Table des matières

Séries de Dirichlet : une introduction

1. Séries de Dirichlet, l'exemple des séries de type zéta

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres positifs ou nuls strictement croissante. Une *série de Dirichlet* de type $\lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ (cette suite est dite *suite des exposants*) est une série S de fonctions entières du type

$$S = \sum_{n\geq 1} a_n\, e^{-\lambda_n z}.$$

La suite des nombres complexes $(a_n)_{n\geq 1}$ est dite *suite des coefficients* de la série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$.

EXAMPLE 1 (les séries de type zéta). Si la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est la suite $(\log(n))_{n\geq 1}$ est si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres complexes arbitraire, la série de Dirichet

$$\sum_{n\geq 1} a_n e^{-(\log n)\, z} = \sum_{n\geq 1} a_n\, n^{-z}$$

est dite *série de Dirichlet de type zéta*. On peut introduire (pour modifier la liste $(a_n)_{n\geq 1}$ des coefficients) le groupe dual du groupe multiplicatif discret $(\mathbb{Q}^{+*}, \times)$. La donnée d'un homomorphisme $\varpi\ : (\mathbb{Q}^{+*}, \times) \to (\mathbb{T}, \times)$ équivaut (d'après le théorème fondamental de l'arithmétique) à la donnée de la liste des nombres complexes de module un $\{\varpi(p_\iota) = e^{i\theta_\iota}\}_\iota$, où $\{p_\iota\}_\iota$ décrit la liste des nombres premiers $\{2, 3, ...\}$; on pose en effet, étant donnée une telle suite infinie $(\varpi_\iota = e^{i\theta_\iota})_\iota$ de nombres complexes de module 1, pour tout $x \in \mathbb{Q}^{+*}$,

$$\varpi(x) = \prod_\iota \varpi_\iota^{\nu_x(p_\iota)},$$

où $\nu_x(p_\iota) \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ dénote la valuation p-adique de x ($\|x\|_{p_\iota} = p_\iota^{-\nu_x(p_\iota)}$), ce qui définit χ de manière unique. Le groupe $(\mathbb{Q}^{+*}, \times)^*$ s'identifie au groupe compact des caractères multiplicatifs $\chi\ : \mathbb{N}^* \to \mathbb{T}$, c'est-à-dire des applications χ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{T}$ vérifiant $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ (on pose $\chi_\varpi(m) = \prod_\iota \varpi_\iota^{\nu_m(p_\iota)}$, ce qui permet d'identifier ϖ au caractère χ_ϖ). Ce groupe dual (compact) est le *polycercle unité (de $\mathbb{C}^{\{p_\iota\}_\iota}$) de Bohr* que l'on notera $\mathbb{T}^\infty$ (on notera $\mathbb{D}^\infty$ le polydisque, dit *polydisque de Bohr*, dont ce polycercle est la frontière de Shilov). Étant donné un point χ du *polycercle de Bohr* et une série de Dirichlet $S = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-z}$ de type zéta, on définit une nouvelle série de Dirichlet S_χ de type zéta par

$$S_\chi = \sum_{n\geq 1} \chi(n)\, a_n n^{-z} = \sum_{n\geq 1} a_n \prod_{\iota=1}^{\infty} \left[p_\iota^{-z}\chi(p_\iota)\right]^{\nu_n(p_\iota)} = \sum_{n\geq 1} a_n \prod_{\iota=1}^{\infty} \|n\|_{p_\iota}^{z} \left[\chi(p_\iota)\right]^{\nu_n(p_\iota)}.$$

La clause de multiplicativité imposée à χ est importante : par exemple la série de Riemann alternée

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\,n^{-z}$$

ne s'exprime pas comme une série S_χ à partir de la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} n^{-z}$: il faudrait trouver un caractère χ à valeurs dans $\{-1,1\}$ tel que $\chi(n)=1$ si n est pair et $\chi(n)=-1$ si n est impair ; or le produit de deux nombres impairs reste impair, tandis que $(-1)\times(-1)=1$. On peut envisager le point χ du polydisque de Bohr sous l'angle stochastique : au lieu des nombres déterministes $\chi(p_\iota)$ (coordonnées d'un point du polycercle $\mathbb{T}^\infty$ de Bohr), on peut envisager les coordonnées $\chi(p_\iota)$ de ce point comme des variables aléatoires $\boldsymbol{\chi}_{p_1}, \boldsymbol{\chi}_{p_2}, \ldots$, toutes définies sur le même espace de probabilité, à valeurs dans $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, mutuellement indépendantes.

Definition 2 (transformation de Mellin [1] d'une série de Dirichlet). Soit une série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$. Sa transformée de Mellin $\mathcal{M}[f]$ est par définition la série de Dirichlet

$$\mathcal{M}[f](z)=\sum_{n\geq 1} a_n e^{-e^{\lambda_n} z}.$$

Example 3. La transformée de Mellin d'une série de Dirichlet de type zéta est une série de Dirichlet du type :

$$\mathcal{M}\big[\sum_{n\geq 1} a_n n^{-z}\big]=\sum_{n\geq 1} a_n e^{-nz}.$$

Il s'agit donc d'une série entière en w (de terme constant nul), dans laquelle on a opéré la substitution $w=e^{-z}$.

2. L'abscisse de convergence simple

Soit $f=\sum_{n\geq 1} a_n\, e^{-\lambda_n z}$ une série de Dirichlet. Dans cette section, nous nous intéressons à la description des ouverts maximaux de convergence pour la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$.

Pour les séries entières, on rappelle le lemme fondamental d'Abel :

Lemma 4 (lemme d'Abel). *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. Si cette série de fonctions $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge en un point z_0 du plan complexe, elle converge :*

— *simplement dans tout le disque ouvert $D(0,|z_0|)$;*

— *uniformément dans tout compact*

$$K(z_0,\kappa)=\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z-z_0|\leq \kappa\,\big||z_0|-|z|\big|\}\quad(\kappa\geq 1)$$

du disque fermé de centre 0 et de rayon $|z_0|$.

Démonstration. — La première assertion de ce lemme résulte du critère de Cauchy pour la convergence des séries entières : si

$$R:=1/\limsup_{n\to+\infty}|a_n|^{1/n}\in[0,+\infty], \tag{1}$$

1. On justifiera plus loin (à la section 5.4) la relation avec la transformation de Mellin $f\to\mathcal{M}[f]$ définie formellement par

$$\mathcal{M}[f]\ :\lambda\longmapsto\int_{\mathbb{R}^{+*}} t^{\lambda-1}\,f(t)\,dt=\int_{\mathbb{R}^{+*}} e^{-\lambda\tau}f(e^{-\tau})\,d\tau.$$

si $f\ :\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{C}$ désigne une fonction numérique ; la fonction méromorphe Γ est par exemple la transformée de Mellin de $t\in\mathbb{R}^{+*}\longmapsto e^{-t}$.

la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge pour tout $z \in D(0,R)$ et diverge pour tout z tel que $|z| > R$.

— La seconde assertion de ce lemme résulte de la formule d'intégration par parties discrète (aussi appelée *règle d'Abel*) :

LEMMA 5 (formule d'intégration par parties discrète). *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres complexes.*
Posons $\forall m, m', p \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \leq p$ et $m < m'$:

$$A_{m,p} = \sum_{n=m}^{p} a_n, \;\; S_{m,m'} = \sum_{n=m}^{m'} a_n b_n$$

Alors :

$$S_{m,m'} = A_{m,m'} b_{m'} + \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n}(b_n - b_{n+1})$$

DÉMONSTRATION. Soient m et m' des entiers naturels tels que l'on ait $1 \leq m < m'$. Remarquons que pour tout n dans $[m, m']$, on a $a_n = A_{m,n} - A_{m',n-1}$. On en déduit, au moyen d'un changement d'indexation :

$$\begin{aligned} S_{m,m'} &= \sum_{n=m}^{m'} (A_{m,n} - A_{m,n-1}) b_n = \sum_{n=m}^{m'} A_{m,n} b_n - \sum_{n=m}^{m'} A_{m,n-1} b_n \\ &= \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n} b_n + A_{m,m'} b_{m'} - \sum_{n=m}^{m'} A_{m,n-1} b_n \\ &= A_{m,m'} b_{m'} + \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n} b_n - \sum_{n=m-1}^{m'-1} A_{m,n} b_{n+1} \\ &= A_{m,m'} b_{m'} + \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n}(b_n - b_{n+1}). \end{aligned}$$

□

Pour prouver la seconde assertion, on factorise

$$a_n z^n = a_n z_0^n \times (z/z_0)^n$$

et on valide le critère de Cauchy uniforme pour la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ dans $K(z_0, \kappa)$ en exploitant préciément la règle d'intégration par parties d'Abel.

Le lemme d'Abel sur les séries entières est ainsi démontré. □

Pour les séries de Dirichlet, ce lemme d'Abel 4 subsiste.

LEMMA 6 (lemme d'Abel pour les séries de Dirichlet). *Soit $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ une série de Dirichlet. Si cette série de fonctions converge simplement en un point $z_0 \in \mathbb{C}$, alors elle converge*

— *simplement dans tout le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, z_0\}$;*

— *uniformément dans tout secteur conique*

$$\Gamma(z_0,\gamma) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_0| \leq \gamma(\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z_0)\} \quad (\gamma \geq 1).$$

Démonstration. La preuve est identique à celle du résultat dans le cadre des séries entières. On factorise

$$a_n e^{-\lambda_n z} = e^{-\lambda_n (z-z_0)} \times e^{-\lambda_n z_0}$$

(lorsque la série de Dirichlet S converge simplement en z_0). □

On introduit ainsi l'abscisse x_c de simple convergence d'une série de Dirichlet. Cette abscisse est définie par

$$x_c := \inf\{x \in \mathbb{R}\,;\, \sum_{n\geq 1} a_n x^n \text{ converge simplement}\} \in [-\infty, +\infty]. \tag{2}$$

Si $x_c < +\infty$, le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\, z > x_c\}$ est dit demi-plan de convergence (simple) de la série de Dirichlet.

