TP3-TD Analyse de Fourier (EDO, prise de spectre « fenêtrée »)

EXERCICE 1 (Séries de Fourier et EDO).

(1) Soit f la fonction 1-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, \theta \in [-1/2, 1/2],\ f(\theta) = |\cos(2\pi\theta)|,$$

puis prolongée ensuite par 1-périodicité sur $\mathbb{R}$. Calculez ses coefficients de Fourier complexes $c_k(f)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pourquoi pouvez vous affirmer que

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ |\cos(2\pi\theta)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1} \cos(4\pi k\theta)\ ?$$

Vérifiez pareille formule sous `MATLAB` en exploitant la routine `ispectre`.

(2) On suppose que $\theta \mapsto y(\theta)$ est une fonction réelle 1-périodique de classe C^2 solution de l'EDO :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad y''(\theta) + Ky(\theta) = f(\theta) \qquad (*)$$

(où K désigne ici une constante strictement positive). Pourquoi les deux fonctions $\theta \mapsto y(\theta)$ et $y \mapsto y''(\theta)$ admettent-elles toutes les deux des développements en série de Fourier uniformément convergent sur $\mathbb{R}$? Vérifiez que l'on a, au niveau des coefficients de Fourier complexes, les relations

$$\forall\, k \in \mathbb{Z},\ (K - 4\pi^2 k^2)\, c_k(y) = c_k(f).$$

Pour quelles valeurs de K pouvez vous affirmer qu'il y a existence et unicité d'une telle solution 1-périodique φ de l'EDO $(*)$? Pour quelles valeurs de K n'y a-t'il aucune solution $\theta \mapsto y(\theta)$ de classe C^2 et 1-périodique possible ? Pour quelles valeurs de K n'y-a-'il qu'une seule solution de classe C^2 1-périodique possible pour l'EDO $(*)$? Quelle est dans ce cas <u>la</u> solution 1-périodique de l'EDO $(*)$? En utilisant `ispectre`, affichez le graphe de cette unique solution $\theta \mapsto y(\theta)$ lorsque la constante K est fixée égale à 1.

(3) Que se passe-t'il lorsque la constante K est de la forme $4\pi^2(2N+1)^2$, où N est un entier positif ? Y-a-'il dans ce cas toujours unicité de la solution ? Vérifiez que, dans le cas particulier où $K = 4\pi^2$ (c'est-à-dire $N = 1$), dire que $\theta \mapsto y(\theta)$ est solution de l'EDO $(*)$ équivaut à dire que

$$y(\theta) = a\cos(2\pi\theta) + b\sin(2\pi\theta) + \frac{1}{2\pi^3} + \frac{1}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k^2-1)^2} \cos(4\pi k\theta),$$

où a et b sont des constantes réelles arbitraires. Représentez les graphes de certaines solutions en choisissant numériquement a et b de l'ordre de 10^{-3}.

Exercice 2 (la prise de spectre fenêtrée (première initiation)).

(1) Téléchargez depuis le site

```
http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/
      MATLABSignal/RoutinesTP/test10.27
```

le signal digital `signal` et affichez son graphe avec `plot`.

(2) En utilisant les routines `fft` et `fftshift`, réalisez un code `spectrogramme1` qui, étant donnée une fenêtre glissante `FEN` de `2*M` points (positionnée par exemple à partir de l'indice `k`), renvoie, pour chaque valeur de `k` (correspondant à la position de la fenêtre) le module du spectre du signal fenêtré `signal(k:k+2*M-1).*FEN`. On pourra s'inspirer pour cela de la syntaxe du code `spectrogramme` fourni sous le même lien. On doit ainsi récupérer en sortie un tableau à deux entrées (l'entrée `k` repérant la position de la fenêtre, l'entrée `p` repérant la position de la fréquence dans le domaine fréquentiel `[-M*pi (M-1)*pi]` échantilloné ici avec un pas égal à `2*pi`. Affichez avec `image` le résultat et extrayez en l'information fréquentielle portant sur le contenu du signal.

