TP2-TD Les séries de Fourier et leur comportement

Exercice 1 (intégalité de Wirtinger). Soit f une fonction 1-périodique de classe C^1 et de moyenne (*i.e.* le coefficient de Fourier $c_0(f)$) nulle sur $[0,1]$. Montrez, en utilisant la conservation de l'énergie par prise de spectre) que

$$\int_0^1 |f(\theta)|^2\, d\theta \leq \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^1 |f'(\theta)|^2\, d\theta.$$

Dans quels cas a-t'on égalité ?

Exercice 2 (Noyaux de Dirichlet et Féjer).

(1) Quelle est la fonction 1-périodique D_N dont les coefficients de Fourier

$$c_k(f) := \int_{-1/2}^{1/2} f(\theta)\, e^{-2i\pi k\theta}\, d\theta,\ \ k\in\mathbb{Z},$$

sont donnés par

$$c_k = 1 \quad \forall\, k \in \{-N,...,N\}, \quad c_k = 0 \text{ sinon ?}$$

(2) Téléchargez depuis le site

```
http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/
      MATLABSignal/RoutinesTP/test10.10
```

les deux routines `spectre` et `ispectre`. La routine

```
>> Shat = spectre (S,1/2);
```

(`S` doit être déclaré ici en colonne) permet, étant donné un signal digital de longueur `2*M` sur $[-1/2,1/2[$, correspondant à l'échantillonnage d'un signal analogique 1-périodique S aux `2*M` points `-1/2 + k/M`, `k=0:M-1`, de calculer la liste des `2*M` coefficients de Fourier $c_k(S)$ pour k variant de `-M` à `M-1`. La routine `ispectre` permet d'inverser cette opération. En utilisant `ispectre` sous la forme

```
>> S = ispectre(spectre,2*pi*M);
```

où `spectre` désigne la liste des coefficients de Fourier $c_k(S)$, `k=-M:M-1` (déclarée encore en colonne), affichez le graphe de la fonction D_N sur l'intervalle $[-1/2,1/2[$, échantillonnée avec un pas de $1/2048$ (la valeur de `N` ne pourra alors dépasser `M` $=1024$, dites pourquoi). Vous pourrez ensuite étudier à tête reposée ces deux routines `spectre` et `spectre` (basées, bien sûr, toutes les deux sur la Transformée de Fourier discrète `dft` (ici de longueur `2*M`).

(3) Quelle est la fonction 1-périodique K_N dont les coefficients de Fourier sont donnés par

$$c_k(f) = (1 - |k|/N), \quad \forall\, k \in \{-N, ..., N\}, \quad c_k = 0 \text{ sinon ?}$$

Affichez le graphe de cette fonction K_N sur $[-1/2, 1/2[$ pour diverses valeurs de N (toujours échantillonnée avec un pas de 1/2048) en utilisant encore la routine `ispectre`. Quelles différences observez vous par rapport au graphe de D_N ?

(4) Déclarez la fonction

```
>> H = hamming (2*N+1);
```

puis affichez (toujours avec la même pas temporel de 1/2048) le graphe de la fonction H_N dont les coefficients de Fourier sont donnés par

$$c_k(f) = \mathtt{H}(-k + N + 1),\ k \in \{-N, ..., N\},\ c_k = 0 \text{ sinon.}$$

Comparez ce graphe à celui des deux autres fonctions D_N et K_N pour les mêmes valeurs de N.

Exercice 3 (Séries de Fourier et formule de Plancherel).

(1) Calculez les coefficients de Fourier de la fonction 1-périodique donnée sur $[-1/2, 1/2]$ par :

$$f\ : \theta \in [-1/2, 1/2] \mapsto 1/4 - \theta^2.$$

Pourquoi la formule

$$1/4 - \theta^2 = \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi^2 k^2} \cos(2k\pi\theta) \qquad (*)$$

est-elle valable sur $\mathbb{R}$?

(2) Retrouvez le graphe de fonction f (avec un pas de 1/2048) en utilisant la routine `ispectre`.

