

Chapitre II : Espaces de séries de Dirichlet

Hervé Queffélec

October 15, 2014

1 Définitions hilbertiennes

1.1 Suites de Riesz

Les définitions suivantes (cf.[44]) nous serviront dans la suite de ce chapitre, et au chapitre suivant sur les opérateurs de composition. Soit H un espace de Hilbert et $(x_j)_{j \geq 1}$ une suite de H . Nous dirons que

1. (x_j) est une *suite de Riesz supérieure* s'il existe une constante $B < \infty$ (appelée constante de Riesz supérieure) telle que

$$\left\| \sum \lambda_j x_j \right\|^2 \leq B^2 \sum |\lambda_j|^2 \|x_j\|^2$$

pour toute suite finie (λ_j) de scalaires ("le carré de la somme est dominé par la somme des carrés").

2. (x_j) est une *suite de Riesz inférieure* s'il existe une constante $A > 0$ (appelée constante de Riesz inférieure) telle que

$$\left\| \sum \lambda_j x_j \right\|^2 \geq A^2 \sum |\lambda_j|^2 \|x_j\|^2$$

pour toute suite finie (λ_j) de scalaires ("le carré de la somme domine la somme des carrés").

3. (x_j) est une *suite de Riesz* s'il existe deux constantes A et B telles que

$$A^2 \sum |\lambda_j|^2 \|x_j\|^2 \leq \left\| \sum \lambda_j x_j \right\|^2 \leq B^2 \sum |\lambda_j|^2 \|x_j\|^2$$

pour toute suite finie (λ_j) de scalaires ("le carré de la somme est comme la somme des carrés").

4. (x_j) est une *base de Riesz* si (x_j) est une suite de Riesz qui est de plus totale dans H : l'espace engendré par les x_j est dense dans H .

Remarque. Il est clair qu'une suite de Riesz supérieure n'est pas toujours une suite de Riesz inférieure, car on peut répéter des vecteurs : par exemple $x_{2j-1} = x_{2j} = e_j$ où $(e_j)_{j \geq 1}$ est une base hilbertienne de H . C'est essentiellement la seule chose qu'on peut faire. La conjecture de Kadison-Singer, résolue affirmativement par Marcus, Spielman, Srivastava (cf. article d'E.Matheron) devient le théorème suivant ([31])

Théorème 1.1 *Toute suite de Riesz supérieure (x_j) normalisée, au sens où $0 < a \leq \|x_j\| \leq b < \infty$, est union finie de suites de Riesz.*

On peut maintenant se demander si une suite de Riesz inférieure normalisée n'est pas automatiquement une suite de Riesz supérieure, d'autant que cela arrive quand $x_j = \frac{K_{z_j}}{\|K_{z_j}\|}$ est une suite normalisée de noyaux reproduisants de l'espace H^2 du disque ([18] p.278, [42]). Dans le jargon des spécialistes (cf. sous-sections suivantes), une suite d'interpolation (ici la suite (z_j)) est une suite de Carleson (pour H^2). Et K.Seip ([26]) m'a informé que cela reste vrai pour d'autres espaces de Hilbert de fonctions, par exemple les espaces de Bergman, Paley-Wiener et Fock. Mais cela n'est pas impliqué par la propriété de Nevanlinna-Pick complète, qui irait plutôt en sens opposé.

Voici un contre-exemple dans le cas général ([11]) que nous a indiqué J.F.Burnol; cet exemple est en dimension n , mais s'étend immédiatement par somme hilbertienne à la dimension infinie. Soit $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ la base canonique de \mathbb{C}^n et u le vecteur unitaire $(1/\sqrt{n}) \sum_{j=1}^n e_j$, ainsi que T l'opérateur qui agit comme I sur u^\perp et comme $\sqrt{n}I$ sur la droite engendrée par u (I étant l'identité de \mathbb{C}^n). On pose $x_j = T(e_j)$ et on voit que

$$e_j = (1/\sqrt{n})u + v_j \text{ avec } \langle v_j, u \rangle = 0, \quad x_j = u + v_j, \quad 1 \leq \|x_j\| \leq \sqrt{2}.$$

La suite (x_j) est de Riesz supérieure avec une constante *explosive*, car

$$\left\| \sum_{j=1}^n x_j \right\| \geq n \|u\| = n \quad \text{alors que} \quad \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{2n}.$$

Par contre, elle est de Riesz inférieure avec une constante uniformément minorée quand $n \rightarrow \infty$. On a en effet, en utilisant le symbole de Kronecker

$$\langle x_j, x_k \rangle = 1 + \langle v_j, v_k \rangle = \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \delta_{j,k}$$

si bien que, pour toute suite (λ_j) de scalaires :

$$\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\|^2 = \sum_{1 \leq j, k \leq n} \lambda_j \overline{\lambda_k} \langle x_j, x_k \rangle = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j \right|^2 \geq \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2.$$

1.2 Suites de Carleson

Nous utiliserons aussi les définitions suivantes ([44]). Soit H un espace de Hilbert et $(x_j)_{j \geq 1}$ une suite de vecteurs non nuls de H . On pose $y_j = x_j / \|x_j\|$ (souvent, $\|x_j\| = 1$). Nous dirons que (x_j) est une suite de Bessel s'il existe une constante C telle que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, y_j \rangle|^2 \leq C \|x\|^2, \quad \forall x \in H.$$

La meilleure constante C s'appelle la constante de Bessel de (x_j) (s'il existait aussi une minoration $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, y_j \rangle|^2 \geq c \|x\|^2$, on dirait que (x_j) est un frame). Les suites de Bessel ne sont autres que les suites de Riesz supérieures ([7]), comme le montre la

Proposition 1.2 (Boas) *Soit (x_j) une suite de H de constante de Bessel C . Alors, pour toute suite finie (λ_j) de scalaires*

$$\left\| \sum_j \lambda_j x_j \right\|^2 \leq C \sum_j |\lambda_j|^2 \|x_j\|^2$$

et de plus $C^{1/2}$ est la constante de Riesz supérieure de (x_j) .

Preuve : supposons (x_j) de Bessel, et soit $x = \sum \lambda_j x_j$ une somme finie. Observons que $\|x\|^2 = \langle x, \sum \lambda_j x_j \rangle = \sum \overline{\lambda_j} \langle x, x_j \rangle$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire

$$\begin{aligned} \|x\|^4 &= \left| \sum \overline{\lambda_j} \langle x, x_j \rangle \right|^2 \leq \left(\sum_j |\lambda_j|^2 \|x_j\|^2 \right) \left(\sum_j |\langle x, x_j \rangle|^2 \right) \\ &\leq C \left(\sum_j |\lambda_j|^2 \|x_j\|^2 \right) \|x\|^2 \end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité annoncée. Réciproquement, si (x_j) est une suite de Riesz supérieure de constante B ((y_j) aussi, vu l'arbitraire sur les λ_j), fixons $x \in H$. On peut trouver une suite (w_j) telle que $\sum |w_j|^2 = 1$ et

$$\begin{aligned} \left(\sum_j |\langle x, y_j \rangle|^2 \right)^{1/2} &= \sum_j \overline{w_j} \langle x, y_j \rangle = \langle x, \sum_j w_j y_j \rangle \leq \|x\| \left\| \sum_j w_j y_j \right\| \\ &\leq B \|x\| \left(\sum_j |w_j|^2 \right)^{1/2} = B \|x\| \end{aligned}$$

si bien que (x_j) est une suite de Bessel avec constante $\leq B^2$. □

Nous particularisons maintenant au cas d'un espace de Hilbert H de fonctions définies sur un ensemble Ω , de noyau reproduisant K_a .

1. Une mesure positive μ sur Ω est une *mesure de Carleson pour H* s'il existe une constante C telle que

$$\int_{\Omega} |f(z)|^2 d\mu(z) \leq C \|f\|^2, \quad \forall f \in H.$$

La meilleure constante C s'appelle la norme de Carleson de μ , et se note $C = \|\mu\|_{C,H}$.

2. Soit $Z = (z_j)$ une suite de points de Ω . Z est une *suite de Carleson* si la suite de vecteurs $x_j = K_{z_j} \|K_{z_j}\|^{-1}$ est de Bessel, autrement dit si la mesure discrète

$$\mu_{Z,H} := \sum_j \|K_{z_j}\|^{-2} \delta_{z_j}$$

est de Carleson pour H . La constante de Carleson de (z_j) est par définition $\|\mu_{Z,H}\|_{C,H}$, ou encore la constante de Bessel de (x_j) .

1.3 Suites d'interpolation

On dit qu'une suite $X = (x_j)$ d'un espace de Hilbert H est une suite d'interpolation (ou de Riesz-Fischer) si, pour tout $w = (w_j) \in \ell^2$, on peut trouver $x \in H$ tel que

$$(1.1) \quad \langle x, x_j \rangle = w_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Alors, il existe une constante C tel qu'on puisse trouver un tel x avec $\|x\| \leq C \|w\|$. Soit en effet J l'orthogonal de l'espace engendré par les x_j et $T : \ell^2 \rightarrow H/J$ définie par $T(w) = x + J$ où x vérifie (1.1), ce vecteur étant déterminé

modulo J . L'application T est linéaire, a son graphe fermé, et donc est continue. Et la constante $C = \|T\|$ convient, par projection orthogonale. Le lemme de Zabrejko ([43], p.190), appliqué à la semi-norme sigma-sous-additive sur ℓ^2 définie par

$$N(w) = \inf\{\|x\| ; \langle x, x_j \rangle = w_j \quad \forall j\}$$

donnerait aussi l'existence de C . Le meilleur C possible s'appelle la constante d'interpolation de X , et se note $M_H(X)$.