L'abscisse de convergence simple x_c d'une série de Dirichlet se calcule via une paire de formules constituant le pendant de la règle de Cauchy (1) exprimant le rayon de convergence d'une série entière.

Theorem 7 (règle de Cahen, 1894). *Soit $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ une série de Dirichlet. On dispose des deux règles suivantes permettant de calculer l'abscisse de convergence simple x_c.*

(1) Si

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log |\sum_{k=1}^{n} a_k|}{\lambda_n} = l > 0, \tag{3}$$

alors $x_c = l$; sinon $x_c \in [-\infty, 0]$.

(2) Si $x_c < 0$, on a

$$x_c = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log |\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k|}{\lambda_{n+1}}. \tag{4}$$

Remarque 8 (≪ procédure de décision de Cahen ≫). Le couplage de ces règles fournit (malheureusement seulement théoriquement) un procédé algorithmique pour calculer l'abscisse de convergence simple d'une série de Dirichlet . On commence par effectuer le premier test, à savoir calculer la limite supérieure (3). Si le nombre obtenu (dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$) est strictement positif, on obtient bien la valeur x_c. Sinon, à condition toutefois que la série numérique $\sum_{k\geq 1} a_k$ soit convergente, on effectue le second test ; si le résultat de ce test donne une valeur strictement négative, alors la valeur retournée est bien celle de x_c ; sinon, on peut en conclure que $x_c = 0$. Reste le cas litigieux : celui où le premier test donne une valeur ≤ 0, mais où la série $\sum_{k\geq 1} a_k$ diverge ; dans ce cas, il est impossible que $x_c < 0$ et l'on a donc $x_c = 0$.

Remarque 9 (la formule de Kojima (1914)). Une autre version de la formule de Cahen a été proposée par Kojima. On a en fait la formule suivante

$$x_c = \limsup_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \log \Big| \sum_{\{k\,;\, E[x]\leq \lambda_k \leq x\}} a_k \Big|.$$

Cette formule pourra s'avérer utile.

PREUVE DU PREMIER VOLET. On suppose tout d'abord $l \leq 0$. De par la définition de $\limsup$, on a : $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a :

$$\frac{1}{\lambda_n} \log \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq l + \epsilon,$$

c'est-à-dire

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq e^{\lambda_n (l+\epsilon)}.$$

En prenant $\epsilon = -l/2 > 0$, on a ainsi, pour n assez grand,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq e^{\lambda_n l/2}$$

avec $\lambda_n l/2 < 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n l/2 = -\infty$, ce qui nous assure bien la convergence de la série de terme général a_n, la somme de cette série valant 0. Ainsi on a convergence de la série de Dirichlet en 0, ce qui implique que $x_c \leq 0$.

On suppose maintenant que $l \geq 0$. On a toujours $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq e^{\lambda_n (l+\epsilon)}.$$

Soit $x > 0$ tel que $x > l + 2\epsilon$. Pour $q \geq p \geq 1$ on a (grçe au lemme d'Abel 5) :

$$\sum_{k=p}^{q} a_k e^{-\lambda_k x} = \sum_{k=p}^{q-1} A_k (e^{-\lambda_k x} - e^{-\lambda_{k+1} x}) - A_{p-1} e^{-\lambda_p x} + A_q e^{-\lambda_q x}$$

avec $A_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_j$. Or pour p assez grand ($p \geq n_0 + 1$) on a $\forall k \geq p - 1$:

$$|A_k| \leq e^{\lambda_k (l+\epsilon)}.$$

Ainsi cela nous permet de dire que pour p assez grand on a, pour tout $q > p$,

$$\left| \sum_{k=p}^{q} a_k e^{-\lambda_k x} \right| \leq \sum_{k=p}^{q-1} e^{\lambda_k (l+\epsilon)} (e^{-\lambda_k x} - e^{-\lambda_{k+1} x}) + e^{\lambda_{p-1} (l+\epsilon)} e^{-\lambda_p x} + e^{\lambda_q (l+\epsilon)} e^{-\lambda_q x}$$

Or

$$x \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-tx} dt = e^{-\lambda_k x} - e^{-\lambda_{k+1} x}.$$

Ainsi on a, pour p assez grand (supérieur ou égal à $n_0 + 1$) et $q > p$,

$$\left| \sum_{k=p}^{q} a_k e^{-\lambda_k x} \right| \leq \sum_{k=p}^{q-1} e^{\lambda_k (l+\epsilon)} \Big(x \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-tx} dt \Big) + e^{(l+\epsilon)\lambda_{p-1} - \lambda_p x} + e^{(l+\epsilon)\lambda_q - \lambda_q x},$$

et donc :

$$\left| \sum_{k=p}^{q} a_k e^{-\lambda_k x} \right| \leq x \sum_{k=p}^{q-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{(l+\epsilon-x)t} dt + e^{(l+\epsilon)\lambda_{p-1} - \lambda_p x} + e^{(l+\epsilon)\lambda_q - \lambda_q x}.$$

Comme $x > l + 2\epsilon$, on a $l + \epsilon - x < -\epsilon$, de plus $\lambda_{p-1} \leq \lambda_p$ (car la suite est croissante), on obtient :

$$\left|\sum_{k=p}^{q} a_k e^{-\lambda_k x}\right| \leq x \sum_{k=p}^{q-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-\epsilon t} dt + e^{-\lambda_p \epsilon} + e^{-\lambda_q \epsilon}.$$

Enfin, du fait que $e^{-\lambda_q \epsilon} \leq e^{-\lambda_p \epsilon}$ car $p \leq q$ et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ croissante, on a, pour p assez grand :

$$\left|\sum_{k=p}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k x}\right| \leq x \int_{\lambda_p}^{\infty} e^{-\epsilon t} dt + 2e^{-\epsilon \lambda_p}$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ on peut rendre le terme de droite aussi petit que l'on veut (en choisissant p assez grand, plus grand en tout cas que le premier choix $p \geq n_0+1$), et ainsi prouver que la série qu'on étudie est de Cauchy, donc convergente. Ainsi on a convergence de la série de Dirichlet en $z = x + iy$ dès que $x > l + 2\epsilon$, ce pour tout $\epsilon > 0$, ce qui implique :

$$x_c \leq l.$$

Si en particulier $l = 0$, on a bien $x_c \leq 0$.

On va désormais supposer $l > 0$ et montrer que $x_c \geq l$. Pour cela on suppose que z_0 est un point de partie réelle strictement positive où la série de Dirichlet converge. On note K un majorant des sommes partielles de cette série convergente. On utilise encore une fois le lemme d'Abel :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\lambda_k z_0} e^{\lambda_k z_0}\right| \leq K \sum_{k=1}^{n} (e^{\lambda_{k+1}\mathrm{Re}(z_0)} - e^{\lambda_k \mathrm{Re}(z_0)}) + K e^{\lambda_n \mathrm{Re}(z_0)} \\ &= 2K e^{\lambda_n \mathrm{Re}(z_0)} - K e^{\lambda_1 \mathrm{Re}(z_0)},\end{aligned}$$

d'où :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq 2K e^{\lambda_n \mathrm{Re}(z_0)}.$$

Ainsi, de par la définition de l, on a :

$$l \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \log(2K e^{\lambda_n \mathrm{Re}(z_0)}) = \limsup_{n\to\infty} \log\left((2K)^{\frac{1}{\lambda_n}} e^{\mathrm{Re}(z_0)}\right).$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$, on a enfin que :

$$l \leq \log\left(e^{\mathrm{Re}(z_0)}\right) = \mathrm{Re}(z_0).$$

Ainsi, dès que la série de Dirichlet converge en un point d'abscisse strictement positive, l est inférieur ou égal à l'abscisse de ce point, ce qui par définition de x_c nous donne alors $l \leq x_c$. Comme $x_c \leq l$ et que $l \leq x_c$, on a bien $x_c = l$ dans ce cas $(l > 0)$. □

PREUVE DU SECOND VOLET. On note

$$l' = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k|}{\lambda_{n+1}}.$$

Si l'on a $l' > 0$, on peut construire une sous suite d'entiers telle que

$$\frac{\log\Big|\sum\limits_{k=n_p+1}^{\infty} a_k\Big|}{\lambda_{n_p+1}} > \frac{l'}{2} .$$

Ceci implique

$$\Big|\sum_{k=n_p+1}^{\infty} a_k\Big| \geq e^{\frac{l'\lambda_{n_p+1}}{2}} ,$$

et donc la série de Dirichlet diverge en 0 car son terme général ne tend pas vers 0. On aurait donc $x_c > 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Supposons que la série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ converge en un point x_0 réel strictement négatif. Ceci signifie que la série numérique $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z_0}$ converge et en particulier que la suite de terme général

$$r_n(x_0) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z_0}$$

tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent, pour p assez grand, on a $|r_k(x_0)| \leq 1$ pour tout $k \geq p$. On peut à nouveau utiliser Abel et écrire, si $q > p$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=p+1}^{q} a_k &= (r_p(x_0) - r_{p+1}(x_0))e^{\lambda_{p+1}x_0} + \cdots + (r_{q-1}(x_0) - r_q(x_0))e^{\lambda_q x_0} = \\ &= r_p(x_0)e^{\lambda_{p+1}z_0} - \sum_{k=p+1}^{q-1} r_k(x_0)(e^{\lambda_k x_0} - e^{\lambda_{k+1}x_0}) - r_q(x_0)e^{\lambda_q x_0} .\end{aligned}$$

On a donc l'estimation

$$\Big|\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k\Big| \leq 2e^{\lambda_{p+1}x_0} .$$

Ceci implique (en prenant le logarithme des deux membres) que $l' \leq x_0$. Ainsi on a toujours $l' \leq x_c$ lorsque $x_c \leq 0$.

