Semestre 4, Année 2011-2012 SESSION 1

UE MA4021 : Intégration et équations différentielles

Date : 15 Mai 2012, 14h00-17h00 Durée : 3h00

Polycopié de cours autorisé, à l'exclusion de tout autre document.

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Exercice 1.

Soient a, b, c, d quatre nombres strictement positifs tels que $a < b$ et $c < d$. En utilisant un changement de variable approprié, calculer la surface du domaine plan défini par :

$$D := \Big\{(x, y) \in]0, +\infty[^2\, ;\, ax^2 \le y \le bx^2, \quad c/x \le y \le d/x\Big\}.$$

Soit le changement de variables consistant à poser $u = y/x^2$ et $v = xy$ (dans l'ouvert $U := \{x > 0, y > 0\}$ du plan $\mathbb{R}^2$). Ce changement de variables réalise une bijection de U dans lui même qui est en fait un C^1-difféomorphisme de U dans U. L'application inverse est donnée par :

$$x = \Big(\frac{v}{u}\Big)^{1/3} = u^{-1/3}v^{1/3} \quad , \quad y = u^{1/3}v^{2/3}.$$

Le calcul du jacobien $D(x, y)/D(u, v)$ donne :

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = J(u, v) = \begin{vmatrix} -1/3\, u^{-4/3}\, v^{1/3} & 1/3\, u^{-1/3}\, v^{-2/3} \\ 1/3\, u^{-2/3}\, v^{2/3} & 2/3\, u^{1/3}\, v^{-1/3} \end{vmatrix} = -\frac{3}{9u} = -\frac{1}{3u}.$$

En utilisant la formule de changement de variables dans les intégrales (formule (1.58) , Théorème 1.3 du cours), on trouve :

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx\, dy = \frac{1}{3}\iint_{[a,b]\times[c,d]} \frac{dudv}{u} = \frac{1}{3}\,(d - c)\, \log(b/a)$$

si l'on utilise également le théorème de Fubini-Tonnelli (Théorème 1.4 du cours).

Exercice 2.

Soit

$$\Delta_3 := \Big\{(x, y, z)\, ;\, x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y + z \le 1\Big\}.$$

Calculer l'intégrale

$$\iiint_{\Delta_3} \frac{dx\, dy\, dz}{(1 + x + y + z)^3}.$$

Le domaine d'intégration Δ_3 est aussi défini par les conditions :

$$0 \leq x \leq 1, \quad x \leq x+y \leq 1, \quad x+y \leq x+y+z \leq 1.$$

On peut effectuer le changement de variables consistant à poser :

$$u = x, \quad v = x+y, \quad w = x+y+z.$$

Ce changement de variable réalise un C^1-difféomorphisme entre l'intérieur de Δ_3 et l'ouvert V défini par les conditions :

$$0 < u < v < w < 1.$$

Le jacobien de cette application linéaire inversible vaut d'ailleurs 1. La formule (1.58) de changement de variables dans les intégrales nous donne :

$$\iiint_{\Delta_3} \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3} = \iiint_V \frac{dudvdw}{(1+w)^3}.$$

On utilise ensuite le le théorème de Fubini-Tonnelli (Théorème 1.4 du cours). L'intégrale vaut :

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[u,1]} \Big(\int_{[v,1]} \frac{dw}{(1+w)^3} \Big)\, dv \right) du.$$

Le calcul de cette intégrale donne :

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} \Big(\int_{[u,1]} \Big[-\frac{1}{2(1+w)^2} \Big]_v^1 dv \Big)\, du &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[u,1]} \Big(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+v)^2} \Big)\, dv \right) du \\
&= \int_{[0,1]} \left(\frac{u-1}{8} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+u}\Big) \right) du \\
&= \frac{1}{8} \int_{[0,1]} \frac{(1-u)^2}{1+u}\, du \\
&= \frac{1}{8} \int_{[0,1]} \Big(u - 3 + \frac{4}{1+u} \Big)\, du \\
&= \frac{1}{8} \Big[u^2 - 3u + 4\log(1+u) \Big]_0^1 = \frac{2\log 2 - 1}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 3.

1. *De tel type est l'EDO*

$$t^2 y' + y + y^2 = 0$$

lorsque l'espace des états envisagé est $]0, \infty[\times]0, +\infty[$ *?*

Comme $t \neq 0$ en tout point de l'espace des états, on peut écrire l'équation sous la forme résoluble en y' :

$$y' = -\frac{1}{t^2}\, y - \frac{1}{t^2}\, y^2.$$

On reconnait une équation de Bernoulli avec ici $\alpha = 2$ (*cf.* la section 2.4.3 du cours). On l'intègre en posant $z = 1/y$.