Les suites d'interpolation normées ne sont autres que les suites de Riesz inférieures ([7]), comme le montre la

Proposition 1.3 (Boas) *Soit $X = (x_j)$ une suite normée de H . Alors pour toute suite finie (λ_j) de scalaires, $\|\sum_j \lambda_j x_j\|^2 \geq [M_H(X)]^{-2} \sum_j |\lambda_j|^2$, et de plus $[M_H(X)]^{-1}$ est la constante de Riesz inférieure de (x_j) .*

Preuve : supposons X d'interpolation et soit (λ_j) une suite finie de scalaires. On peut écrire par linéarisation

$$S := \left(\sum_j |\lambda_j|^2 \right)^{1/2} = \sum_j c_j \bar{\lambda}_j \quad \text{avec} \quad \sum_j |c_j|^2 = 1.$$

On a ensuite $c_j = \langle x, x_j \rangle$ avec $x \in H$ vérifiant $\|x\| \leq M_H(X)$. On obtient

$$S = \sum_j \bar{\lambda}_j \langle x, x_j \rangle = \langle x, \sum_j \lambda_j x_j \rangle \leq M_H(X) \left\| \sum_j \lambda_j x_j \right\|.$$

Ainsi, (x_j) est une suite de Riesz inférieure de constante $A \geq [M_H(X)]^{-1}$. Réciproquement, supposons (x_j) normé de constante de Riesz inférieure A . Soit (w_j) telle que $\sum |w_j|^2 = 1$. Définissons une forme linéaire L sur l'espace (non fermé) engendré par les x_j ainsi : $L(\sum_j \lambda_j x_j) = \sum \lambda_j \bar{w}_j$. Nous avons

$$\left| L\left(\sum_j \lambda_j x_j\right) \right| \leq \left(\sum_j |\lambda_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_j |w_j|^2 \right)^{1/2} \leq (1/A) \left\| \sum_j \lambda_j x_j \right\|.$$

Par conséquent, L se prolonge en une forme linéaire L sur H de norme $\leq 1/A$ et on peut trouver $x \in H$ avec

$$\|x\| \leq 1/A \quad \text{et} \quad L(y) = \langle y, x \rangle \quad \forall y \in E.$$

Testant cela sur $y = x_j$, nous obtenons $\langle x, x_j \rangle = w_j$ et voyons que $M_H(X) \leq 1/A$, soit encore $A \leq [M_H(X)]^{-1}$. \square

Passons au cas d'un espace de Hilbert H de fonctions définies sur un ensemble Ω , de noyau reproduisant K_a . La suite de points $Z = (z_j) \subset \Omega$ est une *suite d'interpolation* pour H si la suite de vecteurs $x_j = \|K_{z_j}\|^{-1} K_{z_j}$ est d'interpolation, ou encore si, pour toute suite (w_j) telle que l'on ait $\sum_j |w_j|^2 \|K_{z_j}\|^{-2} < \infty$, il existe $f \in H$ telle que

$$\langle f, K_{z_j} \rangle = f(z_j) = w_j \quad \text{et} \quad \|f\| \leq C \left(\sum_j |w_j|^2 \|K_{z_j}\|^{-2} \right)^{1/2}.$$

2 Critères de "Rieszitude"

Le sous-espace E engendré par des K_{z_j} s'appelle *un espace modèle*. La proposition suivante reformule les Propositions 1.2 et 1.3, appliquées à la suite $x_j = \|K_{z_j}\|^{-1} K_{z_j}$, dans le langage des espaces de fonctions, et donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite (K_{z_j}) de noyaux reproduisants soit une suite de Riesz supérieure (resp. inférieure) pour l'espace modèle E qu'elle engendre, avec contrôle des constantes.

Proposition 2.1 *Soit $Z = (z_j)$ une suite finie dans Ω . Alors*

1. $\| \sum_j \lambda_j K_{z_j} \|^2 \leq \| \mu_{Z,H} \|_{C,H} \sum_j |\lambda_j|^2 \|K_{z_j}\|^2$, et de plus $\| \mu_{Z,H} \|_{C,H}^{1/2}$ est la constante de Riesz supérieure de (K_{z_j}) .
2. $\| \sum_j \lambda_j K_{z_j} \|^2 \geq [M_H(Z)]^{-2} \sum_j |\lambda_j|^2 \|K_{z_j}\|^2$, et de plus $[M_H(Z)]^{-1}$ est la constante de Riesz inférieure de (K_{z_j}) .

Remarque. On pourrait se contenter de parler de suites de Bessel et de suites de Riesz-Fischer, mais ce "langage à la Carleson" munit d'une intuition géométrique utile (via un théorème de plongement de Carleson) dans l'étude des opérateurs de composition C_φ associés à une application holomorphe $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ lorsque Ω est un ouvert du plan complexe (le disque unité ou un demi-plan pour les séries de Dirichlet). Ces opérateurs (cf. chapitre 3) sont formellement définis par

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi, \quad f \in H.$$

3 L'espace de Hilbert \mathcal{H}^2

Rappelons la notation, pour tout nombre réel θ :

$$\mathbb{C}_\theta = \{s \in \mathbb{C} ; \Re s > \theta\}.$$

3.1 Bases de dilatées de l'espace de Hilbert $L^2(0, 1)$

Soit H l'espace de Hilbert $L^2(0, 1)$. On convient qu'une fonction $\varphi \in H$ s'étend d'abord en une fonction *impaire* sur $(-1, 1)$ puis en une fonction 2-périodique sur \mathbb{R} , toujours notée φ . On remarque (exercice) que si $\psi(x) = \sqrt{2} \sin \pi x$, les dilatées $\psi_n(x) := \psi(nx)$, $n = 1, 2, \dots$ forment une base orthonormale de H ou encore que toute fonction $\varphi \in H$ a un développement de Fourier

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{2} \sin n\pi x \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Et il est naturel de se demander quelles sont les fonctions $\varphi \in H$ qui possèdent la même propriété. La question posée est tout à fait naturelle et dans l'esprit du théorème de Wiener sur la totalité des translatées d'une fonction (remplacées ici par leurs dilatées). Mais elle est trop rigide: seules les fonction $a_1 \sqrt{2} \sin \pi x$ avec $|a_1| = 1$ conviennent, ce qui demande une preuve ([10], Théorème 2.4, voir aussi la Remarque 2 qui suit le Théorème 7.2). Assouplissons-la en demandant

1. Quelles sont les $\varphi \in H$ telles que les $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ forment une base de Riesz de H ?
2. Quelles sont les $\varphi \in H$ telles que les $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ forment un système total de H ?

Comme on le verra, il existe une réponse satisfaisante à la première question, en termes de séries de Dirichlet. Considérons la correspondance

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{2} \sin n\pi x \in H \rightarrow S\varphi(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}.$$

Puisque $\sum |a_n|^2 < \infty$, cela amène naturellement à considérer l'espace \mathcal{H}^2 défini ainsi:

$$(3.1) \quad \mathcal{H}^2 := \left\{ f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} ; \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 =: \|f\|^2 < \infty \right\}.$$

Il est clair via Cauchy-Schwarz que \mathcal{H}^2 est un espace de Hilbert de fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_{1/2}$ et que les fonctions u_n définies par $u_n(s) = n^{-s}$, $n = 1, 2, \dots$, forment une base orthonormale de \mathcal{H}^2 . Le noyau reproduisant K_a de \mathcal{H}^2 , c'est-à-dire

$$f(a) = \langle f, K_a \rangle \quad \forall f \in \mathcal{H}^2$$

est donc donné pour $s, a \in \mathbb{C}_{1/2}$, par

$$K_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s) \overline{u_n(a)} = \zeta(s + \bar{a}) \quad \text{avec } \|K_a\|^2 = K_a(a) = \zeta(2 \Re a).$$

On a aussi clairement $K_a^{(j)} \in \mathcal{H}^2$ pour tout entier $j \geq 0$ et de plus

$$f^{(j)}(a) = \langle f, K_a^{(j)} \rangle \quad \forall f \in \mathcal{H}^2.$$

Une réponse complète à la question 1 sera donnée en termes de l'espace des multiplicateurs de \mathcal{H}^2 et de la "fonction génératrice" $S\varphi$. Considérons l'exemple séminal suivant.

3.2 L'exemple de Wintner

Soit $\tau \in \mathbb{C}_{1/2}$ et $\varphi = \varphi^\tau \in H$ de développement de Fourier

$$(3.2) \quad \varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n^\tau}.$$

Wintner a démontré

Théorème 3.1 [Wintner] Si $\varphi = \varphi^\tau$ avec $\tau \in \mathbb{C}_{1/2}$ est comme dans (3.2), les dilatées $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ sont totales dans H .

Preuve : voici une preuve simple, basée sur le lemme classique suivant :

Lemme 3.2 Soit (a_m) une série absolument convergente de complexes telle que $S_d := \sum_{k=1}^{\infty} a_{kd} = 0$ pour tout entier $d \geq 1$. Alors, $a_m = 0$ identiquement.

Preuve du lemme: on utilise un argument de crible basé sur la fonction de Möbius μ en notant que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{d|n} \mu(d) S_d = \sum_{(m,n)=1} a_m = 0$$

où (m, n) désigne le p.g.c.d des entiers m et n . En effet, le membre de droite vaut (séparation des variables)

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\sum_{d|(m,n)} \mu(d) \right) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\sum_{\substack{d|m, \\ d|n}} \mu(d) \right) = \sum_{d|n} \mu(d) \left(\sum_{k \geq 1} a_{kd} \right).$$

Il en résulte que

$$a_1 = - \sum_{\substack{(m,n)=1, \\ m>1}} a_m,$$

d'où

$$|a_1| \leq \sum_{\substack{(m,n)=1, \\ m>1}} |a_m|.$$

En prenant $n = p_1 \cdots p_N$ où (p_j) est la suite des nombres premiers, on obtient

$$|a_1| \leq \sum_{m>p_N} |a_m|$$

puis $a_1 = 0$ en faisant tendre N vers l'infini. Soit ensuite l un entier ≥ 1 et $b_k := a_{lk}$. On a $\sum |b_k| < \infty$ et $\sum_{k \geq 1} b_{kd} = S_{ld} = 0$. Par ce qui précède, $a_l = b_1 = 0$.