Si $x_c < 0$, on a, d'après ce qui précède, $l' < 0$. On se donne ϵ strictement positif, tel que $l' + 2\epsilon$ reste strictement négatif et l'on considère x de partie réelle strictement négative et au moins égale à $l' + 2\epsilon$. On a, pour p assez grand, pour tout $k \geq p$,

$$\Big|\sum_{k+1}^{\infty} a_k\Big| \leq e^{(l'+\epsilon)\lambda_{k+1}} .$$

On note $r_k = a_{k+1} + \cdots$. On reprend la méthode d'Abel pour estimer, si $q > p$ et p est assez grand

$$\Big|\sum_{k=p+1}^{q} a_k e^{-\lambda_k x}\Big| .$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=p+1}^{q} a_k e^{-\lambda_k x} &= (r_p - r_{p+1})e^{-\lambda_{p+1}x} + \cdots + (r_{q-1} - r_q)e^{-\lambda_q x} = \\ &= r_p e^{-\lambda_{p+1}x} + \sum_{k=p+1}^{q-1} r_k(e^{-\lambda_{k+1}x} - e^{-\lambda_k x}) - r_q e^{-\lambda_q x} .\end{aligned}$$

Si l'on utilise l'estimation $r_k \le e^{(l'+\epsilon)\lambda_{k+1}}$ pour $k \ge p$ et p assez grand, on trouve

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=p+1}^{q} a_k e^{-\lambda_k x}\Big| &\le e^{-\lambda_{p+1}(x-l'-\epsilon)} + x\sum_{k=p+1}^{k=q-1} e^{(l'+\epsilon)\lambda_{k+1}} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-tx}dt + e^{\lambda_{q+1}(l'+\epsilon)-\lambda_q x}\\ &\le e^{-\lambda_{p+1}(x-l'-\epsilon)} + x\sum_{k=p+1}^{k=q-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-t(x-l'-\epsilon)}dt + e^{-\lambda_{q+1}(x-l'-\epsilon)}\\ &\le e^{-\lambda_{p+1}x} + x\int_{\lambda_{p+1}}^{\infty} e^{-\epsilon t}dt + e^{-\lambda_{q+1}\epsilon}\,.\end{aligned}$$

Lorsque p tend vers l'infini, cette quantité tend vers 0 et on a donc prouvé la convergence en x de la série de Dirichlet. Ceci nous prouve donc que $l' \ge x_c$ et achève la preuve. □

Example 10 (application aux séries zéta). L'abscisse de convergence d'une série de type zéta

$$\sum_{n\ge 1} \chi(n)\, a_n n^{-z}$$

(où la suite $(a_n)_{n\ge 1}$ est dans $\ell^p(\mathbb{N}^*)$ et χ est un point du polycercle $\mathbb{T}$ de Bohr) est inférieur ou égal à $1/q = 1-1/p$. En effet, on observe en utilisant l'inégalité de Hölder que $|\sum_{k=1}^n \chi(k)\, a_k| \le \|a\|_p n^{1/q}$. On en déduit

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log|\sum_{k=1}^n \chi(k) a_k|}{\log n} \le 1/q.$$

D'après le premier volet du théorème 7, on a donc bien $x_c \le 1/q$.

3. Les abscisses de convergence uniforme ou bornée

Après avoir introduit l'abscisse de convergence x_c d'une série de Dirichlet, on introduit les abscisses x_u dite de convergence uniforme et x_c de convergence bornée.

Definition 11 (abscisses de convergence uniforme et de convergence bornée). L'abscisse x_u de convergence uniforme de la série de Dirichlet $\sum_{n\ge 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ est définie comme

$$x_u := \inf\big\{x\in\mathbb{R}\,;\ \sum_{n\ge 1} a_n e^{-\lambda_n z} \text{ converge uniformément dans } \Pi_x^+ = \{z\,;\ \mathrm{Re}\, z > x\}\big\}.$$

L'abscisse x_b de convergence bornée [2] de la série de Dirichlet $\sum_{n\ge 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ est définie comme

$$x_b := \inf\big\{x\in\mathbb{R}\,;\ \sum_{n\ge 1} a_n e^{-\lambda_n z} \text{ converge dans } \Pi_x^+ \text{ vers une fonction bornée dans } \Pi_x^+\big\}.$$

On a toujours $x_c \le x_b \le x_u$.

L'abscisse de convergence uniforme se calcule par une règle similaire à la règle de Cahen, sur laquelle on greffe une clause d'uniformité.

Proposition 1 (règle de Cahen pour l'abscisse de convergence uniforme). *L'abscisse de convergence uniforme x_u se calcule suivant les deux règles suivantes :*

2. Introduite par Bohr dans sa thèse en 1905.

— *Si*
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log \| \sum_{k=1}^n a_k e^{-i\lambda_k \theta}\|_{\infty,\mathbb{R}_\theta}}{\lambda_n} = l > 0,$$
alors $x_u = \ell$ *; sinon* $x_u \in [-\infty, 0]$.

— *Si* $x_u < 0$*, on a*
$$x_u = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log \| \sum_{k\geq n+1} a_k e^{-i\lambda\theta}\|_{\infty,\mathbb{R}_\theta}}{\lambda_{n+1}}.$$

On dispose aussi de la formule de Kunieda (1916), pendant de la formule de Kojima :
$$x_u = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \log \| \sum_{\{k\,;\,[x]\leq\lambda_k\leq x\}} a_k\, e^{-i\lambda\theta}\|_{\infty,\mathbb{R}_\theta}.$$

Theorem 12 (Bohr). *Pour une série de Dirichlet* $\sum_{n\geq1} a_n n^{-z}$*, les abscisses* x_u *et* x_b *coïncident.*

Démonstration. (voir par exemple [**Ort**]). Il suffit de prouver $x_u \leq x_b$. Supposons que la série de Dirichlet $\sum_{n\geq1} a_n n^{-z}$ converge vers une fonction bornée dans un demi-plan droit Π_x^+ (ce qui équivaut à supposer $x > x_b$). Un résultat de Balasubramanian, Calado, Queffélec (voir l'exemple 16 plus loin) assure que
$$\sup_{z\in\Pi_x^+} \Big|\sum_{n=1}^N a_k k^{-z}\Big| \leq C\, \log(N+1)\, \sup_{\Pi_x^+}|f|$$
(avec C constante absolue) si f désigne la somme de la série de Dirichlet. Pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on écrit, si
$$S_M(z) = \sum_{n=1}^M a_n\, n^{-z} \quad (M \in \mathbb{N}^*),$$
$$\sum_{n=p+1}^{p+N} a_n n^{-z-\epsilon} = \sum_{n=p+1}^{p+N-1} S_n(z)(n^{-\epsilon} - (n+1)^{-\epsilon}) + N^{-\epsilon} S_{p+N}(z).$$
Comme $\log N = o(N^\epsilon)$, le critère de Cauchy uniforme est satisfait pour la série $\sum_{n\geq1} a_n n^{-z}$ dans $\Pi_{x+\epsilon}^+$. On a donc $x + \epsilon \geq x_u$. Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on a $x \geq x_u$. Ceci est vrai pour tout $x > x_b$, donc $x_b \geq x_u$. □

4. L'abscisse de concergence absolue

C'est la plus grande de toutes les abscisses de convergence : on la définit par
$$x_a = \inf\{x \in \mathbb{R}\,;\, \sum_{n\geq1}^{\infty} |a_n|\, e^{-\lambda_n x} < +\infty\}.$$

On note bien sûr que $x_a \geq x_b \geq x_u \geq x_c$. Si $x > x_a$, la somme de la série de Dirichlet $\sum_{n\geq1} a_n e^{-\lambda_n z}$ est bornée par $\sum_{n\geq1} |a_n| e^{-\lambda_n x}$ dans Π_x^+.

Les abscisses x_a et x_c diffèrent en général, ce qui constitue un nouveau point où la théorie des séries entières et celle des séries de Dirichlet divergent. Par exemple, pour la série
$$\sum_{n\geq1} (-1)^{n-1} n^{-z},$$

on observe que $x_c = 0$ (d'après le critère de convergence des séries alternées) mais que $x_a = 1$. Cependant, l'écart entre x_a et x_c se trouve toujours contrôlé par la proposition suivante.

Proposition 2. *Soit* $\sum_{n\geq 1} a_n\, e^{-\lambda_n z}$ *une série de Dirichlet. Si l'on note*

$$\mu = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\lambda_n}$$

alors $x_a - x_c \leq \mu$ *; en particulier, si* $\mu = 0$*, comme c'est le cas pour les séries entières, on a :*

$$x_a = x_c.$$

Démonstration. On suppose μ fini (si $\mu = +\infty$ il n'y a rien à prouver car tout nombre réel ou éventuellement $+\infty$, comme $x_a - x_c$, est majoré par $+\infty$). On a :

$$\mu = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \frac{\log k}{\lambda_k} \quad \text{(par définition de limsup)}$$

Ainsi $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$ on a :

$$\sup_{k\geq n} \frac{\log k}{\lambda_k} \leq \mu + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{(par définition de la limite).}$$

Ainsi on a pour n assez grand ($n \geq n_0$) que $\log k \leq \lambda_k(\mu + \frac{\epsilon}{2})$ pour tout $k \geq n$, c'est-à-dire que l'on a en particulier pour tout $k \geq n_0$:

$$-\lambda_k(\mu+\epsilon) \leq -\log k \frac{\mu+\epsilon}{\mu+\frac{\epsilon}{2}} = -\log k \frac{2(\mu+\epsilon)}{2\mu+\epsilon}$$

Soient $z, z_0 \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}(z_0) > x_c$ et $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(z_0) + \mu + \epsilon$.
On a, pour tout $k \geq 1$,

$$|a_k e^{-\lambda_k z}| = |a_k e^{-\lambda_k \mathrm{Re}(z)}| \leq |a_k e^{-\lambda_k(z_o+\mu+\epsilon)}| = |a_k e^{-\lambda_k z_0}| e^{-\lambda_k(\mu+\epsilon)}$$

car $t \in \mathbb{R}_+ \to e^{-t}$ est décroissante. Ainsi pour $k \geq n_0$, on a :

$$|a_k e^{-\lambda_k z}| \leq |a_k e^{-\lambda_k z_0}| e^{-\log(k)\frac{2(\mu+\epsilon)}{2\mu+\epsilon}} = |a_k e^{-\lambda_k z_0}| \frac{1}{k^{\frac{2(\mu+\epsilon)}{2\mu+\epsilon}}}$$

Or $a_k e^{-\lambda_k z_0}$ est le terme géneral d'une série convergente (car $\mathrm{Re}(z_0) > x_c$) , donc cette suite converge vers 0, donc son module aussi converge vers 0, ce qui implique que la suite $(|a_k e^{-\lambda_k z_0}|)_{k\geq n_0}$ est bornée.