(3) On utilisera à partir de maintenant le code `spectrogramme` disponible sur le site ci-dessus. Avec la routine `signaltest` (option 1), générez des signaux analogiques sur $[0, 1]$ présentant évolution linéaire de fréquence dans des fenêtres temporelles définies aléatoirement, par exemple :

```
>> x1=signaltest(0,1/2048,1-1/2048,648.78*pi,720,200,500,2);
>> x2 =signaltest(0,1/2048,1-1/2048,648.78*pi,1521,200,700,3);
```

Effectuez une analyse en temps et en fréquences (simultanément) de ces signaux en utilisant la routine `spectrogramme` et des fenêtres glissantes d'exploration temporelle `FEN` de longueur 256, 128 ou 64 (comparez la qualité des résultats). Utilisez les commandes `image` ou `imagesc` pour visualiser les tableaux obtenus.

(4) Refaites l'étude avec des signaux générés *via* `Wavelab`, par exemple :

```
>> WavePath
>> x3 = MakeSignal ('LinChirp',2048);
>> x4 = MakeSignal ('TwoChirp',2048);
>> x5 = MakeSignal ('Chirps', 2048) ;
```

(5) Sur le site

```
http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/
      MATLABSignal/Audio
```

téléchargez les quatre fichiers `wav` suivants :
`Mix11.wav`, `Mix21.wav`, `Mix12.wav`, `Mix22.wav`.
Chargez ces fichiers audio (tous enregistrés ici à 44100 Hz) en vous souvenant de la routine :

```
>> [S,Fs,Nb] = wavread('toto.wav');
```

Ecoutez les deux signaux `Mix11.wav` et `Mix12.wav` ; vous y reconnaitrez en principe deux instruments. Ecoutez ensuite les deux signaux `Mix12` et `Mix22` ; vous constaterez qu'un troisième instrument a été ajouté. Effectuez une analyse en temps et en fréquences des signaux `Mix11` et `Mix21` en prenant une fenêtre d'exploration de longueur 2048 dans la routine `spectrogram` (vous pourriez aussi utiliser la routine `spectrogramme` précédente, mais autant exploiter ici la routine `spectrogram` disponible sous `MATLAB`, regardez simplement le `help` de cette routine). Si `f` désigne chaque fois le spectrogramme obtenu, affichez seulement `image(f(1:100,:)` (car ce sont ici les 100 premiers canaux fréquentiels, sur les 2048 canaux possibles, qui contiennent essentiellement toute l'information). Faites la même chose avec les deux signaux `Mix12` et `Mix22`.

(6) Les deux premiers signaux `Mix11` et `Mix21` ont été obtenus à partir de deux signaux source `S1` et `S2` qui ont étés combinés suivant respectivement `Mix11 = S1/3 + 2*S2/3`, `Mix21 = 2*S1/3 + S2/3`. Cela se voit-il à l'examen rapide des (modules des) spectrogrammes de `Mix11` et `Mix21` ? Écrivez un programme `separation1`

```
[f1bis, f2bis] = separation1(f1,f2,T);
```