Finissons maintenant la preuve du Théorème 3.1, en posant une fois pour toutes $e_j(x) = \sqrt{2} \sin 2\pi jx$ et en considérant $g = \sum_{j=1}^{\infty} g_j e_j \in H$, orthogonale aux $\varphi_n = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\tau} e_{kn}$. Alors

$$0 = \langle \varphi_n, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{g_{kn}}}{k^{\tau}} = n^{\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{g_{kn}}}{(kn)^{\tau}}.$$

Les hypothèses du lemme sont vérifiées pour la suite $a_m = \overline{g_m} m^{-\tau}$, sommable puisque $\Re \tau > 1/2$ et $(g_m) \in \ell^2$. On en déduit que tous les g_m et g sont nuls, ce qui achève la preuve. \square

Le lemme devient faux en l'absence de convergence absolue, comme le montre l'exemple $a_n = \frac{\lambda(n)}{n}$ où λ est la fonction complètement multiplicative de Liouville ([36], p.29), qui vaut -1 sur les nombres premiers. Un autre exemple, signalé par O.Ramaré ([39]), est $a_n = \frac{\mu(n)}{n}$ où μ est la fonction de Möbius. Voici la preuve.

Proposition 3.3 *Soit q un entier ≥ 1 . Alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(qn)}{n} = 0.$$

Preuve : soit χ_0 le caractère principal modulo q et $L(s, \chi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_0(n)}{n^s}$, d'inverse

$$1/L(s, \chi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\chi_0(n)}{n^s} = [\zeta(s)]^{-1} \prod_{p|q} (1 - p^{-s})^{-1}.$$

Nous avons pour $\Re s > 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(qn)n^{-s} &= \sum_{\substack{n \geq 1, \\ (q,n)=1}} \mu(q)\mu(n)n^{-s} = \mu(q) \sum_{n \geq 1} \mu(n)\chi_0(n)n^{-s} \\ &= \mu(q)[\zeta(s)]^{-1} \prod_{p|q} (1 - p^{-s})^{-1} =: G(s). \end{aligned}$$

Cela implique par un argument taubérien classique : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(qn)}{n} = G(1) = 0$. \square

Remarque: De très intéressants compléments au théorème de Wintner, avec des exemples de suites orthonormales "exotiques" de dilatées, se trouvent dans l'article [10]. En particulier (Théorème 3.1 de cet article) si $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{2} \sin n\pi x$ avec $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, alors (φ_n) est une *suite orthonormale* si et seulement si, posant $S\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, on a

$$(3.3) \quad |S\varphi(-iy)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{iy} \right| = 1 \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

Soit en effet $T(y) = |S\varphi(-iy)|^2 = \sum_{m,n \geq 1} a_m \overline{a_n} \left(\frac{m}{n}\right)^{iy}$ et μ la mesure de Haar du compactifié de Bohr $\overline{\mathbb{R}}$ de \mathbb{R} ([37], ch.1), pour laquelle les exponentielles $e_{\lambda}(x) = e^{i\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ forment une base orthonormale de $L^2(\mu)$. On voit que T est à spectre de Fourier-Bohr dans $F := \log E$ où E est l'ensemble des rationnels > 0 et a l'identité (qui en un sens annonce [23])

$$(3.4) \quad r = p/q \in E \Rightarrow \int T(y) r^{-iy} d\mu(y) = \langle \varphi_q, \varphi_p \rangle.$$

En effet, le second membre de (3.4) vaut

$$\sum_{qm=pn} a_m \overline{a_n} = \sum_{m/n=r} a_m \overline{a_n}.$$

Et le premier aussi puisque $m/n \neq r \Rightarrow \int (m/n)^{iy} r^{-iy} d\mu(y) = 0$. Et (3.3) en découle. Par exemple, si (φ_n) est une suite orthonormale, (3.4) montre

que le spectre de Fourier-Bohr de T est réduit à $\log 1 = 0$, la fonction T vaut donc une constante c et $c = \int T(y) d\mu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = 1$. Et (3.4) donne immédiatement la réciproque. Des monômes comme $\varphi(x) = \sqrt{2} \sin k\pi x$ conviennent, mais aussi des fonctions plus inattendues, comme celle (avec $-1 < a < 1$) correspondant à

$$a_1 = -a, \quad a_{2^n} = a^{n-1}(1 - a^2) \text{ pour } n \geq 1, \quad a_m = 0 \text{ sinon}$$

pour laquelle $S\varphi(s) = \frac{2^{-s}-a}{1-a2^{-s}}$. Plus généralement, étant donné des entiers $n_1, \dots, n_r \geq 2$ et des points $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{D}$, on peut prendre φ définie par

$$S\varphi(s) = \prod_{j=1}^r \frac{n_j^{-s} - z_j}{1 - \bar{z}_j n_j^{-s}}.$$

Par contre, si $S\varphi(s) = \sum_{n=1}^N a_n n^{-s}$ est un polynôme de Dirichlet unimodulaire, c'est un monôme, comme conséquence du lemme simple suivant

Lemme 3.4 *Soit $\lambda_1 < \dots < \lambda_N \in \mathbb{R}$ et $P(t) = \sum_{n=1}^N a_n e^{i\lambda_n t}$. Si $|P(t)| = 1$ sur \mathbb{R} , P est un monôme.*

Preuve : on peut supposer $a_1 \neq 0$ et $\lambda_1 = 0$, par shift. Si $N \geq 2$, on a $|P(t)|^2 = \sum a_m \bar{a}_n e^{i(\lambda_m - \lambda_n)t} = 1$ et le coefficient de $e^{i\lambda_N t}$ est $a_N \bar{a}_1$ car $\lambda_m - \lambda_n = \lambda_N \Rightarrow m = N$ et $n = 1$. D'où $a_N = 0$ et finalement $P(t) = a_1$. \square

Cela ne passe pas aux polynômes trigonométriques $P(x) = \sum_{j=1}^n a_j \gamma_j(x)$ sur les groupes abéliens compacts G dont le dual $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ a de la torsion, comme le montre l'exemple (avec $n = 2^N$)

$$G_0 = \{\pm 1\}, \quad \Gamma_0 = \{1, \gamma\}, \quad Q = 1 + i\gamma, \quad G = G_0^N, \quad \Gamma = \Gamma_0^N, \quad P = Q \otimes \dots \otimes Q$$

pour lequel on a $|Q(y)| = \sqrt{2}$ pour tout $y \in G_0$ et $|P(x)| = \sqrt{n}$ pour tout $x = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in G$ alors que P n'est pas un monôme. Les sommes de Gauss ([2], p.168) donnent aussi des exemples intéressants.

4 L'espace de Banach \mathcal{H}^∞

4.1 Définition et premières propriétés

Soit \mathcal{D} l'espace des séries de Dirichlet $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ convergentes: $\sigma_c(f) < \infty$ ou encore $|a_n| \leq Cn^A$ pour des constantes C, A convenables. Et soit $H^\infty(\mathbb{C}_0)$ l'espace des fonctions analytiques bornées dans le demi-plan droit \mathbb{C}_0 . On a par définition:

$$\mathcal{H}^\infty = H^\infty(\mathbb{C}_0) \cap \mathcal{D}$$

et on appelle \mathcal{H}^∞ l'espace des séries de Dirichlet bornées. On le munit de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{s \in \mathbb{C}_0} |f(s)|$$

qui en fait un espace de Banach (non-séparable) et même une algèbre de Banach ([37], p.142). Une fonction $f \in \mathcal{H}^\infty$ est donc une fonction qui vérifie deux conditions, l'une de croissance, l'autre de développement. Voici quelques exemples:

1. Soit $g \in H^\infty(\mathbb{D})$. Alors, la fonction $f(s) = g(2^{-s})$ est dans \mathcal{H}^∞ . En effet, f est analytique bornée dans \mathbb{C}_0 et de plus, si $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$, on a $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n (2^n)^{-s}$, donc $f \in \mathcal{D}$.
2. Si $a > 1$ n'est pas entier, $f(s) = a^{-s} \notin \mathcal{H}^\infty$. En effet, $f \in H^\infty(\mathbb{C}_0)$ mais $f \notin \mathcal{D}$ comme on le vérifie facilement, par exemple en comparant le comportement de $f(s)$ et d'une série de Dirichlet $\sum_{n=k}^{\infty} a_k k^{-s}$ avec $a_k \neq 0$ quand $\Re s \rightarrow \infty$. Plus généralement, une série de Hurwitz $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+\theta)^{-s}$ avec $0 < \theta < 1$ n'est jamais dans \mathcal{H}^∞ .
3. Soit $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s-1} = (1-2^{-s})\zeta(s+1)$. Alors, $f \notin \mathcal{H}^\infty$. En effet, $f \in \mathcal{D}$ et même $\sigma_c(f) = 0$. Mais $f \notin H^\infty(\mathbb{C}_0)$ d'après les propriétés de la fonction zeta, par exemple (voir aussi l'inégalité de Bohr du chapitre 1).

