UE MHT632 - Printemps 2011

Devoir surveillé, Mardi 22 Mars 2011, 10h00-12h20

Durée : 2 heures 20 – Notes de cours, de TD, de TP autorisées

Exercice I. On considère une fonction C^∞ au voisinage d'un segment $[a,b]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = (b-a)/2^n$. On note

$$I := \int_a^b f(t)\,dt.$$

Le but de l'exercice est de construire une manière « accélérée » pour calculer de manière approchée l'intégrale I (méthode dite de Romberg).

I.1. Quelle formule du cours permet d'affirmer qu'il existe une suite de nombres réels $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ (on ne demande pas ici de préciser les valeurs de ces nombres) telle que, si l'on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n := h_n\Big(\frac{f(a)}{2} + \sum_{l=1}^{2^n-1} f(a+lh_n) + \frac{f(b)}{2}\Big)$$

(c'est une approximation de I *via* la méthode des trapèzes), on ait, pour tout entier $M \in \mathbb{N}$,

$$u_n = I + \sum_{k=1}^{M} \lambda_k h_n^{2k} + o(h_n^{2M}) \qquad (\dagger)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

I.2. On a en particulier, en prenant $M = 2$ dans la formule $(\dagger)$:

$$u_n = I + \lambda_1 h_n^2 + \lambda_2 h_n^4 + o(h_n^4).$$

Quelle suite $(u_n^{(1)})_{n\geq 1}$ faut-il former pour accélérer la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ suivant le procédé d'accélération de Richardson, subordonné ici à la suite (convergeant vers 0) $(x_n)_{n\geq 1}$, où $x_n = h_n^2$? Est-on assuré dans ce cas qu'il y a bien accélération de convergence lorsque la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est remplacée par $(u_n^{(1)})_{n\geq 1}$?

I.3. Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$u_n^{(1)} = I + \widetilde{\lambda}_2 h_n^4 + o(h_n^4)$$

pour une certaine constante $\widetilde{\lambda}_2$ que l'on calculera à partir des λ_k. Comment peut-on réitérer la méthode et construire à partir de la suite $(u_n^{(1)})_{n\geq 1}$ une suite $(u_n^{(2)})_{n\geq 1}$ convergeant aussi vers I, telle que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$u_n^{(2)} = I + \widetilde{\lambda}_3 h_n^6 + o(h_n^6)$$

pour une certaine constante $\widetilde{\lambda}_3$ que l'on exprimera à partir des λ_k.

I.4. Sous quelle forme algorithmique l'algorithme d'accélération de convergence introduit dans la question précédente peut-il être implémenté (faites un diagramme comme dans le cours).

Exercice II. Soit f une fonction C^∞ au voisinage d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

II.1. Comment s'exprime de polynôme d'interpolation de Lagrange

$$\text{Lagrange}[x_0,...,x_N; f(x_0),...,f(x_N)]\,(X)$$

de f aux nœuds d'un maillage

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_N \leq b \qquad (*)$$

de $[a,b]$ en fonction des différences divisées $y[f(x_0),...,f(x_k)]$, $k=0,...,N$? Calculer

$$\text{Lagrange}[x_0,x_1; f(x_0),f(x_1)]\,(X),\ \text{puis Lagrange}[x_1,x_2; f(x_1),f(x_2)]\,(X)\ ;$$

comment s'exprime en fonction de ces deux polynômes le polynôme

$$\text{Lagrange}[x_0,x_1,x_2; f(x_0),f(x_1),f(x_2)]\,(X)\ ?$$

Suivant quel algorithme le polynôme de Lagrange

$$\text{Lagrange}[x_0,...,x_N; f(x_0),...,f(x_N)]\,(X)$$

peut-il être ainsi calculé ?

II.2. Quel maillage de $[a,b]$ à $N+1$ nœuds[1] faut-il choisir pour que l'erreur uniforme

$$\sup_{t\in[a,b]} \Big| f(t) - \text{Lagrange}[x_0,...,x_N\ ;\ f(x_0),...,f(x_N)](t)\Big|$$

soit minimale (parmi tous les maillages du type $(*)$ possibles) ?

Exercice III. Soit A une matrice réelle symétrique positive de taille $n\times n$ supposée inversible, b et c deux vecteurs ligne de $\mathbb{R}^n$. On pose

$$Q(x_1,...,x_n) = \frac{{}^t x \cdot A \cdot x}{2} - \langle b, x\rangle + c.$$

[1]On donnera explicitement la valeur des x_k, $k=0,...,N$, en se plaçant dans un premier temps dans le cas particulier $[a,b]=[-1,1]$

On souhaite chercher les vecteurs ξ de $\mathbb{R}^n$ minimisant Q sous les contraintes

$$\sum_{k=1}^{n} c_{jk} x_k \leq l_j, \; j = 1, ..., p$$

où $C = [c_{jk}]_{1 \leq j \leq p, 1 \leq k \leq n}$ est une matrice de rang $p \leq n$ et les l_j, $j = 1, ..., p$, sont des constantes réelles.

III.1. La fonctionnelle Q est-elle bien fortement convexe ? Exprimer en fonction des valeurs propres de A un nombre $\delta > 0$ tel que

$$\langle \nabla Q(x) - \nabla Q(y), x - y \rangle \geq \delta \, \|x - y\|^2$$

pour tout x, y dans $\mathbb{R}^n$.

III.2. Expliciter le Lagrangien en $(x_1, ..., x_n, u_1^*, ..., u_p^*)$ dont il faut rechercher algorithmiquement les points-selle pour résoudre le problème d'optimisation sous contraintes mentionné. Qu'entend-t'on par « point-selle » ? Si l'on veut être assuré de la convergence, comment convient-il de choisir le pas p (supposé constant) dans la méthode d'Uzawa (en fonction des valeurs propres de A et de la norme $\| \; \|_2$ de l'application linéaire correspondant à la matrice C des contraintes) ?

Exercice IV.

IV.1. Soit f un signal analogique échantillonné aux points $0, \tau, ..., (N-1)\tau$, où τ désigne un pas d'échantillonnage strictement positif. Quelle fréquence maximale (en module) peut on tolérer dans la décomposition de f pour que l'échantillonnage permette la reconstruction de f en tout autre point ?

IV.2. Comment[2], en utilisant l'algorithme `dft` (M) avec $M >> N$, peut on réaliser dans f la coupure des composantes correspondant aux fréquences dont le module dépasse le seuil $1/2 \times \pi/\tau$?

IV.3. Expliquer comment ce même algorithme `dft` (M), avec $M >> 2N$, permet la multiplication rapide des polynômes de degré au plus N. Quel choix particulier de M fournit les algorithmes les plus économiques en termes de complexité ?

[2] Penser à l'interpolation de la suite $[s(0), ..., s(N-1)]$ par un polynôme trigonométrique à N fréquences que l'on précisera.