Semestre 6, Année 2010-2011 SESSION 1

UE : MHT632

Date : 5 Mai 2011, 14h00-17h00 Durée : 3h

Notes (polycopiées) de cours et notes de TD autorisées, à l'exclusion de tout autre ouvrage.

Exercice I. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ (de dimension $n \times n$) des matrices $n \times n$. On munit cet espace vectoriel de la norme $\| \ \| = \| \ \|_2$, définie par

$$\|A\| = \sup_{\{x \in \mathbb{R}^n \, ; \, \|x\|=1\}} \|A \cdot x\|,$$

où $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

I.1. Rappeler la définition du conditionnement d'une matrice inversible A de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$; comment ce conditionnement s'exprime-t-il en termes des valeurs singulières de la matrice A ?

I.2. Si $X \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice inversible et $H \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice réelle telle que $\|H\| < 1/\|X^{-1}\|$, montrer que $X + H$ est inversible et que

$$(X + H)^{-1} = X^{-1} - X^{-1} H X^{-1} + o_X(\|H\|).$$

I.3. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice réelle inversible. Sur l'ouvert U de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ constitué des matrices inversibles, on définit la fonction F par

$$F(X) = X^{-1} - A.$$

Où la fonction F s'annule t-elle dans l'ouvert U ? Décrire l'algorithme itératif qui conduit (suivant la méthode de Newton appliquée dans l'ouvert U) à la recherche de l'unique zéro de la fonction F dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ (on exprimera ce algorithme sous la forme $X_{k+1} = N_F(X_k)$ en explicitant la fonctionnelle N_F en fonction de A).

I.4. Montrer que $N_F(X)$ est définie pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et vérifier que l'on a, pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, la relation

$$N_F(X) - A^{-1} = -(X - A^{-1}) \cdot A \cdot (X - A^{-1}).$$

I.5. Montrer que si l'algorithme introduit à la question **I.3** est initié en une matrice X_0 telle que $\|X_0 - A^{-1}\| < \|A\|/2$, on a, pour tout $k \geq 1$,

$$\|X_k - A^{-1}\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k - 1} \|X_0 - A^{-1}\|.$$

Exercice II. Soit f une fonction continue sur $[0,\infty[$ telle que

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 \exp(-t)\, dt < +\infty.$$

II.1. Montrer que l'on a aussi

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| \exp(-t)\, dt < +\infty.$$

II.2. On se propose de calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty f(t) \exp(-t)\, dt$$

via une méthode de Newton-Cotes à deux points ($0 < x_0 < x_1 < +\infty$), soit

$$\int_0^\infty f(t) \exp(-t)\, dt \simeq \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1). \tag{1}$$

Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k \exp(-t)\, dt$ et en déduire la valeur des constantes λ_0 et λ_1 pour que la formule approchée à deux points (1) soit exacte à l'ordre 1.

II.3. On pose $S = x_0 + x_1$ et $P = x_0 x_1$. Exprimer en fonction de S et P les conditions nécessaires et suffisantes sur les points x_0 et x_1 pour que la formule approchée (1) (où les constantes λ_0 et λ_1 sont remplacées par leurs valeurs calculées à la question **II.2**) soit exacte à l'ordre 3. En déduire les valeurs numériques qu'il convient de choisir pour les deux points x_0 et x_1 pour qu'il en soit ainsi. Expliciter la formule d'intégration numérique (1) subordonnée à ce choix.

II.4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $0 < x_0 < x_1 < \cdots < x_N < +\infty$, $N+1$ points distincts de $]0,+\infty[$. Montrer qu'il existe un unique choix de constantes $\lambda_0, ..., \lambda_N$ (on ne demande pas de les calculer) tel que la formule d'intégration approchée à $N+1$ points

$$\int_0^\infty f(t) \exp(-t)\, dt \simeq \sum_{j=0}^{N} \lambda_j f(x_j)$$

soit exacte à l'ordre N. Comment suffit-il de choisir ces $N+1$ points pour que cette formule soit automatiquement exacte jusqu'à l'ordre $2N+1$ dès qu'elle l'est jusqu'à l'ordre N. Si $N = 1$, retrouver le résultat de la question **II.3**. Si $N = 2$, comment convient-il en particulier de choisir les trois points x_0, x_1, x_2 pour que la formule d'intégration approchée (1) soit exacte jusqu'à l'ordre 5 ?

II.5. Si les $N+1$ points $x_0, ..., x_N$ sont choisis comme à la question **II.4** de manière à ce que la formule (1) soit exacte jusqu'à l'ordre $2N+1$, donner, dans le cas où f a toutes ses dérivées bornées sur $[0,\infty[$, une estimation de l'erreur

$$e_N[f] = \Big|\int_0^\infty f(t)\,\exp(-t)\,dt - \sum_{j=0}^N \lambda_j f(x_j)\Big|$$

sous la forme

$$e_N[f] \le \frac{\sup_{[0,\infty[} |f^{(2N+1)}|}{(2N+1)!} \times C_N$$

où C_N est une intégrale que l'on explicitera sans chercher toutefois à la calculer.

Exercice III. On considère le problème de Cauchy

$$y'(t) = f(t,y) \quad \& \quad y(0) = 0, \quad \text{où } f(t,y) := f(y) = \frac{y^2}{1+|y|}. \tag{2}$$

III.1. Ecrire pour ce problème de Cauchy les schémas numériques d'Euler explicite, d'Euler rétrograde, d'Euler modifié, de Heun et de Craig-Nicholson. Lesquels sont explicites ? implicites ? Préciser l'ordre de la méthode dans chacun de ces cas.

III.2. On considère, toujours pour le problème de Cauchy (2), le schéma numérique

$$\frac{y_{h,k+1} - y_{h,k}}{h} = \frac{y_{h,k}\, y_{h,k+1}}{1+|y_{h,k}|}, \quad y_{h,0} = 1 \tag{3}$$

pour $h \in [0,h_0]$, $0 < h_0 < 1$. S'agit-t-il, tel qu'il est posé, d'un schéma explicite ? implicite ?

III.3. Calculer la fonctionnelle $(t,y,h) \mapsto \Phi[f](t,y,h)$ associée au schéma numérique (3). Montrer que ce schéma numérique est consistant.

III.4. Calculer $(\partial\Phi[f]/\partial y)(t,y,h)$ et vérifier que, pour tout $h \in [0,h_0]$ (avec $h_0 < 1$), pour tout $t \ge 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\Big|\frac{\partial\Phi[f]}{\partial y}\,(t,y,h)\Big| \le \frac{2}{1-h_0}.$$

En déduire que le schéma numérique (3) est stable.

III.5. Montrer que le schéma numérique (3) est convergent en précisant ce que cela signifie.

FIN