4.2 Bases de Riesz de dilatées

Le théorème de Wintner nous dit que les dilatées de la fonction $\varphi = \varphi^\tau$ de (3.2) engendrent H dès que $\Re \tau > 1/2$. Mais il ne dit pas quand elles forment une base de Riesz. Le théorème suivant ([23]) va fournir la réponse.

Théorème 4.1 [Hedenmalm-Lindqvist-Seip] *Soit $\varphi \in H$ de développement $\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\pi x$. On a équivalence entre:*

1. *Les dilatées $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ de φ forment une base de Riesz de H .*
2. *La fonction génératrice $S\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ est dans \mathcal{H}^∞ ainsi que son inverse. Plus précisément*

$$\|S\varphi\|_\infty = B\|\varphi\|_2 \text{ et } \|1/S\varphi\|_\infty = (A\|\varphi\|_2)^{-1} \text{ ou encore}$$

$$s \in \mathbb{C}_0 \Rightarrow A\|\varphi\|_2 \leq |S\varphi(s)| \leq B\|\varphi\|_2$$

où A et B sont respectivement les constantes de Riesz inférieure et supérieure de (φ_n) .

En particulier, les dilatées de φ^τ forment une base de Riesz de H si et seulement si $\Re \tau > 1$.

Ce théorème sera montré plus loin, mais l'application à φ^τ est claire; on a

$$S\varphi^\tau(s) = \zeta(s + \bar{\tau}), \quad \text{et} \quad \frac{1}{S\varphi^\tau}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s-\bar{\tau}}$$

où μ désigne la fonction de Möbius. Ces fonctions sont bornées dans \mathbb{C}_0 si et seulement si $\Re \tau =: \sigma > 1$. On a alors

$$\|\varphi^\tau\|_2 = \sqrt{\zeta(2\sigma)}, \quad \|S\varphi^\tau\|_\infty = \zeta(\sigma), \quad \|1/S\varphi^\tau\|_\infty = \zeta(\sigma)/\zeta(2\sigma)$$

(voir aussi [27]), comme on l'a vu au chapitre 1. Soit $B = A^{-1} = \zeta(\sigma)/\sqrt{\zeta(2\sigma)}$.

Voici maintenant une formule due à E.Saksman ([40]), qui se révèle aussi fondamentale dans l'étude de \mathcal{H}^∞ que le noyau de Fejér dans l'étude des séries de Fourier.

5 La formule de convolution verticale de Saksman

Désignons par E l'ensemble des fonctions ψ de $L^1(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier $\hat{\psi}$,

$$\hat{\psi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-it\xi} dt$$

est à support compact. Nous avons le

Théorème 5.1 [Saksman] Soit $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{D}$ et θ un réel $\geq \sigma_c(f)$. On suppose f bornée dans tout demi-plan $\mathbb{C}_{\theta+\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$. Alors

$$(5.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \hat{\psi}(\log n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s+it) \psi(t) dt, \quad \forall s \in \mathbb{C}_\theta.$$

Preuve : observons d'abord que les deux membres de (5.1) ont un sens dans \mathbb{C}_θ et y définissent des fonctions analytiques. C'est évident pour le membre de gauche, qui est un polynôme de Dirichlet puisque $\psi \in E$. C'est clair pour le membre de droite puisque f est bornée sur chaque $\mathbb{C}_{\theta+\varepsilon}$. Soit maintenant $\alpha > \max(\theta, \sigma_a(f))$. Si $s \in \mathbb{C}_\alpha$, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(s+it) \psi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s-it} \psi(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \int_{-\infty}^{\infty} n^{-it} \psi(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \hat{\psi}(\log n), \end{aligned}$$

l'interversion étant justifiée par la convergence de la série de terme général

$$u_n = \int |a_n n^{-s-it} \psi(t)| dt \quad \text{avec} \quad u_n \leq |a_n| n^{-\alpha} \|\psi\|_1.$$

On a donc l'égalité voulue dans \mathbb{C}_α et, par *prolongement analytique des identités*, dans \mathbb{C}_θ . \square

Malgré la simplicité de sa preuve (les arguments usuels de changement de contour, un peu lourds techniquement, sont remplacés par le prolongement analytique des identités), l'identité de convolution verticale (5.1) va se révéler d'une utilité capitale.

6 Applications de la formule de Saksman

6.1 Une inégalité basique

Voici d'abord une reformulation utile de (5.1) quand $f \in \mathcal{H}^\infty$ et $\theta = 0$.

Théorème 6.1 *Soit $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^\infty$ et $\psi \in E$. Alors, on a pour tout entier $N \geq 2$ et tout $s \in \mathbb{C}_0$:*

$$(6.1) \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \widehat{\psi}\left(\frac{\log n}{\log N}\right) \right| \leq \|f\|_\infty \|\psi\|_1.$$

Preuve : on applique (5.1) à la fonction $\psi_\lambda(t) = \lambda \psi(\lambda t)$ où $\lambda = \log N$, qui vérifie $\|\psi_\lambda\|_1 = \|\psi\|_1$ et $\widehat{\psi}_\lambda(\xi) = \widehat{\psi}(\xi/\lambda)$. Le premier membre de (6.1) vaut donc

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(s+it) \psi_\lambda(t) dt \right| \leq \|f\|_\infty \|\psi_\lambda\|_1 = \|f\|_\infty \|\psi\|_1.$$

\square

L'inégalité simple suivante est fondamentale dans l'étude de \mathcal{H}^∞ . Elle intervient d'ailleurs dans la preuve de la complétude de \mathcal{H}^∞ ([37], p.142).

Théorème 6.2 *Soit $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^\infty$. Alors, on a*

$$(6.2) \quad |a_N| \leq \|f\|_\infty \text{ pour tout } N \geq 1.$$

En particulier, $\sigma_c(f) \leq 1$.

Preuve : notons d'abord que $a_1 = \lim_{\Re s \rightarrow \infty} f(s)$, donc $|a_1| \leq \|f\|_\infty$. Fixons ensuite un entier $N \geq 2$ et $s = \sigma + it \in \mathbb{C}_0$. Soit $h > 0$ tel que $h < \inf_{n \neq N} |\log n / \log N - 1|$, puis $\varphi \in E$ telle que $\varphi \geq 0$ et $\widehat{\varphi}(\xi) = (1 - |\xi|/h)^+$, et enfin $\psi(t) = e^{it}\varphi(t)$ si bien que

$$\widehat{\psi}(\xi) = (1 - |\xi - 1|/h)^+ \text{ et } \|\psi\|_1 = \|\varphi\|_1 = \widehat{\varphi}(0) = 1, \widehat{\psi}(1) = 1.$$

On a par construction :

$$\widehat{\psi}\left(\frac{\log n}{\log N}\right) = 1 \text{ si } n = N, \quad \text{et } = 0 \text{ si } n \neq N.$$

(6.1) se lit donc $|a_N| N^{-\sigma} \leq \|f\|_\infty$. Il reste à faire tendre σ vers zéro. \square

6.2 Sommes partielles des séries de Dirichlet et théorème de Bohr

Si $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^\infty$ et si N est un entier ≥ 1 , on note $S_N(f)$ la N -ième somme partielle de f . C'est le polynôme de Dirichlet défini par

$$(6.3) \quad S_N(f)(s) = \sum_{n=1}^N a_n n^{-s}.$$

Un résultat fondamental de Bohr ([9]) est le suivant :

Théorème 6.3 [Bohr] *Soit $f \in \mathcal{H}^\infty$. Alors, la série de Dirichlet associée à f converge uniformément dans tout demi-plan \mathbb{C}_ε avec $\varepsilon > 0$, en d'autres termes*

$$(6.4) \quad \sigma_u(f) \leq 0.$$

Dans [8] on a prouvé un résultat plus fort, sous forme quantitative, en montrant que

$$(6.5) \quad \|S_N(f)\|_\infty \leq C \log(N+1) \|f\|_\infty.$$

Le résultat est plus fort car, si l'on en dispose, on obtient le Théorème 6.3 en écrivant pour $s \in \mathbb{C}_0$:

$$a_n n^{-s-\varepsilon} = n^{-\varepsilon} [S_n(f)(s) - S_{n-1}(f)(s)]$$

et en faisant une transformation d'Abel.

La preuve de (6.5) utilisait une méthode *complexe*. On partait de la formule de sommation de Perron pour exprimer S_N comme une intégrale le long d'un segment vertical, à un terme d'erreur près; puis à l'aide du théorème de Cauchy on décalait le segment vers la gauche, et enfin on optimisait ce décalage par rapport à un certain paramètre. La formule de convolution de Saksman permet de donner une preuve *essentiellement réelle et "self-contained"* ([40]).

Théorème 6.4 [Balasubramanian-Calado-Queffélec] Soit $f \in \mathcal{H}^\infty$ et N un entier ≥ 1 . Alors

$$(6.6) \quad \|S_N(f)\|_\infty \leq C \log(N+1) \|f\|_\infty$$

où C est une constante numérique.