2. *Déterminer, si* (t_0, y_0) *appartient à* $]0, \infty[\times]0, \infty[$*, la solution maximale* (I, y) *du problème de Cauchy :*

$$\begin{aligned} &(t, y(t)) \in \mathbb{R}\times]0, \infty[\quad \text{et} \quad t^2 y'(t) + y(t) + y^2(t) = 0 \\ &y(t_0) = y_0 \quad \text{(condition initiale).} \end{aligned}$$

La nouvelle équation en $z = 1/y$ devient (après multiplication par z^2) :

$$z' = \frac{1}{t^2}\,(z + 1).$$

En posant $Z = z + 1$, on trouve l'équation linéaire homogène

$$Z' = \frac{1}{t^2}\, Z,$$

dont la solution générale (si l'on convient que l'espace des états pour cette équation linéaire est $]0, \infty[\times\mathbb{R}$) est la fonction

$$Z_C : t \in]0, +\infty[\mapsto Ce^{-1/t}, \; C \in \mathbb{R}.$$

En posant

$$y = \frac{1}{z_c} = \frac{1}{Z_C - 1},$$

on trouve que lui correspond la fonction :

$$t \longmapsto y(t) = \frac{e^{1/t}}{C - e^{1/t}}.$$

Pour réaliser la condition initiale imposée, il faut prendre

$$C = C_0 = e^{1/t_0}(1 + y_0)/y_0.$$

On remarque que $\log C_0 > 1/t_0$ car $y_0 > 0$. La solution du problème de Cauchy est alors définie sur l'intervalle ouvert $]1/\log C_0, +\infty[$ par la formule :

$$\forall\, t \in]1/\log C_0, +\infty[, \quad y(t) = \frac{e^{1/t}}{C_0 - e^{1/t}}.$$

3. *Soit $a > 0$. De quel type est l'EDO*

$$y^4(ay' + y) = t$$

envisagée avec espace des états $\mathbb{R}\times]0,\infty[$? Déterminer, étant donné $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 > 0$, la solution maximale (I, y) du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned}&(t, y(t)) \in \mathbb{R}\times]0,\infty[\quad \text{et} \quad y^4(ay'(t) + y(t)) = t\\ &y(t_0) = y_0 \quad \text{(condition initiale).}\end{aligned}$$

Comme la coordonnée y ne s'annule pas dans l'espace des états, et que $a > 0$, l'équation se met sous la forme :

$$y' = -\frac{1}{a}\,y + \frac{t}{a}\,y^{-4}. \qquad (*)$$

C'est encore une équation de Bernoulli, avec $\alpha = -4$ (*cf.* la section 2.4.3 du cours). On pose donc $z = y^{1-\alpha} = y^5$. La nouvelle équation (en z) est obtenue en multipliant $(*)$ par y^4 et s'écrit :

$$z' = -\frac{5}{a}\,z + \frac{5t}{a}. \qquad (**)$$

La solution de cette équation linéaire $(**)$ se fait par la méthode de variation de la constante : la solution de l'équation homogène est donnée par :

$$z(t) = C\exp(-5t/a).$$

La variation de la constante C donne, si l'on reporte dans $(**)$,

$$C'(t) = \frac{5t}{a}\,\exp(5t/a),$$

soit

$$C(t) = (t - a/5)\,\exp(5t/a) + C.$$

La solution générale de l'équation $(*)$ est donc (si l'on prend pour espace des états ici $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$)

$$z_C : t \in \mathbb{R} \longmapsto t - a/5 + C\,\exp(-5t/a).$$

Pour résoudre le probléme de Cauchy posé, il faut choisir C de manière à ce que :

$$t_0 - a/5 + C\ \exp(-5t_0/a) = y_0^5,$$

soit

$$C = C_0 = (a/5 + y_0^5 - t_0)\ \exp(5t_0/5).$$

La solution du problème de Cauchy proposé est défini sur le plus grand intervalle I contenant t_0 sur lequel la fonction :

$$t \mapsto t - a/5 + C_0\ \exp(5t/a)$$

reste positive ; sur cet intervalle I, cette solution est alors la fonction :

$$t \in I \longmapsto \Big(t - a/5 + C_0\ \exp(5t/a)\Big)^{1/5}.$$

Exercice 4.

On considère l'EDO

$$y''(t) - 3\,y'(t) + 2\,y(t) = e^t. \tag{1}$$

(envisagée avec espace des états $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

1. *Pourquoi les solutions maximales de cette EDO sont-elles définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?*

Il s'agit d'une équation linéaire. La propriété mentionnée ici résulte donc du critère de Grönwald (Proposition 2.2 du cours et exemple 2.3).

2. *Déterminer toutes les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de l'EDO homogène :*

$$y''(t) - 3\,y'(t) + 2\,y(t) = 0.$$

Pourquoi cet ensemble de fonctions est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? Quelle est sa dimension ? En donner une base.

Les solutions de l'EDO homogène forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (toute combinaison linéaire de solutions est solution puisqu'il s'agit d'une EDO linéaire à coefficients constants). Du fait du théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz (voir aussi la section 2.4.2 du cours, ici $p = 2$), ce $\mathbb{R}$-espace vectoriel est de dimension 2. Pour trouver une base, on constate que l'équation caractéristique :

$$X^2 - 3X + 2 = 0$$

a deux racines réelles $X = 1$ et $X = 2$ et que donc les fonctions

$$y_1 : t \mapsto e^t, \quad y_2 : t \mapsto e^{2t}$$

sont solutions. Ce sont des solutions $\mathbb{R}$ linéairement indépendantes, car, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, les deux vecteurs $(y_j(t_0), y_j'(t_0))$, $j = 1, 2$, sont linéairement indépendants. On dispose ainsi d'une base.