Ainsi la série de terme général $a_k e^{-\lambda_k z}$ est une série absolument convergente, comme l'est la série de Riemann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{2(\mu+\epsilon)}{2\mu+\epsilon}}}$$

puisque

$$\frac{2(\mu+\epsilon)}{2\mu+\epsilon} > 1$$

Ceci est vrai pour tout z tel que $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(z_0) + \mu + \epsilon$, ce pour tout z_0 tel que $\mathrm{Re}(z_0) > x_c$ et pour tout $\epsilon > 0$.

Ainsi on a bien absolue convergence en z dès que la partie réelle de z est strictement supérieure à $x_0 + \mu$. Ce qui, du fait de la définition de x_a, nous donne bien :

$$x_a \leq \mu + x_c.$$

□

EXAMPLE 13 (le cas des séries de type zéta). Pour une série de type zéta $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-z}$, on a $x_a - x_c \leq 1$. Cette inégalité est la meilleure possible en général comme le montre l'exemple de la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}n^{-z}$ où $x_a = 1$ et $x_c = 0$.

L'abscisse de convergence absolue joue un rôle de seuil important pour les sommes de Dirichlet de type zéta. Soit $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-z}$ une telle série d'abcisse de convergence absolue $x_a \leq x_c + 1$ et $\chi = (e^{i\theta_n})_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{T}^\infty$. Si $\boldsymbol{p} = (p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne la liste des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant, il résulte du théorème de convergence dominée de Lebesgue que, pour $x > x_a$, on a la *formule d'Euler* :

$$\sum_{n\geq 1} a_n \chi(n)\, n^{-z} = \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\mathbb{N}^{(\mathbb{N}^*)}} a_{e^{\langle \boldsymbol{\ell}, \log \boldsymbol{p}\rangle}} \prod_{n=1}^{\infty} (p_n^{-z} e^{i\theta_n})^{\ell_n}$$

où $\mathbb{N}^{(\mathbb{N}^*)}$ désigne l'ensemble des suites $\boldsymbol{\ell} = (\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathbb{N}$ dont toutes les entrées sont nulles à partir d'un certain cran.

5. Séries de Dirichlet et convolution

5.1. Une dernière abscisse : l'abscisse l'holomorphie. On peut introduire pour les séries de Dirichlet une dernière abscisse, la plus délicate à estimer, dite *abscisse d'holomorphie*. On met ici en évidence un point essentiel différentiant séries entières et séries de Dirichlet : du fait que le bord du disque de convergence $D(0, R)$ d'une série entière est compact, il ne saurait exister (lorsque le rayon de convergence R est fini) de possibilité de prolonger analytiquement la somme f de la série entière en une fonction holomorphe dans un domaine $D(0, R) \cup D(\zeta, r_\zeta)$ (avec $r_\zeta > 0$) pour chaque point ζ du cercle de rayon R. Au contraire, ceci s'avère possible pour la somme d'une série de Dirichlet : on verra par exemple, comme conséquence du théorème d'Hardy-Fekete (théorème 23, basé sur l'utilisation de la transformée de Mellin des séries de Dirichlet, voir la définition 2) que la fonction

$$z \in \Pi_0^+ \longmapsto \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} n^{-z}$$

se prolonge en une fonction entière (alors que $x_c = 0$).

DEFINITION 14 (abscisse d'holomorphie). Si $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ est une série de Dirichlet telle que $x_c < +\infty$, on définit l'*abcisse d'holomorphie* x_h comme la borne inférieure des $x \in [-\infty, x_c]$ tels que la somme f de la série de Dirichlet dans $\Pi_{x_c}^+$ se prolonge en une fonction holomorphe dans Π_x^+.

On dispose en ce qui concerne cette question d'abscisse d'holomorphie d'un concept plus précis, celui d'*étoile horizontale de Marcel Riesz* :

DEFINITION 15 (étoile horizontale de Marcel Riesz). Soit $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ une série de Dirichlet d'abscisse de convergence simple $-\infty < x_c < +\infty$. Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, on note $x_h(\tau)$ l'abscisse du premier point singulier $x_n(\tau) + i\tau$ que l'on rencontre lorsque l'on essaye de prolonger analytiquement la somme f de la série $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ depuis le demi-plan droit $\Pi_{x_c}^+$ le long de la demi-droite horizontale $]-\infty, x_c] + i\tau$. L'*étoile horizontale de Marcel Riesz* est le domaine simplement connexe

$$\{\sigma + i\tau\,;\, \sigma > x_h(\tau)\}.$$

5.2. Transformation de Fourier et convolution verticale pour les sommes de séries de Dirichlet de type ζ. Soit Ψ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et de spectre Φ à support compact.

Proposition 3 (représentation de Saksman des sommes partielles d'une série de type zéta, voir par exemple [**QF2**]). *Soit $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-z}$ une série de type zéta et $x > x_b$. Si Ψ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ de spectre Φ à support compact, on a la formule*

$$\forall\, z \in \Pi_x^+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi(\log n)\, n^{-z} = \int_{\mathbb{R}} f(z+it)\,\Psi(t)\,dt. \tag{5}$$

Démonstration. Le membre de gauche de cette formule se représente sous forme intégrale puisque

$$a_n \Phi(\log n)\, n^{-z} = a_n \int_{\mathbb{R}} \Psi(t) n^{-z-it}\,dt.$$

Supposons que $\mathrm{Re}\, z > x_a$ (on sait que $x_a - x_c \leq 1$, ce qui prouve que si $x_c < +\infty$, on a aussi $x_a < +\infty$). Pour un tel z, on justifie grâce au théorème de Fubini l'interversion des intégrales dans

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{R}} n^{-z-it}\,\Psi(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi(\log n)\, n^{-z}$$

(la fonction Ψ est en effet intégrable). On obtient la formule voulue pour un tel z. Cette formule reste valide pour tout $x > x_b$ puisque les deux membres définissent des fonctions de z holomorphes dans Π_x^+. $\square$

Si l'on suppose que $x_b < 0$ (ce que l'on peut toujours supposer quitte à modifier les a_n), on obtient en prenant pour Ψ la fonction $\Psi_\lambda = \lambda\Psi(\lambda(.))$ la formule

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \Phi(\log n/\lambda) n^{-z} = \lambda \int_{\mathbb{R}} f(z+it)\,\Psi(\lambda t)\,dt \qquad \forall\, z \in \Pi_0^+$$

et par conséquent (si $\lambda = \log N$) l'inégalité

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} a_n \Phi(\log n/\log N)\Big| \leq \sup_{\Pi_0^+} |f|\, \|\Psi\|_1.$$

Example 16 (l'inégalité de Balasubramanian-Calado-Queffelec). On peut prendre comme exemple de fonction Φ la fonction $(N/2)\chi_{[-1,1]}\,\chi_{[-1/N,1/N]}$. Le spectre de Φ est la fonction intégrable

$$t \mapsto 2N\sin(t)/t \times 2\sin(t/N).$$

On vérifie que $\|\widehat{\Phi}\|_1 \leq 8 + 4N$. Grâce à la formule d'inversion, on voit que Φ est le spectre d'une fonction Ψ telle que $\|\Psi\|_1 \leq (4{+}2N)/\pi$. On obtient ainsi l'inégalité de Balasubramanian -Calado - Queffélec exploitée pour prouver le théorème de Bohr ($x_u = x_b$ pour une telle série de Dirichlet), voir [**QF2**].

5.3. Transformation de Laplace et convolution circulaire pour les sommes de séries de Dirichlet. On considère dans cette section une série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ de somme $f(z)$, d'abscisse de convergence $x_c < +\infty$. Ce n'est pas cette série de Dirichlet f que nous allons tenter de représenter sous forme intégrale mais, comme dans la sous-section précédente, une version transformée f_Φ de la série de Dirichlet f (on préserve les exposants λ_n de f, seuls les coefficients a_n de f sont modifiés).

Pour effectuer cette transformation, on introduit cette fois une fonction Φ, entière sur $\mathbb{C}$, telle que

$$\exists B > 0,\ \text{t.q. } \forall \epsilon > 0, \exists C_\epsilon > 0, \quad |z| > C_\epsilon \Longrightarrow |\Phi(z)| \leq e^{(B+\epsilon)|z|}$$

(la fonction Φ est dite de type exponentiel). Comme Φ est une fonction entière, on peut écrire :

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n,\ \ c_n = \Phi^{(n)}(0)/n! \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

On se propose de calculer cette fois la transformée de Laplace de $\Phi_{[0,\infty[}$, définie (pour l'instant formellement) par :

$$\text{Laplace}\,(\Phi)(z) = \int_0^\infty \Phi(t)\, e^{-tz} dt = \int_0^\infty \Big(\sum_{n=0}^\infty c_n t^n\Big)\, e^{-tz} dt$$

lorsque $\text{Re}\,(z) > B$.

