

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

EXERCICE I

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par récurrence pour $n \geq 1$ par

$$u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{n + u_n}{n^2} \quad \forall n \geq 1.$$

1. Calculer u_2 et u_3 . On a en appliquant la formule reliant u_{n+1} à u_n que $u_2 = (1 + 1)/1 = 2$ et $u_3 = (2 + 2)/4 = 1$.
2. Montrer, en raisonnant par récurrence sur n , que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite à termes positifs. On a $u_1 = 1 \geq 0$. L'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$ (à savoir « $u_n \geq 0$ ») est donc vérifiée au cran initial ($n = 1$). Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un cran fixé $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui signifie $u_n \geq 0$. Alors $u_{n+1} = (n + u_n)/n^2 = 1/n + u_n/n^2 \geq 1/n > 0$, ce qui montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. L'assertion « $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ » est bien ainsi prouvée par récurrence.
3. Montrer que $u_n \geq 1/(n-1)$ pour tout $n \geq 2$, puis en déduire que $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \geq 2$. D'après la formule exprimant u_{n+1} à partir de u_n , on a

$$u_n = \frac{n-1 + u_{n-1}}{(n-1)^2} = \frac{1}{n-1} + \frac{u_{n-1}}{(n-1)^2} \quad \forall n \geq 2.$$

Comme $u_{n-1} \geq 0$ pour tout $n \geq 2$ (d'après la question 2), on a bien $u_n \geq 1/(n-1)$ pour tout $n \geq 2$. On a donc, toujours d'après la formule liant u_{n+1} à u_n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n + u_n}{n^2} - u_n = \frac{1}{n} - \frac{n^2 - 1}{n^2} u_n \\ &\leq \frac{1}{n} - \frac{n^2 - 1}{n^2} \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{n+1}{n^2} = -\frac{1}{n^2} \leq 0 \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

4. Déduire de la question 3 que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite majorée par 2, décroissante à partir de $n = 2$. On a $u_1 = 1 \leq 2$, puis $u_2 = 2$. D'après le résultat établi à la question 3, la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante ; elle est donc majorée par son premier terme, à savoir $u_2 = 2$. Comme $u_1 = 1$, tous les u_n , pour $n \geq 1$, sont majorés par 2. La décroissance à partir de $n = 2$ a été vue juste au dessus.

5. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et calculer sa limite. Toute suite décroissante minorée (ici par 0) est convergente (Proposition 1.2 du cours). Donc la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est convergente vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$ et, bien sûr, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge aussi vers l . On a donc (de par le résultat concernant les opérations sur les limites de suites, Proposition 1.4 du cours)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + u_n \times \frac{1}{n^2} \right) = 0 + l \times 0 = 0.$$

La suite $(u_{n+1})_{n \geq 1}$, donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, converge vers $l = 0$.

6. Montrer, en utilisant les résultats établis aux questions 3 et 4, que :

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{n-1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{(n-1)^2}.$$

La première inégalité a été établie à la question 3. D'autre part

$$u_n \leq \frac{n-1+u_{n-1}}{(n-1)^2} \leq \frac{n-1+2}{(n-1)^2} = \frac{n+1}{(n-1)^2}$$

puisque $u_{n-1} \leq 2$ pour tout $n \geq 2$.

7. En déduire un équivalent pour u_n lorsque n tend vers $+\infty$. Comme $1/(n-1) \sim 1/n$ et $(n+1)/(n-1)^2 \sim 1/n$ lorsque n tend vers l'infini, le terme u_n qui se trouve encadré par $1/(n-1)$ et $(n+1)/(n-1)^2$ est aussi équivalent à $1/n$ (lemme de gendarmes).

On définit la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ en posant $v_n = (1 + u_n)^n$ pour tout $n \geq 1$.

