54, 144
- Poincaré
 - dualité cohomologique de, 111
 - dualité homologique de, 112
- potentiel
 - quasi, 120
- pré-faisceau
 - d'anneaux commutatifs, 31
- presque complexe, structure, 10
- principal, diviseur, 23
- produit intérieur, 56
- profondeur, d'un faisceau cohérent, 34
- projectif
 - espace, 9
 - plan réel, 15
- projectivisé, 44
- propre, intersection, 73, 91
- pseudoconvexe
 - variété kählérienne faiblement, 144
- pseudoconvexe, ouvert, 145
- quasi-potentiel, 120
- quasi-régularité, 90
- ramification, lieu de, 36
- Rees, algèbre de, 46
- régulière, fonction, 22
- régulier, point, 30
- Rellich
 - lemme de, 106
- repère, 5
 - changement de, 6
- résidu
 - morphisme de Leray, 81
- résiduels, courants, 82
- résidus, formule cohomologique des, 81
- résolution libre, d'un faisceau cohérent, 34
- revêtement, 36
 - universel, 110
- Riemann
 - surface de, 14, 139
 - théorème de, 41
- Riemann-Roch, théorème de, 101
- Sard, lemme de, 129
- schémas, théorie des, 22, 32, 48
- section
 - d'un faisceau, 31
 - d'un fibré, 2
 - holomorphe globale d'un fibré, 125
- Segre
 - plongement de, 137
- semi-ample, fibré, 126
- Serre
 - dualité de, 114
- simpliciale, variété torique, 28
- singularités, théorème de résolution des, 48
- singulier, point, 29
- Siu
 - théorème d'analyticité, 75
 - théorème de stratification, 76
- Skoda, théorème L^2 de division de, 149
- Sobolev
 - espaces de, 106
 - lemme de, 106
- sous-groupe
 - des k -cobords au sens de Čech, 24
 - des k -cocycles au sens de Čech, 24
- Stein
 - variété de, 33, 61, 85
- support
 - d'un courant, 71
 - d'une section d'un faisceau quotient $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$, 33
- symétrie
 - de Hodge, 117
 - miroir, 100
- symbole principal
 - d'un opérateur différentiel, 104
- syzygies
 - détermination des, 34
- tangent
 - antiholomorphe, fibré, 11
 - fibré, 2
 - holomorphe fibré, 11
- Thie, théorème de, 65
- tight closure, 87
- torique lisse, variété, 27, 126
- torsion
 - d'une métrique sur le fibré tangent, 18, 102
 - d'une structure presque complexe, 12
- transformation
 - loi de, 93
- trivialisable, fibré, 2
- valuation, 36
- variété
 - algébrique projective, 136
 - analytique complexe, 9

- Cauchy-Riemann (CR), 12
- de Stein, 33, 61, 85
- différentiable, 1
- Von Neumann, théorie de, 142

- Weierstrass, théorème de préparation de, 35
- Whitney, théorème, 33
- Wiebe, théorème de, 95
- Wiener, pseudofiltrage de, 69
- Wirtinger, théorème de, 120