Université Bordeaux 1 — Année 2012-2013

M1MI2011 Analyse 1

Devoir 2

à rendre semaine 15 selon le groupe

Exercice 1

1. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I, et soit $x_0 \in I$. On suppose que f est continue en x_0 et que $f(x_0)$ est strictement positif. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que
$$\forall x \in I \cap J, \quad f(x) > 0.$$
2. En déduire que si g et h sont deux fonctions réelles sur I, continues en x_0, telles que $g(x_0) \neq h(x_0)$, alors il existe un voisinage V de x_0 tel que
$$\forall x \in V, \quad g(x) \neq h(x).$$

Exercice 2

Soient a et b deux réels strictements positifs tels que $a + b = 1$. Le but de cet exercice est de démontrer que :
$$a \ln\left(\frac{1}{a}\right) + b \ln\left(\frac{1}{b}\right) \leq \ln(2). \tag{1}$$
Pour cela, on considère la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{aligned} &f(x) = -x \ln x - (1 - x) \ln(1 - x) \qquad \text{si } 0 < x < 1 \\ &f(0) = f(1) = 0 \end{aligned}$$

1. Montrez que f est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$.
2. Montrez que
$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = f(1 - x)$$
Quelle propriété du graphe de f peut-on en déduire ?
3. Calculez la dérivée de f sur $]0, 1[$ et précisez son signe.
4. Exploitez les résultats précédents pour démontrer l'inégalité (1).

Exercice 3

1. Montrer que pour tout couple (a, b) de réels vérifiant $a < b$ et toute fonction φ dérivable sur $[a, b]$ vérifiant $\varphi(b) > \varphi(a)$, il existe au moins un réel $\ell \in [a, b]$ vérifiant $\varphi(\ell) = \varphi(a)$ et $\varphi'(\ell) \geq 0$. Indication : on pourra considérer un élément particulier de l'ensemble A des $x \in [a, b]$ tels que $\varphi(x) \leq \varphi(a)$.
2. En déduire que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et non constante, alors sa dérivée prend des valeurs non nulles. Indication : on pourra considérer $a < b$ tels que $f(a) \neq f(b)$, et la fonction φ définie sur $[a, b]$ par
$$\varphi(x) := -x + \frac{2}{m} f(x)$$
où $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
3. Montrer que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivé positive ou nulle, alors f est croissante. Indication : on pourra utiliser une fonction φ définie comme à la question 2, avec a et b convenablement choisis.