Commençons par montrer que cette transformée de Laplace est vraiment définie en un tel z. On a

$$\int_0^\infty |\Phi(t)|\, |e^{-tz}|\, dt = \int_0^{C_\epsilon} |\Phi(t)|\, |e^{-tz}|\, dt + \int_{C_\epsilon}^\infty e^{(B+\epsilon-\text{Re}\,(z))t}\, dt.$$

Si $B + \epsilon - \text{Re}\,(z) < 0$, l'intégrale ci-dessus est convergente. Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, la fonction

$$z \in \Pi_B^+ \longmapsto \int_0^\infty \Phi(t)\, e^{-tz}\, dt$$

est définie et holomorphe. On peut ainsi intervertir série et intégrale (théorème de Fubini) pour obtenir, pour tout $z \in \Pi_B^+$,

$$\begin{aligned}
\text{Laplace}\,(\Phi)(z) &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty c_n t^n e^{-tz} dt = \sum_{n=0}^\infty c_n \int_0^\infty t^n e^{-tz} dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty c_n \frac{n}{z} \int_0^\infty e^{-tz} t^{n-1} dt
\end{aligned}$$

(la dernière égalité correspond à une intégration par parties). On peut d'ailleurs répéter l'intégration par parties et obtenir ainsi par récurrence

$$\forall\, z \in \Pi_B^+,\ \text{Laplace}\,(\Phi)(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n \frac{n!}{z^n} \int_0^\infty e^{-tz} dt = \sum_{n=0}^\infty c_n \frac{n!}{z^{n+1}}.$$

On notera

$$\forall\, z \in \Pi_B^+,\ H(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n \frac{n!}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^\infty \Phi^{(n)}(0) \frac{n!}{z^{n+1}}.$$

Étant donnée la série de Dirichlet $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{-\lambda_n z}$ d'abscisse de convergence $x_c < +\infty$ et une telle fonction entière Φ, on introduit la série de Dirichlet transformée f_Φ définie par

$$f_\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \Phi(\lambda_n) \, e^{-\lambda_n z}.$$

On va désormais montrer un théorème de Cramer (que l'on généralisera ensuite à un théorème de Pólya-Cramer une fois introduit le concept de fonctionnelle analytique), nous donnant une représentation intégrale de la série de Dirichlet transformée f_Φ (permettant ultérieurement d'envisager éventuellement le prolongement analytique de cette série de Dirichlet f_Φ au dela de son demi-plan de convergence).

Theorem 17 (théorème de Cramer). *Soient f une série de Dirichlet d'abscisse de convergence $x_c < +\infty$ et Φ une fonction entière comme précédemment. La série de Dirichlet f_Φ a aussi une abscisse de convergence $X_c \leq x_c + B < +\infty$ et sa somme (notée aussi f_Φ) vérifie*

$$\forall \, z \in \Pi^+_{x_c+B}, \quad \forall \, r > B, \; f_\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=r} f(z-\zeta) H(\zeta) d\zeta,$$

où H est la fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,B)}$ définie par

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi^{(n)}(0)}{z^{n+1}} \quad \text{si} \quad |z| > B.$$

Démonstration. On va tout d'abord montrer que la série de fonctions définissant $H(z)$ est bien normalement convergente sur domaine $\{|z| > B + 3\epsilon\}$ pour tout $\epsilon > 0$, ce qui impliquera que H ainsi définie dans $\{|z| > B\}$ est bien une fonction holomorphe.

Pour tout $\epsilon > 0$, on a, grâce aux inégalités de Cauchy

$$\frac{|\Phi^{(n)}(0)|}{n!} \leq \inf_{r > C_\epsilon} \frac{e^{r(B+\epsilon)}}{r^n}.$$

Or la fonction $g \; : r \in]0, \infty[\to \frac{e^{r(B+\epsilon)}}{r^n}$ a pour dérivée

$$r \in]0, \infty[\to \frac{r^{n-1} e^{r(B+\epsilon)}}{r^{2n}} (r(B+\epsilon) - n)$$

et donc atteint son minimum lorsque $g'(r) = 0$ ce qui équivaut à $t = n/(B+\epsilon)$. On a donc, pour n assez grand (en fonction de ϵ)

$$\frac{|\Phi^{(n)}(0)|}{n!} \leq \inf_{r > C_\epsilon} \frac{e^{r(B+\epsilon)}}{r^n} = \inf_{r > 0} \frac{e^{r(B+\epsilon)}}{r^n} = \Big(\frac{e(B+\epsilon)}{n} \Big)^n.$$

On va montrer que pour n assez grand (dépendant encore de ϵ), on a

$$\Big(\frac{e(B+\epsilon)}{n} \Big)^n \leq \frac{(B+2\epsilon)^n}{n!}.$$

Pour cela on utilise la formule de Stirling, nous donnant une équivalence de $n!$ en $+\infty$:

$$n! \sim_{n \to \infty} \Big(\frac{n}{e} \Big)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Ainsi on obtient que

$$\Big(\frac{e(B+\epsilon)}{n} \Big)^n \sim_{n \to \infty} (B+\epsilon)^n \frac{\sqrt{2n\pi}}{n!}.$$

Or, comme $B+2\epsilon > B+\epsilon$, on a pour n assez grand (dépendant toujours de ϵ) :

$$(B+\epsilon)^n\sqrt{2\pi n} \leq (B+2\epsilon)^n$$

et donc

$$\Big(\frac{e(B+\epsilon)}{n}\Big)^n \leq \frac{(B+2\epsilon)^n}{n!}.$$

En revenant à notre inégalité on obtient pour n assez grand (disons $n > N(\epsilon)$)

$$\frac{|\Phi^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{(B+2\epsilon)^n}{n!}$$

et donc

$$\sum_{n=N(\epsilon)}^{\infty} \Big|\frac{\Phi^{(n)}(0)}{z^{n+1}}\Big| \leq \sum_{n=N(\epsilon)}^{\infty} \Big|\frac{(B+2\epsilon)^n}{z^{n+1}}\Big|.$$

Or la série du second membre converge normalement dans $\{|z| > B+3\epsilon\}$, ce pour tout $\epsilon > 0$. La série de fonctions définissant H converge donc vers une fonction holomorphe H dans $\{|z| > B\}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $r > B$. On a alors (grâce à la convergence normale de la série de fonctions définissant H sur le cercle de rayon r) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=r} e^{z\zeta}H(\zeta)d\zeta &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|\zeta|=r}\Phi^{(n)}(0)\frac{e^{z\zeta}}{\zeta^{n+1}}d\zeta \\ &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\Phi^{(n)}(0)\int_{|\zeta|=r}\frac{e^{z\zeta}}{\zeta^{n+1}}d\zeta. \end{aligned}$$

On calcule maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_{|\zeta|=r}\frac{e^{z\zeta}}{\zeta^{n+1}}d\zeta = \int_0^{2\pi}\frac{e^{zRe^{i\theta}}}{(e^{i\theta})^{n+1}}(ire^{i\theta})d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{ie^{rze^{i\theta}}}{r^n e^{ni\theta}}d\theta.$$

Comme la série entière définissant l'exponentielle converge normalement sur le cercle de rayon $r|z|$, et que l'on on a

$$\frac{ie^{rze^{i\theta}}}{r^n e^{ni\theta}} = i\sum_{k=0}^{\infty} r^{k-n}\frac{z^k}{k!}e^{i\theta(k-n)} \qquad \forall\,\theta \in [0,2\pi]$$

et, pour tout $n \neq k$,

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta(k-n)}d\theta = \left[\frac{e^{i\theta(k-n)}}{i(k-n)}\right]_0^{2\pi} = 0,$$

on en déduit que :

$$I_n = i\int_0^{2\pi}\left[r^{n-k}\frac{z^n}{n!}e^{i\theta(n-k)}\right]_{k=n}d\theta = i\int_0^{2\pi}\frac{z^n}{n!}d\theta = 2i\pi\frac{z^n}{n!} \quad \forall\, n \geq 0.$$

En reportant ce résultat on obtient finalement, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=r} e^{z\zeta}\,H(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\Phi^{(n)}(0)\,2i\pi\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\Phi^{(n)}(0)\frac{z^n}{n!} = \Phi(z)$$

(On obtient ici une formule réalisant l'inversion de la transformée de Laplace explicitée plus haut). On remarque ainsi que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=r}\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n(z-\zeta)}\Big)H(\zeta)d\zeta &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=1}^{N}\int_{|\zeta|=r} a_n e^{-\lambda_n(z-\zeta)})H(\zeta)d\zeta \\
&= \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=1}^{k} a_n e^{-\lambda_n z}\int_{|\zeta|=r} e^{\lambda_n\zeta}H(\zeta)d\zeta \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n z}\Phi(\lambda_n).
\end{aligned}$$

On a par hypothèses que $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ converge uniformément dans $\overline{D(z,r)}$ pourvu que l'on ait $\mathrm{Re}\,(z) > x_c+r$ car $\overline{D(z,r)}$ est alors un compact du demi-plan de convergence simple de la série de Dirichlet f ce qui implique dans ce compact la convergence uniforme de cette série de Dirichlet f. Ainsi, en fixant un tel z de partie réelle strictement supérieure à $x_c + r$, $\zeta \to \sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n(z-\zeta)}$ converge vers $\zeta \to f(z-\zeta)$ uniformément sur $\{|\zeta| = r\}$. On peut donc prendre la limite lorsque $N \to +\infty$ dans la dernière égalité obtenue en préservant cette égalité afin d'obtenir :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Phi(\lambda_n)e^{-\lambda_n z} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=r}\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n(z-\zeta)}H(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=r} f(z-\zeta)H(\zeta)d\zeta.$$

Ceci prouve la convergence simple au point z de la série de Dirichlet transformée f_Φ (et explicite sous forme intégrale l'expression de la somme de cette série de Dirichlet f_Φ en un tel point z de partie réelle strictement supérieure à $x_c + r$). Ceci étant applicable pour tout $r > B$ on a bien $X_c \leq x_c + B$ et la formule voulue pour l'expression de la somme F de f_Φ au point z tel que $\mathrm{Re}\,(z) > x_c + B$. □

Remarque 18. Grâce à la représentation de la somme f_Φ de la série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ sous forme intégrale (on reconnait d'ailleurs l'opération de convolution), on voit que l'on peut éventuellement prolonger f_Φ en une fonction holomorphe sur un domaine plus large que celui du théorème (à savoir le demi-plan $\Pi^+_{x_c+B}$), ce en étudiant de près les singularités de la fonction H figurant dans le noyau intégrant, ainsi que le domaine maximal d'holomorphie de f. Voir l'exemple ci-dessous.

