Semestre 3, Année 2009-2010 SESSION 1

UE : MHT304

Date : 06 Janvier 2010, 11h-12h30 Durée : 1h30

Documents non autorisés

Chaque exercice est noté sur 7 points, la note totale étant considérée sur 20. On pourra donc (si on le souhaite) se contenter de ne traiter que trois exercices (soit déjà un total de 21 points) parmi les quatre proposés.

Exercice I

1. Soit P le polynôme à coefficients réels :

$$P(X) = a_0 X^N + a_1 X^{N-1} + \ldots + a_N.$$

Décrire la procédure d'évaluation de la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé, basée sur la méthode de Hörner. Combien cette procédure consomme-t-elle de multiplications ? d'additions ? Quels avantages présente-t-elle par rapport à la procédure consistant à calculer les puissances successives de x_0 (x_0^k, $k = 0, ..., N$), puis à les « combiner » pour former $P(x_0)$?

2. Écrire en langage algorithmique (en mettant en évidence boucles et test d'arrêt) la procédure permettant de calculer suivant la méthode de Newton l'unique zéro réel de la fonction polynomiale P appartenant au segment $[a, b]$ si l'on sait par avance que $x \mapsto P(x)$ est strictement décroissante sur $[a, b]$, telle que $P(a)P(b) < 0$, et que $P'' > 0$ sur $[a, b]$.

Exercice II

Soit A une matrice $n \times n$ réelle symétrique et de valeurs propres toutes strictement positives, que l'on peut écrire sous la forme

$$A = M - N$$

avec M inversible.

1. Montrer que la matrice $S := {}^tM + N$ (où ${}^t(\cdot)$ désigne la transposition) est aussi une matrice symétrique réelle.

2. Décrire la procédure itérative permettant de calculer de manière approchée le rayon spectral de la matrice $M^{-1}N$.

3. On suppose que la matrice S a aussi toutes ses valeurs propres strictement positives et l'on pose, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|X\|_A := \sqrt{\langle AX, X \rangle}$. Vérifier que si $\|X\|_A = 1$ et $Y = M^{-1}AX$, on a

$$\begin{aligned}
\|M^{-1}NX\|_A^2 &= \langle AM^{-1}NX, M^{-1}NX\rangle \\
&= \langle AM^{-1}(M-A)X, M^{-1}(M-A)X\rangle \\
&= \langle AX - AY, X - Y\rangle = 1 - \langle MY, Y\rangle - \langle Y, MY\rangle + \langle AY, Y\rangle \\
&= 1 - \langle SY, Y\rangle.
\end{aligned}$$

En déduire, compte tenu de l'hypothèse faite sur S, que le rayon spectral de $M^{-1}N$ est strictement inférieur à 1.

4. Décrire la procédure permettant (si les hypothèses de la question **3** sont vérifiées) de résoudre *via* une méthode itérative le système $AX = B$, B étant un vecteur colonne fixé dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice III. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On souhaite calculer *via* une méthode composite basée sur la méthode de Simpson l'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt\,.$$

1. Si $h = (b-a)/N$ désigne le pas de la subdivision utilisée, quelle expression approchée $\widetilde{I}_{[a+kh,a+(k+1)h]}[f]$ choisit-on pour l'intégrale

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(t)\,dt\,,\ \ k = 0, ..., N-1 \qquad ?$$

2. On suppose que la fonction f est de classe C^∞ au voisinage de $[a, b]$. Quel exposant p peut-on espérer dans le contrôle de l'erreur d'approximation

$$\Big| \int_a^b f(t)\,dt - \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{I}_{[a+kh,a+(k+1)h]}[f] \Big| \leq Ch^p\,?$$

Aurait-on une valeur de p plus grande si l'on utilisait la méthode à quatre points au lieu de la méthode de Simpson ?

3. Décrire un procédé d'accélération de convergence (dû à L. Richardson et W. Romberg) permettant d'incrémenter de 1, de 2, etc., la valeur de l'exposant p dans le contrôle de l'erreur d'approximation.

Exercice IV. Expliciter le polynôme d'interpolation de Lagrange permettant d'interpoler les valeurs $y_0, ..., y_N$ aux $N+1$ points distincts $x_0, ..., x_N$ de $\mathbb{R}$. Décrire une procédure récursive permettant le calcul du polynôme d'interpolation de $N+1$ valeurs en $N+1$ points à partir des calculs de deux polynômes d'interpolation de N valeurs en N points (procédure d'Aitken).