UE N1MA7104

Devoir surveillé, Mercredi 7 Novembre 2012, 8.30-11.30

Polycopié de cours autorisé
(à l'exclusion de tout autre document)

Un barème indicatif est donné sur 24 points
(*l'exercice 5 étant considéré hors barème*)

Exercice 1 (5 points)

Soient a et b deux réels strictement positifs et K le compact de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$K := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\Big\}.$$

1. Calculer l'intégrale double

$$I := \iint_K (x^2+y^2)\,dxdy$$

en utilisant le changement de variables

$$(x,y) \longleftrightarrow (r,\theta),$$

où $x = ar\cos\theta$ et $y = br\sin\theta$ (ce changement de variables réalise un C^1-difféomorphisme entre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,x)\,;\, x \geq 0\}$ et $]0,\infty[\times]0,2\pi[$).

2. Soit $(\partial K)_+$ le bord orienté du compact K (conformément à l'orientation canonique du plan complexe). Comment appelle t'on la courbe géométrique correspondant au support du chemin $(\partial K)_+$? Calculer (en utilisant un paramétrage admissible de $(\partial K)_+$) l'intégrale curviligne

$$J := \int_{(\partial K)_+} (y^3\,dx - x^3\,dy).$$

3. Donner une relation simple reliant les deux nombres I et J. Retrouver cette relation sans faire le calcul ni de I, ni de J – comme aux questions précédentes –, mais en utilisant cette fois un théorème du cours que l'on citera.

Exercice 2 (5 points)

Soit f une fonction holomorphe au voisinage du disque unité fermé $\overline{D(0,1)}$ du plan complexe et $\gamma\ : \theta \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi\theta}$ le chemin $(\partial\overline{D(0,1)})_+$.

1. À quel système d'équations aux dérivées partielles se plie dans l'ouvert $D(0,1)$ le couple de fonctions réelles (P,Q) tel que $f \equiv P + iQ$? Que peut-on dire de l'application $\mathbb{R}$-linéaire $d_{(x,y)}[(P,Q)]$ (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) en un point quelconque (x,y) de $D(0,1)$?
2. En invoquant un théorème du cours, prouver l'inégalité

$$\int_\gamma P\, dQ \geq 0$$

et exprimer cette intégrale curviligne en fonction de la dérivée au sens complexe $f' \; : D(0,1) \to \mathbb{C}$ de la fonction f. Que peut-on dire de la fonction f si $\int_\gamma P\, dQ = 0$?

Exercice 3 (7 points)

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 et $\psi \; : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^2. Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et tout $\epsilon > 0$, on note $\gamma_{z_0,\epsilon}$ le chemin $\theta \in [0,1] \longmapsto z_0 + \epsilon e^{2i\pi\theta}$.

1. Montrer que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{\epsilon \to 0_+} \Big(\frac{1}{2i\pi\epsilon^2} \int_{\gamma_{z_0,\epsilon}} \varphi(\zeta)\, d\zeta \Big) = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}(z_0). \qquad (*)$$

2. Si Δ désigne l'opérateur laplacien $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, montrer que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{\epsilon \to 0_+} \Big(\frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{(\xi,\eta) \in \overline{D(z_0,\epsilon)}} \Delta[\psi](\xi + i\eta)\, d\xi d\eta \Big) = \Delta[\psi](z_0). \qquad (**)$$

3. Comment s'exprime l'opérateur laplacien (considéré comme agissant sur les fonctions de classe C^2) à partir des opérateurs différentiels du premier ordre complexes $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \overline{z}$? En utilisant cette expression du laplacien, retrouver la formule $(**)$ à partir de la formule $(*)$ appliquée cette fois à la fonction $\varphi := \partial\psi/\partial z$.
4. On note (r,θ) les coordonnées polaires ($x + iy = re^{i\theta}$). Vérifier, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et tout $r > 0$, la formule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial r}(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{ir} \Big(\int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}(\zeta)\, d\zeta - \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{\partial \psi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\, d\overline{\zeta} \Big). \qquad (\dagger)$$