Example 19. On prend $\Phi(z) = \cos(Bz)$, avec $B > 0$, et on vérifie qu'elle respecte bien les hypothèses : comme $|\cos z| \leq e^{|z|}$, elle respecte les conditions. Calculons alors la fonction H.

$$\cos(Bz) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n B^{2n}}{(2n)!}z^{2n}.$$

Ainsi on a $\Phi^{(2n)}(0) = (-1)^n B^{2n}$ et $\Phi^{(2n+1)}(0) = 0$, donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{\Phi^{(n)}(0)}{z^{n+1}} &= \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^n B^{2n}}{z^{2n+1}} \\
&= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{N} (-1)^n \Big(\frac{B^2}{z^2}\Big)^n = \frac{1}{z} \frac{1 - (-\frac{B^2}{z^2})^{N+1}}{1 - (-\frac{B^2}{z^2})} \\
&= \frac{z - z(-\frac{B^2}{z^2})^{N+1}}{z^2 + B^2}.
\end{aligned}$$

En faisant tendre N vers l'infini, on trouve que pour tout z tel que $|z| > B$,

$$H(z) = \frac{z}{z^2 + B^2}.$$

Ainsi H peut se prolonger en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-iB, iB\}$. On peut exploiter comme suit la formule intégrale du théorème de Cramer : si l'on connait *a priori* un ouvert U connexe où la somme de la série de Dirichlet f se prolonge en une fonction holomorphe, on a que f_Φ se prolonge en une fonction holomorphe dans l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{z - iB, z + iB\,;\, z \in U\}$. Ceci peut être généralisé si l'on dispose d'une information sur la possibilité de prolonger H au dela de la couronne $\{|z| > B\}$ du plan complexe où elle se trouve *a priori* définie.

Le théorème de Cramer s'étend à un énoncé plus général (théorème de Pólya-Cramer) si l'on introduit le concept de *fonctionnelle analytique* :

Definition 20. Une *fonctionnelle analytique* $T \in H(\mathbb{C})^*$ est par définition un élément du dual de l'espace des fonctions entières, équipé de sa topologie usuelle de la convergence uniforme sur tout compact du plan complexe. Le même concept peut être introduit lorsque $\mathbb{C}$ est remplacé par un domaine Ω du plan complexe.

Il résulte du théorème de Hahn-Banach que tout élément $T \in H'(\mathbb{C})$ se représente par une mesure de Radon complexe $\mu_{\mathbb{K}}$ (non unique) de support un compact K du plan complexe ainsi :

$$\langle T, h\rangle = \int_K h(\zeta)\, d\mu_K(\zeta) \qquad \forall\, h \in \mathbb{C}.$$

Lorsque le compact K supporte une telle mesure représentative μ_K, on dit que K est un *porteur* de la fonctionnelle T. On montre que l'intersection de tous les porteurs d'une fonctionnelle analytique T est encore un porteur de cette fonctionnelle (dit alors *porteur minimal*) et que le porteur minimal (ainsi associé à T de manière unique) est un convexe compact K_T du plan complexe (on l'appelle *support convexe* K^T_{conv} de la fonctionnelle T). Étant donné une fonctionnelle $T \in H^*(\mathbb{C})$, on lui associe une fonction entière $\mathcal{F}B(T)$ dite transformée de Fourier-Borel de T par :

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto \mathcal{F}B(T)(z) := \langle T_\zeta, e^{\zeta z}\rangle.$$

Cette fonction entière vérifie :

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, C_\epsilon > 0, \quad |\mathcal{FB}(z)| \leq C_\epsilon\, e^{H_{K^T_{\text{conv}}}(z) + \epsilon |z|},$$

où

$$H_{K^T_{\text{conv}}}(z) := \sup_{\zeta \in K^T_{\text{conv}}} \operatorname{Re}\langle \zeta, z\rangle \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

La fonctionnelle T admet aussi une transformée de Cauchy $\widehat{T}$, fonction holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus K^T_{\rm conv}$, définie dans cet ouvert par

$$\widehat{T}(z)=\int_{K^T_{\rm conv}}\frac{d\mu_{K^T_{\rm conv}}(\zeta)}{\zeta-z}.$$

Le théorème de Cramer se généralise ainsi (voir par exemple [**BG2**]).

Theorem 21 (théorème de Polya-Cramer). *Soit $T\in H^*(\mathbb{C})$ une fonctionnelle analytique de transformée de Fourier-Borel Φ, de porteur convexe K et de transformée de Cauchy H. Si $\sum_{n\geq 1}a_n e^{-\lambda_n z}$ est une série de Dirichlet d'abscisse de convergence simple $x_c<+\infty$ dont la somme se prolonge à un ouvert Ω du plan complexe, la série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1}a_n\Phi(n)e^{-\lambda_n z}$ a aussi une abscisse de convergence simple X_c finie ($X_c\leq x_c+R_T$, R_T désignant le rayon du plus petit disque fermé de centre 0 contenant $K^T_{\rm conv}$) et la somme f_Φ de cette série se prolonge à l'unique composante bornée de $\mathbb{C}\setminus\{z_1+z_2\,;\,z_1\notin\Omega,\ z_2\in K^T_{\rm conv}\}$ contenant tout un demi-plan ouvert droit Π^+_x. De plus, la somme f_Φ de cette série se représente pour tout $x>x_c+B_T$ par la convolution circulaire :*

$$f_\Phi(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=r}f(z-\zeta)\,\widehat{T}(\zeta)\,d\zeta\qquad\forall\, z\in\Pi^+_{x_c+B_T}$$

5.4. La transformation de Mellin et le théorème d'Hardy-Fekete. Comme la transformation de Laplace joue un rôle dans la démarche conduisant à la représentation intégrale de la somme d'une série de Dirichlet transformée (voir la section précédente et le théorème 17), une autre transformation intégrale importante en analyse, théorie des nombres, ainsi qu'en ingénierie mathématique, la transformation de Mellin (appartenant de fait à la même famille que les transformations de Fourier et Laplace exploitées dans les deux sous-sections précédentes) joue un rôle majeur dans l'argument conduisant au théorème de Hardy-Fekete à venir.

Dans cette section, on considère une série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1}a_n e^{-\lambda_n z}$ d'abscisse de convergence $x_c<\infty$, dont on note f la somme dans $\Pi^+_{x_c}$. On considère sa transformée de Mellin (voir la définition 2), à savoir la série de Dirichlet

$$\sum_{n\geq 1}a_n e^{-\mu_n z}$$

avec $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\mu_n=e^{\lambda_n}$, dont on notera $F(z)$ la somme. Lorsque la série de Dirichlet est une série de type ζ, à savoir $\sum_{n\geq 1}a_n n^{-z}$, la transformée de Mellin est une série du type $\sum_{n\geq 1}a_n e^{-nz}$, série entière en w dans laquelle on a effectué la substitution $w=e^{-z}$.

On remarque tout d'abord, du fait que la suite $(\lambda_n/e^{\lambda_n})_{n\geq 1}$ converge vers 0 et que la série de Dirichlet $f(z)=\sum_{n\geq 1}a_n\,e^{-\lambda_n z}$ converge en au moins un point z_0 (car elle a une abscisse de convergence $x_c<+\infty$), on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\Big|\sum_{k=1}^n a_k\Big|}{e^{\lambda_n}}=0.$$

Il suffit de transformer pour voir cela la somme $\sum_{k=1}^n a_k$ en l'écrivant

$$\sum_{k=1}^n a_k=\sum_{k=1}^n(a_k\,e^{-\lambda_k z_0}\times e^{\lambda_k z_0})$$

et en utilisant ensuite le lemme d'Abel (lemme 5) pour faire apparaitre la suite (bornée) des sommes partielles de la série de Dirichlet f évaluées au point z_0. Il résulte alors du théorème de Cahen (théorème 7) que l'abcisse de convergence X_c de la série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\mu_n z}$ est inférieure ou égale à 0, donc qu'il y a convergence de cette série dans le demi-plan Π_0^+.

On rappelle maintenant ici la définition de la fonction Gamma :

$$\forall\, z \in \Pi_0^+,\ \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Ainsi, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $z \in \Pi_0^+$,

$$\Gamma(z) = \underbrace{\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty (t\mu_n)^{z-1} e^{-\mu_n t} \mu_n dt}_{\text{on fait le changement de variable linéaire } t \to t\mu_n} = e^{\lambda_n z} \int_0^\infty t^{z-1} e^{-\mu_n t} dt.$$

Ainsi on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $z \in \Pi_0^+$,

$$a_n\, e^{-\lambda_n z}\, \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} a_n e^{-\mu_n t} dt,$$

d'où

$$\forall z \in \Pi^+_{\max(0,x_c)},\ \Gamma(z) f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty t^{z-1}\, a_n\, e^{-\mu_n t} dt. \tag{6}$$

On va désormais majorer la somme F de la série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-e^{\lambda_n} z}$ pour $t \in]0,+\infty[$ afin de montrer son intégrabilité sur $]0,+\infty[$ et de pouvoir intervertir série et intégrale dans l'égalité (6). Pour cela, on introduit $x > x_c$. On va utiliser une nouvelle fois le lemme d'Abel (lemme 5) appliqué aux suites $(b_n)_{n\geq 1}$ et $(c_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$b_n = e^{-\mu_n t} \mu_n^x, \quad c_n = a_n\, e^{-\lambda_n\, x}$$

$(\mu_n = \exp(\lambda_n))$. Si l'on pose $C_n = \sum_{k=1}^n c_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient ainsi que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^N b_n c_n = B_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} C_n (b_n - b_{n+1}).$$