8. Rappeler le DL à l'ordre 1 en 0 de la fonction

$$x \in]-1, +\infty[\mapsto f(x) = \ln(1+x).$$

Il s'agit juste d'exprimer ici que f est dérivable en $x = 0$, de nombre dérivé $f'(0) = 1/1 = 1$ en ce point. Le DL demandé est donc :

$$\log(1+h) = \log 1 + h + o(h) = h + o(h).$$

9. Exploiter la formule $x^n = \exp(n \ln x)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$) pour réexprimer v_n lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$. On a, en exploitant la relation suggérée, lorsque n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} v_n &= \exp(n \log(1 + u_n)) = \exp(n(u_n + o(u_n))) \\ &= \exp(n(u_n + o(1/n))) = \exp(nu_n + o(1)). \end{aligned}$$

Comme $u_n \sim 1/n$ lorsque n tend vers l'infini, la suite $(nu_n)_{n \geq 1}$ converge vers 1 et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e^1 = e$ du fait que la fonction exponentielle est continue en $x = 1$.

EXERCICE II

Soit $n \geq 2$ un entier fixé et $f_n :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x > -1, f_n(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}.$$

1. Montrer que f_n est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et calculer $f'_n(x)$.

La fonction f_n est définie sur $] -1, +\infty[$. Elle est dérivable sur cet intervalle ouvert comme quotient de deux fonctions polynomiales (donc C^∞ sur $\mathbb{R}$), la fonction figurant au dénominateur ne s'annulant pas sur $] -1, +\infty[$. Le calcul de la dérivée se fait en utilisant les règles de calcul pour la dérivée d'un quotient (vues dans le cours de MISMI ainsi qu'en Terminale) ; on obtient, pour $x > -1$:

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{u_n(x)}{v_n(x)} \right] = \frac{u'_n(x)v_n(x) - u_n(x)v'_n(x)}{v_n^2(x)} \\ &= \frac{nx^{n-1}(1+x)^n - n(x^n+1)(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} \\ &= n \frac{x^{n-1}(1+x) - x^n - 1}{(1+x)^{n+1}} = \frac{n(x^{n-1} - 1)}{(1+x)^{n+1}}. \end{aligned}$$

2. Montrer que f_n réalise son minimum sur $[0, +\infty[$ en un unique point de $[0, +\infty[$ que l'on déterminera et calculer la valeur de ce minimum.

La fonction f'_n s'annule en un seul point, $x = 1$. Comme $f'_n < 0$ lorsque $x^{n-1} < 1$, i.e. $x < 1$, f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$. Comme $f'_n > 0$ lorsque $x^{n-1} > 1$, i.e. $x > 1$, f_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Il y a donc un (unique) point où f_n réalise son minimum sur $[0, +\infty[$, le point $x = 1$, la valeur du minimum de f_n en ce point étant égale à $2/2^n = 2^{1-n}$.

3. En déduire que

$$\forall x \geq 0, \quad (1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n),$$

puis que

$$\forall a \geq 0, \forall b \geq 0, \quad (a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n).$$

On a, d'après les résultats établis à la question 2 :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \frac{1}{f_n(x)} \leq \frac{1}{2^{1-n}} = 2^{n-1}.$$

Il en résulte donc

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad (1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n).$$

Si $a \geq 0$ et $b > 0$, on a, en prenant $x = a/b$ dans l'inégalité précédente :

$$(1 + a/b)^n \leq 2^{n-1}(1 + a^n/b^n).$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par b^n , on trouve bien

$$(a + b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n).$$

Cette inégalité subsiste si $a \geq 0$ et $b = 0$ puisque $2^{n-1} \geq 1$. Elle est donc valide en fait pour tout a, b dans $[0, +\infty[$.

EXERCICE III

Soient $a < b$ deux nombres réels.

1. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions supposées dans un premier temps de classe C^1 sur $[a, b]$, et telles que $f'(t) \leq g'(t)$ pour tout $t \in [a, b]$. Rappeler le théorème fondamental de l'analyse pour une fonction h de classe C^1 sur un segment de $\mathbb{R}$ et démontrer que

$$f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x) \quad \text{lorsque} \quad a \leq x < y \leq b.$$

Il s'agit du résultat suivant (théorème 2.12 du cours) : si h est une fonction à valeurs réelles ou complexes de classe C^1 sur le segment $[x, y]$ (non réduit à un point), alors

$$h(y) - h(x) = \int_x^y h'(t) dt.$$

Si $[x, y] \subset [a, b]$, on applique ce résultat à la fonction $h = (g - f)|_{[x, y]}$. On a

$$(g(y) - f(y)) - (g(x) - f(x)) = \int_x^y (g'(t) - f'(t)) dt.$$

Or l'intégrale de Riemann sur un segment d'une fonction continue positive est positive du fait de la propriété de monotonie de la prise d'intégrale. On a donc

$$(g(y) - f(y)) - (g(x) - f(x)) \geq 0,$$

ce qui est l'inégalité voulue.

