Licence 3 Traitement du Signal
Université de Bordeaux Année 2011/2012

Examen de deuxième session

Dans cet examen, les normalisations ci-dessous ont été adoptées:

– La transformée de Fourier discrète est donnée par

$$\mathcal{F}_N[a](k) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{-2i\pi jk/N} \qquad \mathcal{F}_N^{-1}[a](k) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{2i\pi jk/N}.$$

– Les coefficients de Fourier d'une fonction f 1-périodique sont définis par

$$c_k(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Les sommes partielles de la série de Fourier de f sont notées

$$S_N(f)(t) = \sum_{k=-N+1}^{N} c_k(f)e^{2i\pi kt}.$$

On note $S(f)$ la somme de la série de Fourier de f (si elle existe).

– $\delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

– Le noyau de Fejer est défini par

$$F_N(t) = \sum_{k=-N}^{N}\left(1 - \frac{k}{N+1}\right)e^{2i\pi kt}.$$

– La convolution de deux suites $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $b = (b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est la suite $c = a * b = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ donnée par

$$c_k = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} a_\ell b_{k-\ell}.$$

Exercice 1.

Soit $\omega > 0$ et $N \geq 2$ un entier. On considère la suite N-périodique $a = (a_k)$ définie pour $k \in \{0, \ldots, N\}$ par $a_k = e^{2i\pi\omega k}$.

Calculer $\mathcal{F}_N[a](\ell)$ en fonction de ℓ et de ω.

Exercice 2.

Soit f et g les fonctions 1-périodique définies sur $[-1/2, 1/2]$ par $f(x) = |x|$ et $g(x) = x^2$.

(1) Dessiner les graphes de f et g sur $[-1/2, 3/2]$. Quelle est la régularité de f et de g Que pouvez-vous en déduire sur leurs séries de Fourier.

(2) Calculer les coefficients de Fourier $c_k(f), c_k(g)$ de f et g.

(3) En remarquent que $g = f^2 = f \times f$ quelle relation pouvez vous en déduire entre $c_k(f)$ et $c_k(g)$.

(4) On veut résoudre l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = g(x) \\ \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} y(x)\,\mathrm{d}x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

On suppose que (1) a une solution y de classe $\mathcal{C}^1$ qui est $\mathcal{C}^2$ par morceaux.
(a) Que pouvez vous dire sur les séries de Fourier de y et de y'.
(b) Que pouvez vous dire sur $c_0(y)$.
(c) Déterminer $c_k(y)$ en fonction de $c_k(f)$.
(d) En déduire la série de Fourier de y.
(e) Montrer que cette série converge normalement ainsi que sa série dérivée et en conclure que y est bien de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 3.
Dans cet exercice, on étudie une transformée analogue à la transformée de Fourier à temps discret: la transformée en z.

Pour une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $z \in \mathbb{C}$, on définit
$$Z[a](z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^{-n}.$$

Dans tout cet exercice, on supposera que $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire $\|a\|_1 := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n| < +\infty$.

(1) Montrer que $Z[a](z)$ est bien définie si $|z| = 1$.
(2) En écrivant $z = e^{-2i\pi\theta}$ que reconnaissez vous? En déduire que $a \to Z[a]$ est injective.
(3) Soit $\ell \in \mathbb{Z}$ et $T_\ell a(k) = a(k-\ell)$. Exprimer $Z[T_\ell a](z)$ en fonction de $Z[a]$.
(4) Soit $\breve{a}(k) = a(-k)$. Exprimer $Z[\breve{a}](z)$ en fonction de $Z[a]$.
(5) Montrer que, si $\operatorname{supp} a := \{n : a_n \neq 0\} \subset \{0, 1, \ldots\}$, alors $Z[a](z)$ est définie pour $|z| \geq 1$.
Que pouvez vous dire si $\operatorname{supp} a := \{n : a_n \neq 0\} \subset \{\ldots, -1, 0\}$?
(6) Soit $\zeta \in \mathbb{C}$ avec $|\zeta| < 1$ et $a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ \zeta^k & \text{si } k \geq 0 \end{cases}$. Calculer $Z[a](z)$.
(7) Soit $\zeta \in \mathbb{C}$ avec $|\zeta| > 1$ et $a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 0 \\ \zeta^k & \text{si } k \leq 0 \end{cases}$. Calculer $Z[a](z)$.
(8) Soit $r > 1$. Supposons que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| r^{-k}$ converge. Montrer que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| s^{-k}$ converge pour $1 \leq s \leq r$ et en déduire que $Z[a]$ est définie sur $\mathcal{A}(1, r)$ où $\mathcal{A}(\alpha, \beta =) := \{z \in \mathbb{C} : \alpha \leq z \leq \beta\}$.
Que pouvez vous dire si $r < 1$.
(9) Soient $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$.
(a) Montrer que $a * b \in \ell^1(\mathbb{Z})$.
(b) Montrer que si $\operatorname{supp} a, \operatorname{supp} b \subset \{0, 1, \ldots\}$ alors $\operatorname{supp} a * b \subset \{0, 1, \ldots\}$.
(c) Montrer que $Z[a * b](z) = Z[a](z)Z[b](z)$.
(10) On considère maintenant un système dont l'entrée est une suite $a = (a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ et la sortie une suite $b = (b_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ reliée à a par l'équation aux différences
$$b(j-2) - 3b(j-1) + 2b(j) = a(j).$$
(a) Montrer que $Z[b](z) = H(z)Z[a](z)$ avec H une fraction rationnelle.
(b) Donnez la décomposition en éléments simples de H.
(c) En déduire une suite $h = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que $H = Z[h]$.
(d) En déduire que $b = h * a$.