qui renvoie, étant donnés deux (modules de) spectrogrammes `f1` et `f2`, deux nouveaux (modules de) spectrogrammes `f1bis`, `f2bis` tels que `f2bis = f1` aux pixels où `f1` domine `T*f2` (et `f2bis=0` sinon) et `f1bis = f2` aux autres points (`fibis=0` ailleurs). Pour choisir `T` judicieusement, vous pouvez vous aider de l'information *a priori* que vous avez sur les contenus des signaux composés `Mix11` et `Mix21`. Plus précisément, vous pouvez calculer les deux rapports $(1/3)/(2/3) = 1/2$ (contributions comparées de `S1` dans les deux voix) et $(2/3)/(1/3) = 2$ (contributions comparées de `S2` dans les deux voix), ordonner ensuite ces deux rapports $1/2 < 2$ dans l'ordre croissant et prendre pour seuil T la moyenne gémétrique de ces deux nombres. Pourquoi la moyenne géométrique plutôt que la moyenne arithmétique ? Comment, à partir des deux (modules de) spectrogrammes `f1bis` et `f2bis`, pourrait-on reconstituer les deux sources `S1` et `S2` ? Vous préciserez en particulier quelle phase (celle de `Mix11` ou celle de `Mix21`) il convient de combiner avec chacun des deux (modules de) spectrogrammes `f1bis` et `f2bis`. Utilisez pour la reconstitution l'algorithme `ifft` ou la routine `synthese` proposée dans

```
http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/MATLABSignal/
  RoutinesTP/Routines-feuilleTP3
```

Pour ≪ écouter ≫ les deux signaux `S1` et `S2` que vous venez de recomposer ainsi, utilisez la routine :

```
>> wavwrite(S1,Fs,B,'S1.wav');
>> wavwrite(S2,Fs,B,'S2.wav');
```

(la fréquence en Hertz `Fs` et le nombre de bits d'encodage `B` étant ceux des signaux `Mix11.wav` et `Mix21.wav`). Vous devriez constater que vous avez bien séparé les deux sources (ici synthétiseur et saxo). Cette démarche est à la base de la méthode de *séparation de sources* (ici en l'occurrence, les deux sources composant les signaux `Mix11` et `Mix21`).

(7) Les deux signaux `Mix12` et `Mix22` ont été, eux, obtenus à partir de trois signaux source `S1`, `S2`, `S3`, qui ont étés cette fois ci combinés suivant respectivement

```
Mix21 = .4*S1 + .2*S2+.8*S3
```

`Mix22 = .6*S1 + .8*S2+.2*S3.`
Cela se voit-il encore à l'examen rapide des (modules des) spectrogrammes de `Mix12` et `Mix22` ? On souhaiterait rédiger un programme `separation2`

```
[f1bis, f2bis, f3bis, f4bis] = separation2 (f1,f2,T1,T2);
```

qui renvoie, étant donnés deux (modules de) spectrogrammes `f1` et `f2`, quatre nouveaux (modules de) spectrogrammes `f1bis`, `f2bis`, `f3bis`, `f4bis` en utilisant cette fois deux seuils de comparaison `T1` et `T2` (avec `T1` < `T2`) au lieu d'un seul (`T`, comme à la question précédente).

- `f4bis` = `f1` aux points où `f1` domine `T2*f2` (et soit nul aux autres points) ;
- `f1bis` = `f2` aux points où `f1` est dominé par `T1*f2` (et zéros ailleurs) ;
- `f2bis` = `f2` aux points où `f1` est encadré par `T1*f2` et `T2*f2` (et zéro ailleurs) ;
- `f3bis` = `f1` aux points où `f1` est encadré par `T1*f2` et `T2*f2` (et zéro ailleurs).