2. On considère $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ comme dans la question 1, mais on suppose maintenant seulement que ces deux fonctions sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, telles que $f'(t) \leq g'(t)$, cette fois seulement pour tout $t \in]a, b[$. Énoncer la formule des accroissements finis pour une fonction réelle h définie sur un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, puis, en l'appliquant à la fonction $g - f$, montrer que lorsque $a \leq x < y \leq b$, on a encore $f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x)$.

On utilise ici la formule des accroissements finis (corollaire 2.6 du cours) : si h est une fonction réelle continue sur un segment $[x, y]$, dérivable sur $]x, y[$, il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$h(y) - h(x) = h'(c) (y - x).$$

On prend ici $h = (g - f)|_{[x, y]}$. Il existe $c_{x, y} \in]x, y[\subset]a, b[$ tel que

$$(g(y) - f(y)) - (g(x) - f(x)) = (y - x) (g'(c_{x, y}) - f'(c_{x, y})).$$

Comme $f' \leq g'$ sur $]a, b[$, on a donc $f(y) - g(y) \leq f(x) - g(x)$, ce qui donne l'inégalité demandée.

3. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe deux constantes α et β telles que $f'(t) \in [\alpha, \beta]$ pour tout $t \in]a, b[$. Soient encore x et y dans $[a, b]$ tels que $x < y$. Montrer que

$$\alpha \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \beta.$$

On utilise comme à la question 2 la formule des accroissements finis sur $[x, y]$ (corollaire 2.6 du cours) ; notons que l'on aurait pu aussi utiliser le théorème fondamental de l'analyse comme à la question 1, mais il aurait fallu être plus soigneux avec les cas $x = a$ ou $y = b$ et utiliser en plus la continuité de f en ces points. On prend ici $h = f|_{[x, y]}$. On a donc

$$f(y) - f(x) = f'(c) (y - x).$$

Or $y - x > 0$ et $f'(c) \in [\alpha, \beta]$ par hypothèses. On a donc

$$\alpha \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \leq \beta.$$

4. Soit $f : x \in]-\pi/2, \pi/2[\mapsto \tan x$.

- Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ et montrer que $f'(x) \geq 1$ pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. La dérivée de la fonction

$$x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

sur $] -\pi/2, \pi/2[$ est

$$x \mapsto \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \geq 1$$

en utilisant la règle de calcul donnant la dérivée d'un quotient (cf. le cours de MISMI ou de Terminale).

- En déduire que $|\tan x| \geq |x|$ pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. La fonction $\tan$ est paire sur $] -\pi/2, \pi/2[$. Il suffit donc de prouver l'inégalité pour $x \in]0, \pi/2[$. D'après la formule des accroissements finis, on a, pour un certain $c_x \in]0, x[$,

$$\tan x - \tan 0 = \tan'(c_x)(x - 0) = x \tan'(c_x) \geq x.$$

On a donc $\tan x \geq x$ sur $[0, \pi/2[$. Par parité, on a $|\tan x| \geq |x|$ sur $] -\pi/2, \pi/2[$.