Preuve : on utilise l'inégalité (6.1) et un bon choix de la fonction ψ figurant dans cette inégalité, donné par le lemme suivant

Lemme 6.5 [Fonction Test] Soit T la fonction paire sur \mathbb{R} définie par

$$T(t) = 1 \text{ pour } 1 \leq t \leq 1 - 1/N, \quad T(t) = 0 \text{ pour } t \geq 1 + 1/N,$$

$$T \text{ linéaire sur } [1 - 1/N, 1 + 1/N].$$

Alors, $T = \widehat{\psi}$ avec $\psi \in E$ et

$$(6.7) \quad \|\psi\|_1 \leq \frac{4 + 2 \log N}{\pi}$$

Preuve du lemme: si $h > 0$, soit χ_h la fonction indicatrice de $(-h, h)$. Alors, $\widehat{\chi_h}(\xi) = 2 \frac{\sin h\xi}{\xi}$ et

$$T = \frac{1}{2a} \chi_a * \chi_b$$

avec $a = 1/N$ et $b = 1$. D'où

$$\widehat{T}(\xi) = 2N \frac{\sin \xi/N}{\xi} \frac{\sin \xi}{\xi}.$$

Nous voyons alors que

$$(6.8) \quad \|\widehat{T}\|_1 \leq 8 + 4 \log N.$$

En effet, la parité de T et le changement de variable $\xi = Ny$ donnent

$$\begin{aligned} \|\widehat{T}\|_1 &= 4 \int_0^\infty \frac{|\sin y| |\sin Ny|}{y^2} dy \leq 4 \left(\int_0^{1/N} N dy + \int_{1/N}^1 \frac{dy}{y} + \int_1^\infty \frac{dy}{y^2} \right) \\ &= 8 + 4 \log N. \end{aligned}$$

Maintenant, la formule d'inversion de Fourier et la parité impliquent

$$(6.9) \quad T = \widehat{\psi} \quad \text{avec} \quad \|\psi\|_1 \leq \frac{4 + 2 \log N}{\pi}.$$

On applique pour finir (6.1) avec ψ comme dans le Lemme. Ce qui nous donne pour $s \in \mathbb{C}_0$, via $\widehat{\psi} = T$:

$$(6.10) \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} T\left(\frac{\log n}{\log N}\right) \right| \leq \|f\|_\infty \|\psi\|_1.$$

On peut supposer que $\|f\|_\infty = 1$ et on note que

$$1 - \frac{1}{N} < \frac{\log n}{\log N} \leq 1 + \frac{1}{N} \iff \leq N e^{-\log N/N} < n \leq N e^{\log N/N}$$

si bien que le membre de gauche de (6.10) ne diffère de $S_N(f)(s)$ que par au plus

$$N [e^{\log N/N} - e^{-\log N/N}] \ll \log N$$

termes, tous de taille $\ll \|f\|_\infty = 1$ d'après (6.2). Comme on a de plus $\|\psi\|_1 \ll \log N$, prenant le sup sur $s \in \mathbb{C}_0$, on obtient le Théorème 6.4. \square

6.3 L'identité de Carlson

Voici maintenant une formule utile de type Parseval pour les séries de Dirichlet, dont la validité en général pose des problèmes délicats ([37], chap.7), mais pas pour les séries de Dirichlet bornées.

Théorème 6.6 Soit $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^{\infty}$ et $\varepsilon > 0$. Alors, on a

$$(6.11) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(\varepsilon + it)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-2\varepsilon} \leq \|f\|_{\infty}^2.$$

En particulier, on a l'inclusion contractante $\mathcal{H}^{\infty} \subset \mathcal{H}^2$, au sens où

$$f \in \mathcal{H}^{\infty} \implies f \in \mathcal{H}^2 \text{ et } \|f\|_2 \leq \|f\|_{\infty}.$$

Preuve : il suffit de remarquer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\varepsilon} n^{-it}$ converge uniformément sur \mathbb{R} d'après le Théorème 6.3, et que pour une série du type $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-i\lambda_n t}$, uniformément convergente sur \mathbb{R} , on a toujours (avec ici $\lambda_n = \log n$)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2.$$

Ceci se vérifie à l'arme blanche grâce à la convergence uniforme. En termes plus savants, c'est l'identité de Parseval pour f continue sur le compactifié de Bohr $\overline{\mathbb{R}}$ de \mathbb{R} muni de sa mesure de Haar μ qui vérifie

$$\int_{\overline{\mathbb{R}}} g d\mu = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt$$

pour toute g continue sur $\overline{\mathbb{R}}$. Quoi qu'il en soit, on a (6.11) et la seconde assertion s'obtient en faisant tendre ε vers 0. \square

6.4 Les multiplicateurs de \mathcal{H}^2

Nous noterons dans ce paragraphe $\|\cdot\|_2$ la norme dans \mathcal{H}^2 . Nous allons montrer ici le résultat fondamental suivant ([23]) par la méthode de Saksman (voir aussi [1]), et en donnerons une application.

Théorème 6.7 [Hedenmalm-Lindqvist-Seip] Les multiplicateurs de \mathcal{H}^2 s'identifient isométriquement à \mathcal{H}^{∞} . De façon plus précise, soit f une fonction complexe définie sur $\mathbb{C}_{1/2}$. Alors

$$fg \in \mathcal{H}^2 \quad \forall g \in \mathcal{H}^2 \Leftrightarrow f \in \mathcal{H}^{\infty}, \quad \text{et de plus } \|f\|_{\infty} = \sup_{\|g\|_2 \leq 1} \|fg\|_2.$$

Preuve : elle va nécessiter les deux lemmes qui suivent.

Lemme 6.8 Soit $f \in \mathcal{H}^\infty$ et $g \in \mathcal{H}^2$. Alors, $fg \in \mathcal{H}^2$ et

$$(6.12) \quad \|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2.$$

Preuve du Lemme 6.8: soit

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}, \quad (fg)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$$

puis soit $g_N(s) = \sum_{n=1}^N b_n n^{-s}$ et $(fg_N)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(N)} n^{-s}$ où N est un entier ≥ 1 . On applique l'identité de Carlson à $fg_N \in \mathcal{H}^\infty$. Pour $\varepsilon > 0$ donné:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n^{(N)}|^2 n^{-2\varepsilon} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(\varepsilon + it)|^2 |g_N(\varepsilon + it)|^2 dt \\ &\leq \|f\|_\infty^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |g_N(\varepsilon + it)|^2 dt = \|f\|_\infty^2 \sum_{n=1}^N |b_n|^2 n^{-2\varepsilon} \leq \|f\|_\infty^2 \|g\|_2^2. \end{aligned}$$

D'où $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n^{(N)}|^2 \leq \|f\|_\infty^2 \|g\|_2^2$ en faisant tendre ε vers 0 et en utilisant le lemme de Fatou. Il reste à remarquer que, pour chaque n fixé, on a

$$c_n^{(N)} = \sum_{\substack{ij=n, \\ j \leq N}} a_i b_j \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{ij=n} a_i b_j = c_n$$

et à réappliquer le lemme de Fatou.

Dans le lemme à venir, nous noterons, pour r entier ≥ 1 , N_r l'ensemble des entiers qui n'ont que des diviseurs premiers $\leq p_r$, le r -ième nombre premier. Et \mathcal{P}_r l'ensemble des polynômes de Dirichlet $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$ tels que $c_n \neq 0 \Rightarrow n \in N_r$.

Lemme 6.9 Pour chaque $s \in \mathbb{C}_0$ et chaque r entier ≥ 1 , il existe une constante $C_{s,r} > 0$ telle que

$$(6.13) \quad f \in \mathcal{P}_r \Rightarrow |f(s)| \leq C_{s,r} \|f\|_2.$$

Preuve du Lemme 6.9: soit $s = \sigma + it \in \mathbb{C}_0$ et $f(s) = \sum_{n \in N_r} c_n n^{-s} \in \mathcal{P}_r$. Une identité d'Euler tronquée montre que

$$C_{s,r} := \sum_{n \in N_r} n^{-2\sigma} = \prod_{j=1}^r (1 - p_j^{-2\sigma})^{-1} < \infty.$$

Cauchy-Schwarz donne maintenant

$$|f(s)| \leq \left(\sum_{n \in N_r} |c_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in N_r} n^{-2\sigma} \right)^{1/2} = C_{s,r} \|f\|_2.$$

Revenons à la preuve du Théorème 6.7. Soit f un multiplicateur de \mathcal{H}^2 . On note $M_f : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ l'opérateur de multiplication par f . On a $f \in \mathcal{H}^2$ car $f = M_f(1)$, et M_f est un opérateur borné par le théorème du graphe fermé. On note λ sa norme. Le Lemme 6.8 nous dit qu'une fonction $f \in \mathcal{H}^\infty$ est un multiplicateur, avec $\lambda \leq \|f\|_\infty$. La réciproque va s'établir en trois étapes.

Etape 1 ("Power trick"). On a $\lambda = \|f\|_\infty$ si f est un polynôme de Dirichlet. En effet, fixons r tel que $f \in \mathcal{P}_r$ et $s \in \mathbb{C}_0$. On voit de proche en proche que $\|f^k\|_2 \leq \lambda^k$ pour k entier ≥ 1 , puisque $f^k = M_f(f^{k-1})$ et $f^0 = 1$. Le Lemme 6.9, applicable à $f^k \in \mathcal{P}_r$, nous donne maintenant :

$$|f(s)|^k \leq C_{s,r} \|f^k\|_2 \leq C_{s,r} \lambda^k \quad \text{puis} \quad |f(s)| \leq \lambda (C_{s,r})^{1/k}.$$

En faisant tendre k vers l'infini, on obtient $|f(s)| \leq \lambda$ puis $\|f\|_\infty \leq \lambda$.

Etape 2.