Pour choisir `T1` et `T2` judicieusement (et donc concevoir ce programme en ayant en tête que l'objectif est la séparation des trois sources `S1`, `S2` et `S3`), vous pouvez vous aider de l'information *a priori* que vous avez sur les contenus des signaux composés `Mix12` et `Mix22`. Plus précisément, vous pouvez calculer les trois rapports $.4/.6 = 2/3$ (contributions comparées de `S1` dans les deux voix), $.2/.8 = 1/4$ (contributions comparées de `S2` dans les deux voix), $.8/.2 = 4$ (contributions comparées de `S3` dans les deux voix). Rangez ensuite ces rapports dans l'ordre croissant $1/4 < 2/3 < 4$. Comment choisir les deux seuils $T1$ et $T2$ (inspirez vous de la question précédente) ? Concevez alors le programme `separation2` demandé. Comment, à partir des quatre spectrogrammes `f1bis`, `f2bis`, `f3bis`, `f4bis`, pourrait-on reconstituer les deux trois `S1`, `S2` et `S3` ? Vous préciserez en particulier quelle phase (celle de `Mix12` ou celle de `Mix22`) il convient de combiner avec chacun des quatre (modules de) spectrogrammes `f1bis`, `f2bis`, `f3bis` et `f4bis`. Pourquoi vous apparait-il plus raisonnable de conserver deux voix pour le signal `S1` ? Utilisez pour la reconstitution l'algorithme `ifft` ou la routine `synthese` proposée précédemment. Pour « écouter » les trois signaux `S1`, `S2`, `S3` ainsi recomposés, utilisez la routine :

```
>> wavwrite(S1-voix1,Fs,B,'S1-voix1.wav');
>> wavwrite(S1-voix2,Fs,B,'S1.voix2.wav');
>> wavwrite (S2,Fs,B,'S2.wav');
>> wavwrite (S3,Fs,B,'S3.wav');
```

(la fréquence en Hertz `Fs` et le nombre de bits d'encodage `B` étant ceux des signaux `Mix11.wav` et `Mix21.wav`). Vous devriez constater que vous avez bien « séparé » les trois sources (ici synthétiseur, clavier, saxo). Ce que vous venez de faire ici constitue une première approche au principe de la séparation de trois sources (ici les trois sources `S1`, `S2`, `S3` composant les deux signaux « mixtes » que sont `Mix12` et `Mix22`). Bien sûr, les choses ici se trouvent amplement facilitées de par le fait que les pondérations des trois sources dans les deux voix sont dans ce cas connues *a priori*.

(8) Réalisez un programme `Maxima` qui, étant donnés deux tableaux `T1` et `T2` de même taille et d'entrées toutes positives et un entier strictement positif `K` donné,

```
>> T = Maxima (T1,T2,K);
```

- d'une part calcule un tableau `T` à `K` lignes et 2 colonnes `M` dont les entrées $\mathtt{T}(\mathtt{k},1)$ et $\mathtt{T}(\mathtt{k},2)$, $\mathtt{k} = 1...,\mathtt{K}$ sont obtenues ainsi : on forme le tableau $\mathtt{Taux} := \sqrt{\mathtt{T1}^2 + \mathtt{T2}^2}$, puis on détermine dans ce tableau les `K` pixels `(i,j)` donnant les valeurs les plus énergétiques `Taux(i,j)` ; pour chacun de ces `K` pixels (numérotés de `k=1` à `K` dans l'ordre décroissant des énergies de `Taux` en ces pixels), on prend comme coordonnées du vecteur `T(k,:)` les valeurs en `(i(k),j(k))` prises respectivement par `T1` et `T2` ;
- d'autre part affiche les `K` vecteur lignes de `T` sous la forme d'un ≪ nuage ≫ de points.

Testez cette routine sur les deux spectrogrammes `f1` et `f2` utilisés à la question précédente. Voit-on apparaitre l'organisation du nuage de points suivant des droites du plan ? Comment interprétez vous ces droites ? Comment sont liés les coefficients du mélange et les pentes de ces droites ?

(9) Écrire une routine qui à partir d'un tableau `T = Maxima (f1,f2,K)` et d'un nombre d'instruments `m` fixé *a priori*, renvoie

```
>>  L = coeff(T,m);
```

la liste de ce que pourraient être les `m` rapports des contributions des divers signaux `S1`, ..., `Sm` dans le ≪ mélange ≫ qui a conduit aux deux voix `f1` et `f2`. Pour cela, vous calculerez les `K` rapports d'intensités des coordonnées des divers vecteurs lignes de `T`, puis vous en formerez l'histogramme (routine `hist` de `MATLAB`), avant que de chercher les `m` pics les plus significatifs de cet histogramme.