(3) Comment se calculeraient à partir de cette formule les valeurs des trois sommes

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \ ?$$

(4) Calculez les coefficients de Fourier de la fonction 1-périodique définie sur $] - 1/2, 1/2]$ par

$$f(\theta) = e^{2\pi\theta}.$$

Une fois ce calcul fait, faites la recomposition numérique de la fonction en utilisant la routine `ispectre`. Qu'observe t'on (au voisinage de la brisure au niveau de la périodicité aux extrémités $-1/2$ et $1/2$ de l'intervalle) ? Calculez les valeurs des sommes

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{1+k^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}.$$

Exercice 4 (Bruitage et débruitage d'un signal). Générez un signal digital `S` de longueur 2048, qui sera compris ensuite comme périodisé sur $\mathbb{R}$ et de période 1, l'intervalle sur lequel est affiché ici le signal se trouvant être l'intervalle [-1/2,1/2[découpé suivant un maillage de pas 1/2048. La routine `spectre`, appliquée suivant

```
>> Shat = spectre (S,1/2);
```

fournit donc la liste des coefficients $c_k(S)$ de ce signal (considéré maintenant comme un signal analogique 1-périodique) pour k variant de -1024 à 1023. Pour générer le signal S, vous utiliserez la commande sous `Wavelab` :

```
>> WavePath
>> S = MakeSignal ('Piece-Regular', 2048);
```

Le signal `S` généré est ici un signal réel. Vous allez maintenant « bruiter » ce signal analogique en lui ajoutant un bruit aléatoire suivant une loi normale centrée de variance c^2, où c sera un rapport signal sur bruit à définir (prenez par exemple $c = \max($`|S|`$/10)$. Vous introduisez alors le signal « bruité » :

```
>> Sbruite = S + c*randn(1,2048);
```

(1) Transformez le signal `Sbruite` en en prenant son spectre *via* la routine

```
>> spectreSbruite = spectre (S,1/2);
```

(n'oubliez pas de déclarer `S` ici en colonne). Après avoir visualisé le module de `spectreSbruite`, mettez les coefficients de Fourier à 0 dans le champ des hautes fréquences (vous devez estimer au jugé le champ des basses fréquences qu'il vous parait judicieux de conserver), puis revenez en arrière *via* `ispectre`.

```
>> Sdebruite = ispectre(spectreSdebruite,2*pi*1024);
```

Comparez le signal original `S` et le signal `real(Sdebruite)`.

(2) Recommencez l'opération en coupant cette fois les hautes fréquences hors de la même zone $k \in \{-K, ..., K\}$, mais en multipliant cette fois le signal `spectreSbruite` dans la zone centrale (`k=-K:K`) par une fonction de Hamming `hamming(2K+1)`. Comparez avec le résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 5 (Le phénomène de Gibbs, sous l'angle plus « mathématique »). On considère la fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $[-1/2, 1/2[$ par $f(\theta) = 1-2\theta$.

(1) Calculez ses coefficients de Fourier complexes et vérifiez que l'on a

$$S_{2N+1}[f]\,(\theta) = \sum_{k=-(2N+1)}^{2N+1} c_k(f)\, e^{2i\pi k\theta} = \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{\pi(2k+1)} \sin(2(2k+1)\pi\theta)$$

(on pourra faire la vérification avec `ispectre`). Vers quoi tendent ces sommes lorsque N tend vers l'infini et θ est fixé ?

(2) Si l'on pose $\theta_N = 1/(2N+1)$, quelle est la valeur de $S_{2N+1}(\theta_N)$? En utilisant le fait que pour une fonction continue h sur $[0,1]$, on a

$$\int_0^1 h(\theta)\, d\theta = \lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{N} f(k/N) \Big),$$

(calcul approché d'une intégrale *via* les sommes de Riemann) trouvez vers quoi tend $S_{2N+1}(\theta_N)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

(3) On introduit la suite numérique de terme général

$$u_n := \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Pourquoi a-'on $u_1 > \pi/2$? Déduisez en que

$$\lim_{N\to+\infty} \big(\max_{]0,1/2[} S_{2N+1}(\theta)\big) > \pi/2 > 1.$$

C'est ce fait (la limite de ce maximum ne tend pas vers 1, valeur du saut de discontinuité de la fonction f aux bornes de $[-1/2, 1/2]$, mais vers une quantité strictement supérieure à 1) qui met en évidence (de manière ici quantifiée) le phénomène de Gibbs que vous avez déjà observé en TP.

Tout cet exercice peut être accompagné d'une illustration numérique sous `MATLAB`.