

Exercice 1

Soit $H = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, on considère l'opérateur T défini par

$$(Tu)_n = u_{n+1}.$$

1. Montrer que T est une application linéaire continue de H dans lui-même.
2. Calculer la norme de T .
3. Déterminer l'adjoint de T .
4. Déterminer le noyau de T et l'image de T^* .
5. Déterminer TT^* et T^*T .

Exercice 2

Soit $H = L^2(]0, 1[)$, soit $g \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, on considère l'opérateur T défini par $Tf = gf$.

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}(H)$ et calculer sa norme.
2. Calculer T^* .
3. A quelle condition sur g l'opérateur T est-il un isomorphisme de H ?

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit sur $[-1, 1]$ la fonction $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

1. Calculer T_0 et T_1 .
2. Etablir que pour tout $n \geq 1$

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x). \quad (1)$$

3. En déduire que T_n est un polynôme de degré n dont on précisera le terme de plus haut degré. On appelle T_n le polynôme de Tchebichev de degré n .
4. Expliciter les racines de T_n ainsi que la valeur de $\max_{[-1, 1]} |T(x)|$.
5. Montrer que les polynômes de Tchebichev sont orthogonaux pour le produit scalaire défini sur les polynômes par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

6. Déterminer les réels a et b minimisant la fonctionnelle

$$F(a, b) = \int_{-1}^1 \frac{(t^2 - at - b)^2 dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$