Écrivons $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$. Soit $\psi \in E$ et $P(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \widehat{\psi}(\log n) n^{-s}$. Alors

$$(6.14) \quad \|M_P\| \leq \|M_f\| \times \|\psi\|_1 =: \lambda \|\psi\|_1.$$

Soit en effet, pour t réel, T_t l'opérateur de translation verticale par it défini par $T_t g(s) = g(s + it)$. Cet opérateur est une isométrie sur \mathcal{H}^2 et de plus $T_t f$ est encore un multiplicateur, avec $\|M_{T_t f}\| = \|M_f\|$. En effet, puisque $(T_t f)g = T_t(f(T_{-t}g))$, on a

$$\|(T_t f)g\|_2 = \|f(T_{-t}g)\|_2 \leq \|M_f\| \|T_{-t}g\|_2 = \|M_f\| \|g\|_2.$$

Maintenant, la formule de convolution verticale de Saksman s'écrit sous forme vectorielle (avec $\int = \int_{\mathbb{R}}$)

$$P = \int (T_t f) \psi(t) dt$$

d'où, si $g \in \mathcal{H}^2$, $Pg = \int (T_t f g) \psi(t) dt$ puis

$$\|Pg\|_2 \leq \int \|T_t f g\|_2 |\psi(t)| dt \leq \int \|M_f\| \|g\|_2 |\psi(t)| dt = \|M_f\| \|g\|_2 \|\psi\|_1$$

ce qui prouve (6.14)

Etape 3. Soit (ψ_j) une approximation de l'identité dans L^1 , par exemple $\widehat{\psi}_j(\xi) = (1 - \frac{|\xi|}{j})^+$. Et soit P_j le polynôme de Dirichlet correspondant :

$$P_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \widehat{\psi}_j(\log n) n^{-s} = \int (T_t f)(s) \psi_j(t) dt.$$

D'après les deux premières étapes, on a $\|P_j\|_{\infty} = \|M_{P_j}\| \leq \lambda$. Modulo extraction, on peut supposer, d'après le théorème de Montel, que P_j tend uniformément sur tout compact de \mathbb{C}_0 vers une fonction $F \in H^{\infty}(\mathbb{C}_0)$ avec $\|F\|_{\infty} \leq \lambda$. Soit maintenant $s = \sigma + it \in C_{1/2}$. Alors, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} < \infty$ et $\widehat{\psi}_j(\log n) \rightarrow 1$ quand $j \rightarrow \infty$, avec $0 \leq \widehat{\psi}_j(\log n) \leq 1$, donc

$$P_j(s) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = f(s),$$

ce qui donne $f(s) = F(s)$. Ainsi, $f \in \mathcal{D}$ puisque $f \in \mathcal{H}^2$. Et f se prolonge en une fonction analytique bornée par λ sur \mathbb{C}_0 , ce qui achève la démonstration. \square

7 Le Théorème des dilatées

Le but de ce paragraphe est de prouver le Théorème 4.1. On note $H = L^2(0, 1)$ et $(e_k)_{k \geq 1}$ la base orthonormale de H définie par $e_k(x) = \sqrt{2} \sin k\pi x$, ainsi que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ le développement de $\varphi \in H$ fixée. On dispose d'un opérateur de transfert unitaire $S : H \rightarrow \mathcal{H}^2$ défini par

$$S(f)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s} \quad \text{si} \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n.$$

Supposons d'abord que (φ_n) est une base de Riesz de H , nous disposons aussi d'un opérateur de Toeplitz $T_{\varphi} : H \rightarrow H$ défini par

$$T_{\varphi} f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \quad \text{si} \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \quad \text{avec} \quad \sum_{n \geq 1} |c_n|^2 < \infty.$$

Le lemme suivant exprime une relation utile d'entrelacement entre S et T_{φ} .

Lemme 7.1 Si (φ_n) est une base de Riesz de H , on a

$$(7.1) \quad S(T_\varphi f) = S\varphi Sf \text{ pour toute } f \in \mathcal{H}^2.$$

Preuve : si $f = \sum_{n \geq 1} c_n e_n$, on a

$$T_\varphi f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_{nk} \right) = \sum_{N=1}^{\infty} e_N \left(\sum_{nk=N} c_n a_k \right) = \sum_{N=1}^{\infty} e_N (a * c)_N$$

(où $*$ désigne la convolution de Dirichlet) si bien que

$$S(T_\varphi f) = \sum_{N=1}^{\infty} (a * c)_N N^{-s} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{-s} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s} \right) = S\varphi Sf$$

ce qui prouve (7.1). \square

Comme conséquence du Lemme 7.1, on voit que (écrivant $\|\cdot\|_2$ pour la norme dans $H = L^2(0, 1)$ et notant que $\|\varphi_n\|_2 = \|\varphi\|_2$)

$$\|S\varphi Sf\|_{\mathcal{H}^2} = \|S(T_\varphi f)\|_{\mathcal{H}^2} = \|T_\varphi f\|_2 \leq B\|\varphi\|_2 \|f\|_2 = B\|\varphi\|_2 \|Sf\|_{\mathcal{H}^2}$$

où B est la constante de Riesz supérieure de (φ_n) . Comme S est surjective, cela exprime que $S\varphi$ est un multiplicateur de \mathcal{H}^2 de norme $\leq B\|\varphi\|_2$. On a par un calcul analogue (écrivant $g = Sf$)

$$(7.2) \quad \|(S\varphi)g\|_{\mathcal{H}^2} \geq A\|\varphi\|_2 \|g\|_{\mathcal{H}^2} \quad \forall g \in \mathcal{H}^2$$

où A est la constante de Riesz inférieure de (φ_n) . Cela exprime que l'opérateur M de multiplication par $S\varphi$, $M : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ est injectif d'image fermée. Il est aussi surjectif, d'après la relation (7.1) et le fait que T_φ est surjectif, puisque les φ_n forment une *base* de Riesz. De plus, $S\varphi$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}_{1/2}$. En effet, si $S\varphi(\tau) = 0$ pour un $\tau \in \mathbb{C}_{1/2}$, les fonctions de l'image de la surjection $ST_\varphi S^{-1} : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ sont toutes orthogonales au noyau reproduisant K_τ , toujours d'après (7.1) (cette hypothèse de totalité des φ_n est essentielle : dans l'exemple de la remarque qui suit le théorème de Wintner, la fonction $S\varphi$ vérifie

$$\|S\varphi g\|_{\mathcal{H}^2} = \|g\|_{\mathcal{H}^2}$$

pour toute $g \in \mathcal{H}^2$ et pourtant a des zéros dans $\mathbb{C}_{1/2}$ dès que $|a| < 1/\sqrt{2}$). La relation (7.2) s'écrit aussi bien, puisque M est surjectif et puisque $S\varphi$ ne s'annule pas

$$(7.3) \quad \|g/S\varphi\|_{\mathcal{H}^2} \leq (A\|\varphi\|_2)^{-1} \|g\|_{\mathcal{H}^2} \quad \forall g \in \mathcal{H}^2.$$

Il en résulte que $1/S\varphi$ est un multiplicateur de \mathcal{H}^2 de norme $\leq (A\|\varphi\|_\infty)^{-1}$, ce qui achève, modulo le Théorème 6.7, la preuve de l'implication 2. \Rightarrow 1. du Théorème 4.1.

Supposons maintenant que $S\varphi$ et $1/S\varphi$ sont dans \mathcal{H}^∞ . Nous avons encore, désignant par $V \subset H$ l'espace vectoriel (non fermé) engendré par les e_n , la relation (7.1) pour $f \in V$, qui montre que

$$(7.4) \quad (\|1/S\varphi\|_\infty)^{-1}\|f\|_2 \leq \|T_\varphi f\|_2 \leq \|S\varphi\|_\infty\|f\|_2 \quad \forall f \in V.$$

D'autre part, (7.1) de nouveau montre que $T_\varphi : V \rightarrow H$ est d'image dense, puisque l'opérateur $M : SV \rightarrow \mathcal{H}^2$ de multiplication par $S\varphi$ est d'image dense sachant que $S\varphi$ et $1/S\varphi$ sont dans \mathcal{H}^∞ . Mais (7.4) et la densité de $T_\varphi(V)$ montrent que (φ_n) est une base de Riesz de H de constantes B et A vérifiant $B\|\varphi\|_2 \leq \|S\varphi\|_\infty$ et $(A\|\varphi\|_2)^{-1} \leq \|1/S\varphi\|_\infty$. Cela prouve l'implication 1. \Rightarrow 2. du Théorème 4.1.

Remarques. (1) Une version affaiblie du Théorème 4.1 a été obtenue dans ([20]) sous la forme suivante (cf.[37], p.25 pour la définition de presque-périodique)

Théorème 7.2 *Supposons que $S\varphi(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ se prolonge dans $\overline{\mathbb{C}_0}$ avec $S\varphi(it)$ presque-périodique sur \mathbb{R} au sens de Bohr. Alors, (φ_n) est une base de Riesz si et seulement si $1/S\varphi \in \mathcal{H}^2$ et*

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} |S\varphi(it)| > 0.$$

Mais il est remarqué dans [24] que cette forme est définitivement plus faible que le Théorème 4.1, avec l'exemple (dédit de la fonction intérieure singulière $z \mapsto e^{-(1+z)/(1-z)}$)

$$S\varphi(s) = \frac{1}{4} [3 + e^{-(1+2^{-s})/(1-2^{-s})}]$$

qui vérifie clairement $1/2 < |S\varphi(s)| < 1$ dans \mathbb{C}_0 , mais pour lequel $S\varphi(it)$ n'est même pas continue sur \mathbb{R} .

(2) Voici comment prouver une assertion gratuite de l'introduction. Supposons que $\varphi = \sum_{n=1}^\infty a_n e_n \in H$ et que $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ soit une *base orthonormale* de H . Nous pouvons écrire $e_1 = \sum_{k \geq 1} c_k \varphi_k$ avec $\sum |c_k|^2 < \infty$. D'où $e_n = \sum_{k \geq 1} c_k \varphi_{kn}$ puisque $e_n = (e_1)_n$. En particulier, si $n > 1$:

$$a_n = \langle \varphi, e_n \rangle = \langle \varphi_1, \sum_{k \geq 1} c_k \varphi_{kn} \rangle = \sum_{k \geq 1} \overline{c_k} \langle \varphi_1, \varphi_{kn} \rangle = 0$$

puisque $kn \geq n > 1$ et donc $\varphi_1 \perp \varphi_{kn}$. Il vient $\varphi = a_1 e_1$ avec $|a_1| = 1$.