Or la suite $(C_n)_{n\geq 1}$ est la suite des sommes partielle de la série de Dirichlet f, évaluées au point $x > x_c$ (où l'on sait que cette série de Dirichlet converge), et donc $\exists L(x) > 0$, $\forall n > 0$, $|C_n| \leq L(x)$. Par conséquent, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{n=1}^N b_n c_n\Big| &\leq L(x) \Big| \int_{\mu_1}^{\mu_N} \frac{d}{du}(e^{-ut} u^x)\, du \Big| + L(x)\, \mu_N^x\, e^{-\mu_N t} \\
&\leq L(x) \left(x \int_{\mu_1}^{\mu_N} e^{-ut}\, u^{x-1}\, du + t \int_{\mu_1}^{\mu_N} e^{-ut} u^x\, du \right) + L(x)\, \mu_N^x\, e^{-\mu_N t} \\
&\leq L(x) \left(x \int_{\mu_1}^{\mu_N} e^{-ut/2}\, u^{x-1}\, du + t \int_{\mu_1}^{\mu_N} e^{-ut/2}\, u^x\, du \right) e^{-\mu_1 t/2} \\
&\quad + L(x)\, \mu_N^x\, e^{-\mu_N t} \\
&\leq L(x)\, \Gamma(x+1)\, (t/2)^{-x-1}\, e^{-\mu_1 t/2} + L(x)\, \mu_N^x\, e^{-\mu_N t} \\
&\leq \tilde{L}(x)\, t^{-x}\, e^{-\mu_1 t/2} + L(x)\, \mu_N^x\, e^{-\mu_N t}.
\end{aligned}$$

En faisant tendre N vers l'infini on obtient :

$$|F(t)| \leq \tilde{L}(x)\, t^{-x}\, e^{-e^{\lambda_1} t/2} \quad \forall\, t > 0;$$

Il en résulte que pour tout $z \in \Pi^+_{x_c}$ (en particulier pour tout $z \in \Pi^+_{\max(0,x_c)}$), on a par conséquent $t^{z-1}\, F \in \mathcal{L}^1(]0,+\infty[, dt)$. On peut donc intervertir dans (6), lorsque $z \in \Pi^+_{\max(0,x_c)}$, série et intégrale, du fait de l'intégrabilité de $|t^{z-1}F|$ sur $[0,+\infty[$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \forall\, z \in \Pi^+_{\max(0,x_c)},\ \Gamma(z)f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{z-1} a_n e^{-\mu_n t} dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{z-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\mu_n t} dt = \int_0^{\infty} t^{z-1} F(t) dt. \end{aligned}$$

Definition 22 (définition de la transformée de Mellin d'une fonction). On appelle transformée de Mellin de F, l'application :

$$\mathrm{Mellin}\,(F) : z \in \Pi^+_{\max(0,x_c)} \to \int_0^{\infty} t^{z-1}\, F(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-uz}\, F(e^{-u})\, du$$

(la seconde représentation montrant la relation entre les transformées de Mellin et de Laplace).

C'est ainsi la relation (explicitée dans la proposition suivante) entre la transformée de Mellin $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\mu_n z}$ de la série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ (au niveau de leurs sommes respectives dans Π^+_0, respectivement Π^+_x, lorsque $x > x_c$) qui justifie la terminologie utilisée dans la définition 2.

Grâce aux calculs effectués sur $\Gamma(f)$, on peut affirmer la proposition suivante :

Proposition 4. *En gardant les notations de début de section on a*

$$\forall\, z \in \Pi^+_{\max(0,x_c)},\ \Gamma(z)f(z) = \mathrm{Mellin}\,(F)(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} F(t) dt.$$

Cette proposition va nous permettre, suivant l'étude des singularités de F ou de son prolongement analytique, de prolonger aussi méromorphiquement la somme de la série de Dirichlet f. C'est ce que l'on va voir dans le théorème de Hardy-Fekete suivant.

Theorem 23 (théorème de Hardy Fekete). *On suppose que $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ est une série de Dirichlet ayant une abscisse de convergence $x_c < +\infty$, dont on note f la somme, et l'on suppose que la somme F de la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-e^{\lambda_n} z}$ (qui converge pour $z \in \Pi^+_0$) se prolonge analytiquement en une fonction méromorphe à l'origine, le pôle à l'origine étant d'ordre q (éventuellement $q = 0$, auquel cas le prolongement est holomorphe). Alors la somme f de la série originelle se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier, les pôles éventuels étant tous simples et localisés aux points $q, q-1, ..., 1$. En particulier, si F se prolonge holomorphiquement à un voisinage de l'origine (c'est-à-dire $q = 0$), alors f se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier, c'est à dire en une fonction entière.*

Démonstration. On rappelle ici que Γ ne s'annule pas dans Π_0^+ et que $1/\Gamma$ se prolonge analytiquement depuis Π_0^+ à $\mathbb{C}$ tout entier en une fonction que l'on notera toujours $1/\Gamma$ et qui est une fonction entière . On a, d'après la proposition 4, pour tout $z \in \Pi^+_{\max(0,x_c)}$:

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty F(t) t^{z-1} dt = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^x F(t) t^{z-1} dt + \frac{1}{\Gamma(z)} \int_x^\infty F(t) t^{z-1} dt \quad \forall x > 0.$$

On a vu précédemment que pour tout $y > x_c$, il existe $\tilde{L}(y) > 0$ tel que l'on ait $|F(t)| \leq \tilde{L}(y)\, t^{-y}\, e^{-\frac{e\lambda_1}{2} t}$ pour tout $t > 0$. Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$z \in \mathbb{C} \to \int_x^\infty F(t)\, t^{z-1}\, dt$$

définie une fonction entière, ainsi, par conséquent, que

$$z \in \mathbb{C} \to \frac{1}{\Gamma(z)} \int_x^\infty F(t)\, t^{z-1}\, dt.$$

Comme F se prolonge analytiquement au voisinage de 0 en une fonction méromorphe ayant un pôle d'ordre au plus q, on peut écrire au voisinage de 0 :

$$F(z) = \sum_{k=0}^\infty b_k z^{k-q}$$

où le rayon de convergence r_0 de la série entière $\sum_{k \geq 0} b_k z^k$ est strictement positif. Si $0 < x < r_0$, on a, pour tout $z \in \Pi^+_{\max(0,x_c)}$, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^x F(t)\, t^{z-1} dt \\ = \quad & \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^x \sum_{k=0}^N b_k t^{k-q}\, t^{z-1}\, dt + \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^x \sum_{k=N+1}^\infty b_k\, t^{k-q}\, t^{z-1}\, dt \\ = \quad & \frac{1}{\Gamma(z)} \sum_{k=0}^N \frac{b_k\, x^{k-q+z}}{k-q+z} + \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^x \Big(\sum_{k=N+1}^\infty b_k\, t^{k-q}\, t^{z-1} \Big)\, dt. \end{aligned}$$

D'autre part, comme $0 < x < r_0$, il existe $C(x)$ tel que $\forall t \in [0, x]$,

$$\Big| \sum_{k=N+1}^\infty b_k t^{k-q} \Big| \leq C(x)\, t^{N+1-q}.$$

Pour un tel x, la fonction

$$z \to \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^x \sum_{k=N+1}^\infty b_k t^{k-q+z-1}\, dt$$

représente donc une fonction holomorphe dans le demi-plan $\Pi^+_{-(N+1-q)}$. La fonction

$$z \to \frac{1}{\Gamma(z)} \sum_{k=0}^N b_k \frac{x^{k-q+z}}{k-q+z}$$

est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$, dont les pôles sont simples et a priori aux points $q, q-1, q-2, ..., q-N$. Mais la fonction $1/\Gamma$ s'annule en $0, -1, -2, ...$ Tous les pôles eventuels de cette fonction ayant une partie réelle négative ou nulle se trouvent donc effacés par la présence du facteur multiplicatif $1/\Gamma(z)$. Ne subsistent que les pôles éventuels (simples) en $q, q-1, ..., 1$. Si $q = 0$, cette fonction est donc holomorphe (sans pôles). En faisant tendre N vers $+\infty$, on a bien que f se présente comme la somme d'une fonction entière et d'une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ dont les poles éventuels sont bien ceux cités ci dessus. Ce qui termine notre preuve. □

Remarque 24 (le cas des séries de type zéta). Pour la séries de type zéta, la transformée de Mellin est une série entière en w dans laquelle on a substitué $w = e^{-z}$. L'hypothèse faite dans le théorème de Hardy-Fekete équivaut alors à dire que la somme S de cette série entière $\sum_{n\geq 1} a_n w^n$ se prolonge en une fonction méromorphe dans $D(0,1) \cup D(1,r)$ pour un certain $r > 0$ avec un pôle unique et d'ordre q au point $w = 1$. C'est le cas par exemple de la série $\sum_{n\geq 1} w^n$ $(q = 1)$ ou de la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}w^n$ $(q = 0)$. La fonction zéta $\sum_{n\geq 1} n^{-z}$ de Riemann se prolonge donc à une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ de seul pôle 1, tandis que la série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}n^{-z}$ a pour abscisse d'holomorphie $x_h = -\infty$.

5.5. Transformation de Mittag-Leffler, convolution « horizontale » et calcul (théorique) de l'étoile de Marcel Riesz. On suppose dans cette section que la suite des exposants $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de la série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ satisfait la clause (pas très restrictive en fait) :

$$\forall\, \beta > 0, \forall\, \epsilon > 0, \quad \sum_1^n e^{-\beta\lambda_k \log\lambda_k} = O(n^\epsilon). \tag{7}$$

Remarque 25 (le cas des séries de Dirichlet de type zéta). On note que les séries de Dirichlet de type zéta se plient à cette clause. En effet, dès que k est assez grand, on a $\beta\log(\log(k)) \geq 1$ et $k^{-\beta\log(\log(k))} \leq 1/k$. Or $\sum_1^n 1/k \sim \log n$ lorsque n tend vers l'infini.

Pour tout $\alpha > 0$, on introduit la série de Dirichlet

$$\sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{\Gamma(1+\alpha\lambda_k)}\, e^{-\lambda_k z}.$$

Proposition 5. *Si la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ vérifie la clause (7) et a une abscisse de convergence $x_c < +\infty$, la série de Dirichlet*

$$\sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{\Gamma(1+\alpha\lambda_k)}\, e^{-\lambda_k z}.$$

a une abscisse de absolue $x_a = -\infty$. La somme de cette série est donc une fonction entière Θ_α.