5. Déduire de la formule $(\dagger)$ que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{r \to 0_+} \Big(\frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial r}(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \Big) = \Delta[\psi](z_0).$$

Exercice 4 (7 points)

Soient f et q deux fonctions à valeurs complexes définies dans un voisinage V du disque fermé $\overline{D(0,1)}$ du plan complexe, supposées toutes deux de classe C^1 dans ce voisinage V. Soit γ le chemin $\theta \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi\theta}$ correspondant au bord orienté $(\partial \overline{D(0,1)})_+$.

1. Soit $z \in D(0,1)$. En appliquant dans $K = \overline{D(0,1)}$ la formule de Cauchy-Pompeiu à la fonction $\zeta \in V \mapsto f(\zeta)\big(1 + q(\zeta)(\zeta - z)\big)$, vérifier que l'on a pour $f(z)$ la formule de représentation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} f(z) \quad = \quad & \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(\zeta)\big(1 + q(\zeta)(\zeta - z)\big)\,\frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ & -\frac{1}{\pi} \iint_{\overline{D(0,1)}} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\Big(\frac{1}{\zeta - z} + q(\zeta)\Big)\,d\xi\,d\eta \\ & -\frac{1}{\pi} \iint_{\overline{D(0,1)}} f(\zeta)\,\frac{\partial q}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\,d\xi\,d\eta \end{aligned}$$

   (on justifiera la convergence des trois intégrales, simples ou doubles, figurant au membre de droite de cette formule).

2. On suppose de plus maintenant que q est identiquement nulle sur le bord du disque $\overline{D(0,1)}$. Déduire de la formule de représentation établie à la question 1 (en la comparant à ce que donnerait la formule de Cauchy-Pompeiu appliquée à f) que l'on a, pour tout $z \in D(0,1)$, l'égalité :

$$\iint_{\overline{D(0,1)}} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\,q(\zeta)\,d\xi d\eta = -\iint_{\overline{D(0,1)}} f(\zeta)\,\frac{\partial q}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\,d\xi d\eta.$$

   Retrouver cette égalité en appliquant dans $K = \overline{D(0,1)}$ la formule de Green-Riemann à la 1-forme $f(\zeta)q(\zeta)\,d\zeta$.

3. Pour toute fonction f de classe C^1 au voisinage de $\overline{D(0,1)}$, prouver, en utilisant le résultat établi à la question précédente avec une judicieuse fonction q, la formule

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(re^{i\theta})\,(1 - r^2)\,r dr d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,r^2 e^{i\theta}\,dr d\theta.$$

Exercice 5 (sur 6 points, mais hors barème)

Soit $\varphi\ : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^2 identiquement nulle hors d'un compact du plan.

1. Formuler, en termes des dérivées partielles

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial \overline{z}^q}[\varphi]\,(0),\ \ p,q\in\mathbb{N},\ \ p+q\leq 2,$$

la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour la fonction φ au voisinage de l'origine.

2. En utilisant la formule de Green-Riemann et la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour φ au voisinage de l'origine (telle qu'elle est a été formulée à la question 1), montrer que [1]

$$\lim_{\epsilon\to 0_+}\Big(\frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=|\xi+i\eta|>\epsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta^2}\Big)=-\frac{1}{2\pi}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}(0).$$

3. On suppose maintenant φ de classe C^∞ et non plus seulement de classe C^2. En transposant ce qui a été fait aux questions 1 et 2 du cas $n=1$ au cas cette fois $n\in\mathbb{N}^*$ quelconque, montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la limite

$$\lim_{\epsilon\to 0_+}\Big(\frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=|\xi+i\eta|>\epsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta^{n+1}}\Big)$$

existe et calculer la valeur de cette limite en termes des dérivées par rapport à z de la fonction φ, évaluées en $z=0$.

FIN

1. Il y avait ici une erreur dans le texte ; le facteur $-1/2i$ avait été oublié.