Université Bordeaux 1 Année 2012-2013

M1MI2011 Analyse 1

Devoir 1

à rendre semaine 9 selon le groupe

NB : Les réponses doivent être justifiées.

• **Exercice 1.**

En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que la suite $u_n = \dfrac{5n+3}{3n+5}$ converge et calculer sa limite.

• **Exercice 2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+1}.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{4}$$

En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

• **Exercice 3.** Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de nombres réels définie par les relations suivantes: $u_0 \in]0,1]$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}, \qquad n \geq 1.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n \leq 1$.
2. Montrer que la suite est monotone. En déduire qu'elle est convergente.
3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

• **Exercice 4.**

Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites suivantes :

$$a_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}, \quad b_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}, \quad c_n = \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{n + \sqrt{n^2-1}}, \quad d_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

$$p_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad q_n = \frac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}}, \quad r_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}, \quad s_n = \frac{e^n}{n^n}$$

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{\ln k}{k}}, \qquad V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{k}, \quad W_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$$