3. *Déterminer une solution particulière de l'EDO* (1) *en la cherchant sous la forme* $t \mapsto (at + b)e^t$*, où* a *et* b *sont deux constantes réelles que l'on déterminera.*

En écrivant que la fonction $t \mapsto (at + b)e^t$ est solution de l'EDO avec second membre, puis en divisant par e^t, on trouve :

$$(at + 2a + b) - 3(at + a + b) + 2(at + b) \equiv 1.$$

On doit donc prendre $a = -1$ pour que cela marche (le choix de b étant indifférent, par exemple, on choisit $b = 0$). La fonction $t \mapsto -te^{-t}$ est donc une solution particulière de l'EDO avec second membre.

4. *Déduire des questions* **2** *et* **3** *la solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{array}{l} (t, y(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y''(t) - 3\,y'(t) + 2\,y(t) = e^t \\ y(t_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(t_0) = y_0' \quad \text{(conditions initiales).} \end{array}$$

La solution générale de l'EDO avec second membre est la somme de la solution particulière trouvée à lq question **3** et de la solution générale de l'EDO homogène. Elle s'exprime donc comme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda - t)e^t + \mu e^{2t},$$

où λ et μ sont drux constantes réelles arbitraires. Pour trouver la solution du probème de Cauchy posé, il faut choisir ces constantes de manière à ce que :

$$\begin{aligned} \lambda_0 e^{t_0} + \mu_0 e^{2t_0} &= t_0 e^{t_0} + y_0 \\ \lambda_0 e^{t_0} + 2\mu_0 e^{2t_0} &= (t_0 + 1)e^{t_0} + y_0'. \end{aligned}$$

Ce système est de Cramer en les deux inconnues λ_0 et μ_0. Il admet une solution unique. La fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda_0 - t)e^t + \mu_0 e^{2t}$$

est alors la solution cherchée.

Exercice 5.
On considère la surface de $\mathbb{R}^3$ définie par les conditions :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{et} \quad z\geq 0,$$

a,b,c désignant trois nombres strictement positifs.
1. *Dessiner la surface Σ.*
Il s'agit de la surface d'un demi-ellipsoide de révolution dont les axes sont les axes de coordonnées. Les longueurs a, b, c figurent ici les longueurs des rayons suivant ces axes.
2. *Vérifier que la surface Σ est paramétrée de manière bijective par :*

$$\sigma \ : (s,t)\in [0,2\pi[\times[0,\pi/2] \longmapsto \big(a\cos s\cos t, b\sin s\cos t, c\sin t\big).$$

Soit S^+ la surface correspondant à l'hémisphère nord de la sphère de rayon 1 et de centre 0. En utilisant la longitude s (variant entre 0 et 2π, la valeur 2π exclue) et la latitude t (variant entre 0 et $\pi/2$), la surface S^+ se paramètre de manière bijective par :

$$(s,t)\in [0,2\pi[\times[0,\pi/2] \longmapsto \big(\cos s\cos t, \sin s\cos t, \sin t\big).$$

On observe ensuite que Σ se déduit de S^+ par la tranformation bijective :

$$(x,y,z)\longmapsto (ax,by,cz).$$

3. *Calculer la normale unitaire pointant dans la direction des $z>0$ au point courant $\sigma(s,t)$ de la surface Σ.*
On calcule :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial s}=\begin{pmatrix}-a\sin s\cos t\\ b\cos s\cos t\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-a\cos s\sin t\\ -b\sin s\sin t\\ c\cos t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}bc\cos s\cos^2 t\\ ac\sin s\cos^2 t\\ ab\sin t\cos t\end{pmatrix}.$$

Comme $\sin t\cos t\geq 0$ lorsque $t\in]0,\pi/2[$, ce vecteur est bien dirigé dans la direction des $z>0$. Le carré de la norme de ce vecteur vaut d'autre part :

$$a^2b^2\sin^2 t\cos^2 t+b^2c^2\cos^2 s\cos^4 t+a^2c^2\sin^2 s\cos^4 t=\cos^2 t\, N(t,s).$$

Le vecteur unitaire demandé est donc :

$$\vec{n}_{\text{ext}}(s,t)=\frac{1}{\cos t\times\sqrt{N(t,s)}}\begin{pmatrix}bc\cos s\cos t\\ ac\sin s\cos t\\ ab\sin t\end{pmatrix}.$$

4. *Calculer le flux du champ de vecteurs* $(x, y, z) \mapsto \vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$ *à travers la surface* Σ.

Ce flux est égal par définition, compte-tenu des calculs de la question **3**, à :

$$abc \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]} \cos t \sin^2 t \, ds dt = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/2} d[\sin^3 t] = \frac{2\pi abc}{3}.$$

FIN