Démonstration. D'après le théorème de Cahen (théorème 7), il suffit de vérifier que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda_n}\Big(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\Gamma(1+\alpha\lambda_k)}\, e^{\lambda_k h}\Big) \leq 0 \qquad \forall\, h > 0.$$

En effet, si cette condition est remplie et si la série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ converge en au moins un point, on a $|a_n| \leq Ce^{\lambda_n |x_0|}$ pour un certai $|x_0| \geq 0$. Le test de Cahen (premier volet) s'applique donc pour la série $\sum_{n\geq 1}(a_n/\Gamma(1+\alpha\lambda_n))\, e^{-\lambda_n}$. On conclut grâce à la formule de Stirling $\Gamma(t) \sim \sqrt{2\pi}t^{t+1/2}e^{-t}$ au voisinage de $+\infty$. □

THEOREM 26 (théorème de Marcel Riesz). *Soit* $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ *une série de Dirichlet dont la suite des exposants vérifie la clause* (7) *(par exemple une série de type zéta). Pour tout* $\tau \in \mathbb{R}$*, on a*

$$x_h(\tau) = \lim_{\alpha \to 0^+} \Big(\limsup_{t \to +\infty} \log \big(\log^+ |\Theta_\alpha(-t+i\tau)+t| \big) \Big),$$

où

$$\Theta_\alpha \ : z \longmapsto \sum_{n\geq 1} \frac{a_k}{\Gamma(1+\alpha_k\lambda)}\, e^{-\lambda_k z}.$$

Ceci permet, seulement en théorie malheureusement, de calculer l'étoile horizontale de Riesz.

EXAMPLE 27. La fonction $1/\zeta$ (méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec un seul pôle (simple) en $z=1$) se représente dans le demi-plan Π_1^+ comme la somme de la série de Dirichlet

$$\sum_{n\geq 1} \mu(n) n^{-z}$$

où la fonction multiplicative μ est la fonction de Möbius définie par $\mu(1)=1$, $\mu(n)=(-1)^k$ si n est un produit de k nombres premiers distincts, $\mu(n)=0$ sinon. Vérifier que tous les zéros de la fonction ζ sont dans $\{\mathrm{Re}\, z \leq 1/2\}$ (ce qui constituerait bien sûr un pas décisif vers la preuve de l'hypothèse de Riemann) revient à vérifier que $x_h(\tau) \leq 1/2$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, ce qui serait théoriquement possible si la formule donnée par le théorème de Marcel Riesz était exploitable. On note toutefois que la fonction de Möbius n'est pas un caractère (elle prend les valeurs $-1, 0, 1$ et $0 \notin \mathbb{T}$).

La preuve du théorème de Riesz repose sur une formule dite de resommation faisant intervenir une convolution cette fois horizontale et une transformation intégrale derrière laquelle se cache, on le verra, la transformation de Laplace.

LEMMA 28 (formule de resommation de Marcel Riesz). *Soit* $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ *une série de Dirichlet d'abscisse de convergence simple* $x_c < +\infty$ *et dont la suite des exposants vérifie la clause* (7)*. Pour tout* $z \in \Pi_{x_c}^+$*, pour tout* $\alpha > 0$*, on a la formule de représentation-resommation suivante :*

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z} &= \int_{\mathbb{R}} e^{-e^t}\, \Theta_\alpha(z-\alpha t)\, e^t\, dt \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} e^{-e^{\alpha t}}\, \Theta_{1/\alpha}(z-t)\, e^{\alpha t}\, dt.\end{aligned}$$

REMARQUE 29. On trouve ici une convolution « horizontale » sur un chemin non borlé ($\mathbb{R}$). Ce n'est plus une convolution verticale comme dans la formule de Saksman, ni une convolution circulaire (donc sur un contour compact) comme dans le théorème de Pólya-Cramer. Par contre, la fonction avec laquelle on convole est cette fois entière (et non plus holomorphe hors d'un disque comme dans le théorème de Pólya-Cramer).

DÉMONSTRATION. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la fonction positive

$$p_n \ : t \geq 0 \longmapsto \frac{1}{\Gamma(1+\alpha\lambda_n)} \int_0^t e^{-\tau} \tau^{\alpha\lambda_k}\, d\tau \in [0,1].$$

Cette suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite monotone décroissante (on a $p_{n+1} \leq p_n \leq 1$ sur $]0,+\infty[$ pour tout entier n). De plus $\lim_{t\to+\infty} p_n(t) = 1$ pour tout entier n. Un théorème taubérien (encore basé sur la règle d'Abel) assure que si $z \in \Pi^+_{x_c}$, on a

$$\sum_{n\geq 1} a_n\, e^{-\lambda_n z} = \lim_{t\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, p_n(t)\, e^{-\lambda_n\, z}.$$

On exprime ceci sous la forme

$$f(z) = \lim_{t\to+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{-\lambda_n z}}{\Gamma(1+\alpha\lambda_n)} \int_{-\infty}^{\log t} e^{-e^{\tau}} e^{\alpha\lambda_k \tau} e^{\tau}\, d\tau \Big).$$

On exploite enfin la convergence uniforme de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n e^{-\lambda_n z}}{\Gamma(1+\alpha\lambda_n)}\, e^{-\lambda_n \zeta}$$

sur la demi-droite $z + \alpha[\log t, +\infty[$ pour conclure à la formule de représentation voulue. $\square$

Preuve du théorème de M. Riesz. Pour exploiter la formule de resommation de Riesz, nous allons transformer le membre de droite de cette formule, à savoir

$$z \longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-e^t}\, \Theta_\alpha(z-\alpha t)\, e^t\, dt$$

en une transformée de Laplace. Si $z = \sigma + i\tau$, on peut exprimer e^z sous la forme w^α en prenant $w = w_z = e^{\sigma/\alpha} \times e^{i\tau/\alpha}$. Si z balaye la droite horizontale $\mathbb{R} + i\tau$, le point $\xi_z = e^t/w_z$ balaye la demi-droite $e^{-i\tau/\alpha} \times \mathbb{R}^+$ et l'on a

$$\Phi_\alpha(z - \alpha t_z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(1+\alpha\lambda_n)}, \xi_z^{\alpha\lambda_n}.$$

La fonction

$$w \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(1+\alpha\lambda_n)}\, \xi_z^{\alpha\lambda_n}$$

est une fonction multiforme Φ de lavariable ξ mais l'on peut re-interpréter la formule de resommation de Marcel Riesz comme l'égalité entre deux fonctions multiformes

$$f(\log w_z^\alpha) = \int_{e^{-i\tau/\alpha}\times\mathbb{R}^+} \Phi(\xi)\, e^{-w_z\, \xi}\, d\xi. \tag{8}$$

On retrouve ici la transformation de Laplace et, avec elle, la notion d'indicateur. On pose donc

$$h_\alpha(\tau) = \limsup_{\rho\to+\infty} \log^+ \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(1+\alpha\, n)} (\rho e^{-i\tau/\alpha})^{\lambda_k} \Big|,$$

de manière à ce que l'on puisse affirmer que l'intégrale figurant au membre de droite de (8) converge (lorsque $w = re^{i\tau/\alpha}$ avec $r > 0$) dès que $r > h_\alpha(\tau)$. On montre aisément que

$$\alpha\, h_\alpha(\tau) = \limsup_{s\to+\infty} [\alpha \log\log^+ |\Phi_\alpha(-s+i\tau)| - s].$$

Attaquons maintenant la preuve du théorème de M. Riesz en partant de formule de resommation, pensée comme l'égalité des fonctions multiformes (8). Le membre de droite de cette formule se prolonge (comme fonction de w) en une fonction holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}(we^{-i\tau/\alpha}) > h_\alpha(\tau)$, ce qui se lit encore si l'on pose $w^\alpha = e^{u+iv}$:

$$u - \sigma_\alpha(\tau) \geq -\alpha \log \frac{v-\tau}{\alpha}, \quad |v-\tau| \leq \pi\,\alpha/2.$$

Dans le plan complexe des $u+iv$, on introduit la courbe paramétrée

$$[-\pi\alpha/2, \pi\alpha/2] \longmapsto (\log\cos(v/\alpha), v).$$

Cette courbe limite un domaine de Jordan borné D_α. La fonction f est holomorphe dans $\sigma+i\tau-\overline{D_\alpha}$ si $\sigma > \sigma_\alpha(\tau)$ et présente des singularités à l'extérieur de ce domaine si $\sigma < \sigma_\alpha(\tau)$. Un point z de la droite horizontale $\mathbb{R}+i\tau$ est donc un point de validité de la formule de resommation étendue dès que f se prolonge analytiquement jusquà être holomorphe dans $z - \overline{D_\alpha}$. On conclut alors que si $x > x_h(\tau)$, alors $x+i\tau$ est dans l'étoile horizontale de Riesz. □

Bibliographie

[ABSW] C. Aistleitner, I. Berkes, K. Seip, M. Weber, Convergence of series of dilated functions and spectral norms of GCD matrices, `ariv:1407.5403v2`

[Ber] V. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933.

[BG1] C. A. Berenstein, R. Gay, Complex variables, an introduction, GTM 125, Springer-Verlag

[BG2] C.A. Berenstein, R. Gay, Complex Analysis and special topics in Harmonic analysis, Springer 2011.

[HLS] H. Hedelmann, P. Lindqvist, K. Seip, A Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in $L^2(0,1)$, Duke Math. J., 88 (1), 1997, pp. 1-37.

[QF1] H. & M. Queffelec, Diophantine approximation and Dirichlet series, Hindustan Book Agency, 2013.

[QF2] H. Queffélec, Espaces de séries de Dirichlet

`http://math.univ-lille1.fr/~ramare/GdT-TAN2014/NotesHQueffelec-22-10-2014.pdf`

[Ort] J. Ortega-Cerdà, Hilbert spaces of Dirichlet series,

`http://org.uib.no/hcaa/ortega-cerda.pdf`

[PY] V. Petkov, A.Yger, Singularités analytiques des séries de Dirichlet, Cours de DEA, Bordeaux 1998

`http://www.math.u-bordeaux1.fr/~ayger/dirichlet.pdf`