8 Propriétés supplémentaires de \mathcal{H}^2

Les deux résultats suivants aident à l'étude des opérateurs de composition sur \mathcal{H}^2 du chapitre trois.

8.1 Représentation intégrale

Il est utile de disposer d'une formule de représentation intégrale pour la norme dans \mathcal{H}^2 , analogue à la formule de Parseval pour l'espace de Hardy H^2 du disque. Plusieurs telles formules existent, en particulier une formule de type Littlewood-Paley, valable aussi pour les espaces \mathcal{H}^p de séries de Dirichlet ([3], [4], [5]). La suivante, très élémentaire, suffira à nos besoins.

Théorème 8.1 *Soit $f(s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^2$, dont la série de Dirichlet converge uniformément sur \mathbb{C}_0 . Soit $u \in L^1(\mathbb{R})$ avec $u \geq 0$ et $\|u\|_1 = 1$, de dilatées $u_a(t) = \frac{1}{a}u(\frac{t}{a})$, $a > 0$. Alors*

$$\|f\|_{\mathcal{H}^2}^2 = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f(it)|^2 u_a(t) dt.$$

Preuve : la preuve formelle qui suit est valide si f est un polynôme de Dirichlet, i.e. $a_m = 0$ pour m grand. En effet, puisque $\widehat{u_a}(\xi) = \widehat{u}(a\xi)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(it)|^2 u_a(t) dt &= \sum_{m,n} a_m \overline{a_n} \int_{\mathbb{R}} (m/n)^{-it} u_a(t) dt = \sum_{m,n} a_m \overline{a_n} \widehat{u_a}(\log(m/n)) \\ &= \sum_{m,n} a_m \overline{a_n} \widehat{u}[a(\log m - \log n)] \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \|f\|_{\mathcal{H}^2}^2 \end{aligned}$$

d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Dans le cas général, soit $\varepsilon > 0$ et N_0 un entier tel que $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(it) - f_N(it)| \leq \varepsilon$ pour $N \geq N_0$, où l'on pose $f_N(s) = \sum_{n=1}^N a_n n^{-s}$. L'inégalité triangulaire et le fait que $\int_{\mathbb{R}} u_a(t) dt = 1$ donnent pour $N \geq N_0$, notant ici $\mu_a = u_a(t) dt$ et f, f_N pour $f(it), f_N(it)$:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\mu_a \right)^{1/2} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f - f_N|^2 d\mu_a \right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}} |f_N|^2 d\mu_a \right)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon + \left(\int_{\mathbb{R}} |f_N|^2 d\mu_a \right)^{1/2} \end{aligned}$$

d'où par ce qui précède

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\mu_a \right)^{1/2} \leq \varepsilon + \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon + \|f\|_{\mathcal{H}^2}.$$

On obtient de même pour $N \geq N_0$

$$\liminf_{a \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\mu_a \right)^{1/2} \geq -\varepsilon + \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \right)^{1/2}$$

et le résultat s'ensuit en faisant tendre N vers l'infini puis ε vers zéro. \square

8.2 Plongement local

Soit $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$ l'espace de Hardy du demi-plan $\mathbb{C}_{1/2}$, défini comme l'ensemble des fonctions h analytiques dans $\mathbb{C}_{1/2}$ pour lesquelles

$$(8.1) \quad \|h\|_{H^2(\mathbb{C}_{1/2})}^2 := \sup_{\sigma > 1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |h(\sigma + it)|^2 dt < \infty.$$

Chaque h dans $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$ a (théorème de Fatou) une limite non-tangentielle en presque chaque point de la droite verticale $\sigma = 1/2$, et la fonction limite correspondante $h \mapsto h(1/2 + it)$ est dans $L^2(\mathbb{R})$; la norme- L^2 de cette fonction coïncide avec la norme- H^2 définie par (8.1). Le résultat suivant, très utile, fait le lien entre $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$ et l'espace \mathcal{H}^2 ([34]). Il est basé sur une inégalité de Hilbert généralisée due à Montgomery et Vaughan ([33]) qui s'énonce comme suit :

Théorème 8.2 [Montgomery-Vaughan] Soit (λ_n) une suite discrète de réels distincts, et $\delta_n = \inf_{m \neq n} |\lambda_m - \lambda_n| > 0$, $n = 1, 2, \dots$. Alors, pour toute suite finie $(a_n)_{1 \leq n \leq N}$ de complexes, on a :

$$(8.2) \quad \left| \sum_{\substack{1 \leq m, n \leq N \\ m \neq n}} \frac{a_m \bar{a}_n}{\lambda_m - \lambda_n} \right| \leq C \sum_{n=1}^N \frac{|a_n|^2}{\delta_n},$$

où C est une constante numérique ($C = \frac{3}{2}$ convient). En conséquence, si $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$ est une série de Dirichlet uniformément convergente sur \mathbb{R} , on a uniformément par rapport à $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$

$$(8.3) \quad \int_a^b |S(t)|^2 dt \ll \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 (b - a + \delta_n^{-1})$$

Preuve : l'implication (8.2) entraîne (8.3) découle de

$$\int_a^b |S(t)|^2 dt = (b - a) \sum |a_n|^2 + \sum_{m \neq n} a_m \bar{a}_n \frac{e^{i(\lambda_m - \lambda_n)b} - e^{i(\lambda_m - \lambda_n)a}}{i(\lambda_m - \lambda_n)}$$

changeant a_m en $a_m e^{i\lambda_m b}$ ou $a_m e^{i\lambda_m a}$, de même module que a_m . \square

Nous pouvons maintenant énoncer le (cf. [34])

Théorème 8.3 [*Théorème de plongement*] Soit $f \in \mathcal{H}^2$. Alors, la fonction $F(s) = f(s)/s$ est dans l'espace de Hardy ordinaire $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$ et de plus

$$(8.4) \quad \|F\|_{H^2(\mathbb{C}_{1/2})}^2 \leq C \|f\|_{\mathcal{H}^2}^2$$

où C est une constante numérique. De façon équivalente: pour chaque $b > 0$, il existe une constante $C_b > 0$ telle que, si $f \in \mathcal{H}^2$

$$(8.5) \quad \int_{\mathbb{R}} |f(1/2 + ix)|^2 P_b(x) dx \leq C_b \|f\|_{\mathcal{H}^2}^2$$

où P_b est le noyau de Poisson de \mathbb{C}_0 en b , $P_b(x) = \frac{b}{\pi(b^2 + x^2)}$.

Preuve : notons que (8.4) implique, modulo le théorème de Fatou pour $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$, l'existence presque partout de la limite radiale

$$f(1/2 + ix) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(1/2 + \varepsilon + ix)$$

quand $f \in \mathcal{H}^2$. Montrons maintenant la forme (8.5). On note d'abord que (8.3) entraîne, prenant $\lambda_n = \log n$ et donc $\delta_n \approx 1/n$ et changeant a_n en $a_n n^{-1/2-\varepsilon}$ lorsque $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ et $\varepsilon > 0$:

$$\int_k^{k+1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-1/2-\varepsilon-ix} \right|^2 dx \leq C \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = C \|f\|_{\mathcal{H}^2}^2$$

où C est une constante numérique. Ensuite

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(1/2 + \varepsilon + ix)|^2 P_b(x) dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} |f(1/2 + \varepsilon + ix)|^2 P_b(x) dx \\ &\ll \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2 + 1} |f(1/2 + \varepsilon + ix)|^2 dx \ll \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2 + 1} \|f\|_{\mathcal{H}^2}^2 dx \ll \|f\|_{\mathcal{H}^2}^2 \end{aligned}$$

où les constantes impliquées ne dépendent que de b . Il reste à faire tendre ε vers zéro et à appliquer le théorème et le lemme de Fatou. \square

9 Propriétés supplémentaires de \mathcal{H}^∞

L'amélioration suivante du théorème de Bohr a été obtenue dans [38]

9.1 Un théorème de Bohr pour la partie réelle

Théorème 9.1 *Soit $f \in H(\mathbb{C}_0) \cap \mathcal{D}$ avec $\Re f > 0$. Alors, $\sigma_u(f) \leq 0$ et en particulier $\sigma_c(f) \leq 0$.*

Preuve : on rappelle le théorème de Herglotz ([18], p.17), disant que toute fonction h harmonique positive sur \mathbb{C}_0 s'écrit

$$(9.1) \quad h(\sigma + it) = c\sigma + \int_{\mathbb{R}} P_\sigma(t - \tau) d\mu(\tau)$$

où c est une constante ≥ 0 , μ une mesure positive telle que $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\tau)}{1+\tau^2} < \infty$ et P_σ le noyau de Poisson en $\sigma > 0$, déjà vu :

$$P_\sigma(v) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2 + v^2}.$$

Il est clair que

$$0 < \sigma \leq \theta \Rightarrow P_\sigma(v) \leq \frac{\theta}{\sigma} P_\theta(v) \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{R}.$$

Par (9.1), on en déduit une inégalité de Harnack précisée

$$(9.2) \quad h(\sigma + it) \leq \frac{\theta}{\sigma} h(\theta + it).$$

Maintenant, puisque $f \in \mathcal{D}$, f est bornée par une constante M dans un demi-plan \mathbb{C}_θ avec $\theta > 0$. Fixons $0 < \alpha < 1$ et appliquons (9.2) à la fonction harmonique positive $h = \Re f^\alpha$, qui vérifie de plus (sur \mathbb{C}_0)

$$|f|^\alpha \leq \frac{1}{\cos(\alpha\pi/2)} h =: C_\alpha h.$$

Nous obtenons, pour $0 < \sigma \leq \theta$, les inégalités

$$|f(\sigma + it)|^\alpha \leq C_\alpha h(\sigma + it) \leq C_\alpha \frac{\theta}{\sigma} h(\theta + it) \leq C_\alpha \frac{\theta}{\sigma} |f(\theta + it)|^\alpha \leq C_\alpha \frac{\theta}{\sigma} M^\alpha.$$

Ainsi, f est bornée dans C_ε pour tout $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Bohr shifté, on en déduit $\sigma_u(f) \leq \varepsilon$, puis $\sigma_u(f) \leq 0$ puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

□

9.2 Un théorème de Montel pour \mathcal{H}^∞

Le résultat suivant ([3]) constitue un remarquable renforcement du théorème classique de Montel sur les familles normales de fonctions holomorphes.

