Décomposition de Franklin (exercice 10.6)

Soit N un entier de la forme 2^q, $q \in \mathbb{N}$. Si l'on considère un signal digital sur $\{0, \dots, N\}$ comme la version discrétisée (aux points $0, \dots, N$) d'un signal affine par morceaux (avec nœuds aux points entiers), on peut penser ce signal digital comme un élément de l'espace $V_{0,N}$ des signaux sur $[0, N]$ qu'engendrent les $N+1$ fonctions spline sur $[0, N]$

$$t \mapsto \Delta_{0,n}(t) := \max(0, 1 - |t-n|),\ n = 0, \dots, N\,.$$

On vérifiera que ce que l'on conviendra d'appeler la *matrice de Gram* de ce système, à savoir la matrice

$$G_{0,N} := [\langle \Delta_{0,n_1}, \Delta_{0,n_2} \rangle]_{0 \le n_1, n_2 \le N}\,,$$

est ici la matrice bande

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/6 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\ \vdots & . & . & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Considérons le sous espace $V_{1,N}$ de $V_{0,N}$ engendré par les signaux affines par morceaux sur $[0, N]$, à nœuds tous les entiers pairs ; cet espace est de dimension $2^{q-1}+1$ et une base de cet espace est donnée par les fonctions spline

$$t \mapsto \Delta_{1,n}(t) := \max(0, 1-|t/2-n|),\ n = 0, \dots, 2^{q-1}\,.$$

Si $G_{0,N}$ désigne la matrice de Gram de ce nouveau système, la projection $R_0[s]$ du signal digital

$$s = \sum_{n=0}^{N} s_n \Delta_{0,n}$$

sur $V_{1,N}$ est donnée par

$$R_0[s] := \sum_{n=0}^{2^{q-1}} c_{1,n}(s)\Delta_{1,n}\,,$$

où

$$G_{0,N}\begin{bmatrix} c_{1,0}(s) \\ \vdots \\ c_{1,2^{q-1}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{N} s(k)\langle \Delta_{0,k}, \Delta_{1,0}\rangle \\ \vdots \\ \sum_{n=0}^{N} s_n \langle \Delta_{0,n}, \Delta_{1,2^{q-1}}\rangle \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons retrouver une expression de $R_1[s]$ dans la base originelle de V_N, c'est à dire visualiser $R_1[s]$

comme un signal digital sur $\{0,\dots,N\}$, en utilisant les relations immédiates

$$\begin{aligned}
\Delta_{1,0} &= \Delta_{0,0} + \frac{\Delta_{0,1}}{2} \\
\Delta_{1,n} &= \frac{\Delta_{0,n-1}}{2} + \Delta_{0,n} + \frac{\Delta_{0,n+1}}{2}\,, \\
& \qquad n = 1,\dots,2^{q-1}-1 \\
\Delta_{1,2^{q-1}} &= \Delta_{0,N} + \frac{\Delta_{0,N-1}}{2}\,.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi une décomposition orthogonale

$$s = R_0[s] + (s - R_0[s]) = R_0[s] + D_0[s]\,,$$

(R pour *résumé*, D pour *détails*). Le signal $R_0[s]$ peut être imaginé comme une *version floue* (ou disons *dégrossie*) du signal digital originel s, tandis que $D_0[s] := s - R_0[s]$ représente le signal correspondant aux détails que le dégrossissage a en quelque sorte gommé. L' algorithme que nous proposons requiert les deux sous- programmes `gram` et `frankaux` et s'exploite sous la forme

```
>> R_0[s]=franklin (0,q,S)
```

L'opérateur R_0 figurant ici est exactement (dans ce contexte numérique des signaux digitaux sur un ensemble finis et non plus sur $\mathbb{Z}$) l'opérateur $\mathbf{R}_p$ de l'exercice 10.6, avec ici $p = 2$, agissant sur un signal digital défini sur $\{1,\ldots,2^q+1\}$. L'algorithme peut s'itérer comme décrit dans le synopsis ci dessus et l'on peut obtenir une décomposition orthogonale

$$s = D_0[s] + D_1[s] + D_2[s] + \cdots + D_k[s] + R_k[s]$$

lorsque k désigne un entier entre 1 et q. Le programme `plfr` nous permet de visualiser cette décomposition. On trouvera avec la routine `nfrankl` l'implémentation digitale des opérateurs $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ et $\mathbf{R}_5$ (suivant ici les notations de l'exercice 10.6), la routine offrant aussi la possibilité de les combiner. On pourra tester ces diverses routines sur les quatre signaux (de longueur $2^{11}+1$) proposés dans le dossier `exo10.6`, figurant respectivement la vorticité, les deux composantes de la vitesse et la pression en un point dans un écoulement turbulent 2D (voir le complément 10.3). On tronquera au préalable ces signaux de manière à ce qu'ils soient de longueur $2^{q_1}3^{q_2}5^{q_3}+1$ pour se prêter à la combinaison de ces opérations digitales.