EXERCICE IV

Le but de l'exercice est de prouver la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de terme général

$$u_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \right) - n.$$

1. Calculer, en exprimant l'expression dont on prend la limite comme une somme de Riemann,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \right).$$

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}}.$$

On reconnaît à droite une somme de Riemann pour la fonction

$$x \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

(la subdivision est ici régulière et de pas $1/n$). Comme le pas de la subdivision utilisée tend ici vers 0 lorsque n tend vers l'infini, il résulte du théorème 3.3 du cours (sur la convergence des sommes de Riemann) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \right) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \left[2\sqrt{1+t} \right]_0^1 = 2(\sqrt{2} - 1).$$

2. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour la fonction exponentielle entre $a = 0$ et $b = h > 0$ et en déduire :

$$\forall n \geq 1, \forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \left| e^{\frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \right| \leq \frac{e}{2n^2}.$$

La formule de Taylor-Lagrange demandée est :

$$\exp(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2} \exp c_h$$

(avec c_h entre 0 et h). puisque $\exp' = \exp$ sur $\mathbb{R}$ et que $\exp(0) = 1$. On a donc, en prenant $h(n, k) = 1/\sqrt{n^2 + kn}$,

$$e^{\frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} = \frac{1}{2} \frac{1}{n^2 + kn} e^{c_{h(n,k)}} \leq \frac{e^{c_{h(n,k)}}}{2n^2}.$$

Comme $c_{h(n,k)} \in [0, h(n, k)] \subset [0, 1]$ et que la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0, 1]$, on a $e^{c_{h(n,k)}} \leq e^1 = e$. On a donc bien l'inégalité demandée.

3. Déduire des questions 1 et 2 que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et calculer sa limite. On a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}} - 1 \right).$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, puis en ajoutant les inégalités obtenues à la question 2 (pour $k = 0, \dots, n-1$), on trouve :

$$\left| u_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \right| \leq n \times \frac{e}{2n^2} = \frac{e}{2n}.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ a donc la même limite que la suite des sommes de Riemann introduite à la question 1. Elle est donc convergente vers $2(\sqrt{2} - 1)$ d'après le résultat établi à la question 1.

EXERCICE V

Soient $a < b$ deux nombres réels, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ deux fonctions continues.

1. Montrer si $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$, on a

$$m \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq M \int_a^b g(t) dt.$$

On a

$$\forall t \in [a, b], \quad m g(t) \leq f(t) g(t) \leq M g(t).$$

En utilisant la monotonie de l'opération de prise d'intégrale de Riemann, on a bien l'inégalité demandée par intégration sur $[a, b]$ de l'inégalité ponctuelle précédente.

2. Dédurre de la question 1 qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt.$$

Si $\int_a^b g(t) dt = 0$, on a aussi $\int_a^b f(t)g(t) dt = 0$ d'après l'encadrement établi à la question précédente. Les deux membres de la formule que l'on demande d'établir sont nuls et l'on peut donc prendre pour c n'importe quel point de $[a, b]$. Si $\int_a^b g(t) dt > 0$, on a, d'après l'inégalité établie à la question 1 :

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t) g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt} \leq M.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires et ses conséquences (Théorème 2.1, puis Théorème 2.3 du cours), toute valeur entre m et M (incluses) est prise par f sur $[a, b]$. Il existe donc bien $c \in [a, b]$ réalisant la relation voulue.

3. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$I(\alpha) = \int_0^1 (1+t)^\alpha e^t dt.$$

Exprimer $I(\alpha + 1)$ en fonction de $I(\alpha)$ lorsque α est un nombre réel fixé. On utilise la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I(\alpha + 1) &= \int_0^1 (1+t)^{\alpha+1} e^t dt \\ &= \left[(1+t)^{\alpha+1} e^t \right]_0^1 - (\alpha+1) \int_0^1 (1+t)^\alpha e^t dt \\ &= 2^{\alpha+1} e - 1 - (\alpha+1) I(\alpha). \end{aligned}$$

4. *Déduire des questions **2** et **3** que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $c_\alpha \in [0, 1]$ tel que*

$$I(\alpha)(2 + \alpha + c_\alpha) = 2^{\alpha+1}e - 1.$$

D'après le résultat établi à la question **2** (en prenant $f(t) = 1 + t$ et $g(t) = (1 + t)^\alpha e^t$), on voit qu'il existe $c_\alpha \in [0, 1]$ tel que

$$I(\alpha + 1) = (1 + c_\alpha) I(\alpha).$$

En reportant dans la formule établie à la question **3**, on trouve donc

$$I(\alpha)(1 + c_\alpha + \alpha + 1) = 2^{\alpha+1}e - 1.$$

C'est la formule voulue.