Théorème 9.2 [Bayart] *Soit (f_j) une suite de \mathcal{H}^∞ bornée en norme. Alors, cette suite contient une suite extraite convergeant uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{H}^\infty$ sur tout demi-plan \mathbb{C}_ε , $\varepsilon > 0$.*

Preuve : soit $f_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(j)} n^{-s}$. On sait que $|a_n^{(j)}| \leq \|f_j\|_\infty \leq C$ pour une certaine constante C . Par le procédé diagonal, modulo une extraction, on peut supposer que $a_n^{(j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a_n$ pour tout n avec $|a_n| \leq C$ et un argument de double limite montre que

$$s \in \mathbb{C}_1 \Rightarrow f_j(s) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} =: f(s).$$

Par le théorème usuel de Montel et modulo une autre extraction, $f_j \rightarrow g$ uniformément sur tout compact de \mathbb{C}_0 où $g \in H^\infty(\mathbb{C}_0)$, et on a $f = g$ sur \mathbb{C}_1 , ce qui montre que $f \in \mathcal{H}^\infty$. Reste à montrer que, pour $\varepsilon > 0$ fixé,

$$g_j(s) := f_j(s + \varepsilon) - f(s + \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(j)} - a_n) n^{-s-\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathcal{H}^\infty.$$

On pose

$$\Delta_n^{(j)}(s) = \sum_{k=1}^n (a_k^{(j)} - a_k) k^{-s} \text{ si } n \geq 1, \quad \Delta_0^{(j)}(s) = 0$$

et on voit que

$$|g_j(s)| \leq \sum_{n=1}^N |a_n^{(j)} - a_n| + \sum_{n>N} \left| (\Delta_n^{(j)} - \Delta_{n-1}^{(j)})(s) n^{-\varepsilon} \right|.$$

Mais $\|f_j - f\|_\infty \leq 2C$; la version "sommes partielles" du théorème de Bohr nous donne donc $\|\Delta_n^{(j)}\|_\infty \leq K \log n$ où K est une constante. Une transformation d'Abel donne alors

$$\|g_j\|_\infty \leq \sum_{n=1}^N |a_n^{(j)} - a_n| + \sum_{n>N} \frac{K\varepsilon \log n}{n^{1+\varepsilon}}.$$

D'où, à N fixé:

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \|g_j\|_\infty \leq \sum_{n>N} \frac{K\varepsilon \log n}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Il reste à faire tendre N vers l'infini. □

9.3 Compléments

Le lecteur trouvera d'autres compléments sur les espaces \mathcal{H}^2 et \mathcal{H}^∞ , par exemple la caractérisation par Seip des suites d'interpolation bornées de \mathcal{H}^∞ ou la convergence presque partout au bord de $\mathbb{C}_{1/2}$ de la série de Dirichlet d'une fonction de \mathcal{H}^2 , dans [37], chapitre 6.

References

- [1] A. Aleman, J. F. Olsen, and E. Saksman, *Fourier multipliers for Hardy spaces of Dirichlet series*, Int. Math. Res. Not. IMRN, to appear; doi: 10.1093/imrn/rnt080.
- [2] T. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer 1998.
- [3] F. Bayart, *Hardy spaces of Dirichlet series and their composition operators*, Monatsh. Math. **136** (2002), 203–236.
- [4] F. Bayart, *Compact composition operators on a Hilbert of Dirichlet series*, Illinois. J. Math. **47** (2003), 725–743.
- [5] F. Bayart, H. Queffélec, K. Seip *Approximation numbers of composition operators on H^p spaces of Dirichlet series* (2014), submitted .
- [6] B. Berndtsson, S.-Y. Chang, and K.-C. Lin, *Interpolating sequences in the polydisc*, Trans. Amer. Math. Soc. **302** (1987), 161–169.
- [7] R.P. Boas Jr., *A general moment problem*, Amer.J.Math. **63** (1941), 361–370.
- [8] R. Balasubramanian, B. Calado, H. Queffélec, *The Bohr inequality for ordinary Dirichlet series*, Studia Math. **175** (2006), 285–304.
- [9] H. Bohr, *Über die gleichmässige Konvergenz Dirichletscher Reihen*, J.Reine Angew.Math. **143** (1913), 203–211.
- [10] D.G. Bourgin, C.W. Mendel, *Orthonormal sets of periodic functions of the type $f(nx)$* , Transactions of the American Mathematical Society, vol.57 **3** (1945), 332–363.
- [11] J.F. Burnol, Personal Communication.
- [12] C. Cowen, B. McCluer, *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1995.

- [13] B. Carl and I. Stephani, C.Cowen, B.McCluer, *Entropy, Compactness and the Approximation of Operators*, Cambridge Tracts in Mathematics **98**, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [14] H.Davenport, *On some infinite series involving arithmetical functions*, Quart.J.Math., Oxf.Ser., **8** (1937), 313–320.
- [15] Ph.Davis, *Interpolation and Approximation*, New-York: Blaisdell,1963.
- [16] S.E.Ebenstein, *Some H^p spaces which are uncomplemented in L^p* , Pacific.Journ.Math.43 **2** (1972), 327–339.
- [17] C.Finet, H.Queffélec, A.Volberg, *Compactness of composition operators on a Hilbert space of Dirichlet series*, Journ. Funct.Anal. **211** (2004), 271–287.
- [18] J.Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Revised First Edition, Springer 2007.
- [19] J.Gordon, H. Hedenmalm, *The composition operators on the space of Dirichlet series with square-summable coefficients*, Michigan Math. J. **46** (1999), 313–329.
- [20] R.Gosselin, J.Neuwirth, *on Paley-Wiener bases*, J.Math.Mech.**18** (1968), 871-879.
- [21] H.Hardy, M.Riesz, *The general theory of Dirichlet series*, Second Edition, Dover Phenix Editions, 2005.
- [22] H.Hardy, M.Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Clarendon Press 1979.
- [23] H. Hedenmalm, P. Lindqvist, and K. Seip, *A Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in $L^2(0, 1)$* , Duke Math. J. **86** (1997), 1–37.
- [24] H. Hedenmalm, P. Lindqvist, and K. Seip, *Addendum to "a Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in $L^2(0, 1)$ "*, Duke Math. J. **99** (1999), 175–178.
- [25] B.Hollenbeck, I.Verbitsky, *Best constants for the Riesz projection*, Journ.Funct.Anal. **275** (2000),370–392.
- [26] K.Seip, Personal Communication.

- [27] P. Lindqvist, K. Seip, *Note on some greatest common divisor matrices*, Acta Arithmetica **84** (1998), 149–154.
- [28] D.Li, Communication Orale.
- [29] D. Li, H. Queffélec, *Introduction à l'étude des espaces de Banach. Analyse et Probabilités*, Cours spécialisés de la SMF **12** (2004).
- [30] D. Li, H. Queffélec, and L. Rodriguez-Piazza, *On approximation numbers of composition operators*, J. Approx.Theory. **164** (2012), 431–459.
- [31] A.Marcus, D.Spielman, N.Srivastava, *Interlacing families II: Mixed characteristic polynomials and the Kadison-Singer problem*, arXiv:1306.3969v3 [math.CO]
- [32] A.V.Megretskii, V.V.Peller, S.R.Treil, *The inverse spectral problem for self-adjoint Hankel operators*, Acta Math. **174** (1995), 241–309.
- [33] H.Montgomery, B.Vaughan, *Hilbert's inequality*, J. London Math. Soc. **2** (1974), 73–82.
- [34] J.F.Olsen, K.Seip, *Local interpolation in Hilbert spaces of Dirichlet series*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 203–212.
- [35] V.V.Peller, *Hankel Operators and their applications*, Springer 2003.
- [36] G.Polya, G.Szegö, *Problems and Theorems in Analysis I*, Springer 1972.
- [37] M. Queffélec, H. Queffélec, *Diophantine Approximation and Dirichlet Series*, HRI Lecture Notes Series-2, Hindustan Book Agency, 2013.
- [38] H. Queffélec, K. Seip, *Approximation numbers of composition operators on the H^2 space of Dirichlet series*, arXiv:1302.4117, 2013.
- [39] O.Ramaré, Personal Communication.
- [40] E.Saksman, *Oslo special year Operator related function theory and Time-Frequency Analysis* (2012-2013), Private Communication.
- [41] J.Shapiro, *Composition operators and Classical Function Theory*, Springer-Verlag, 1993.
- [42] H.Shapiro, A.Shields, *On some interpolation problems for analytic functions*, Amer.J.Math.**83** (1961), 513-532.

- [43] D.Werner, *Funktionalanalysis*, sixth edition, Springer 2007.
- [44] R.Young, *An Introduction to nonharmonic Fourier series*, Academic Press, 1980.