TP4-TD Initiation au filtrage digital ou analogique

Exercice 1 (Signaux digitaux et filtrage digital).

(1) Soit $\mathtt{e} = (e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes (correspondant à ce l'on appelle un *signal digital*). On suppose pour l'instant que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |e_k|^2 < \infty.$$

Une telle hypothèse est naturelle car pareille quantité représente du point de vue physique l'*énergie* du signal digital. La suite $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ figure donc un élément de $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ (espace équipé d'un produit scalaire dit *corrélation* : $\langle \mathtt{e}^1, \mathtt{e}^2\rangle := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathtt{e}^1_k \overline{\mathtt{e}^2_k}$. La transformée de Fourier (ou encore *spectre* de $\mathtt{e}$) est par définition la fonction $\mathtt{1}$-périodique définie par :

$$\widehat{\mathtt{e}} : \omega \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} e_k e^{-2i\pi k\omega}.$$

Soit $\mathtt{K}$ un entier strictement positif pair. Justifier pourquoi les deux commandes enchainées :

```
>> ehat = fft(e,K) ;
>> ehatbis = fftshift(ehat) ;
```

ou bien, ce qui revient au même, la routine

```
>> ehatbis = spectre(e,K/2);
```

permettent de calculer la liste des valeurs aux $\mathtt{K}$ points $j/\mathtt{K}$, $j = -\mathtt{K}/2, ..., \mathtt{K}/2-1$, de la fonction continue :

$$\omega \mapsto \sum_{-\mathtt{K}/2}^{\mathtt{K}/2-1} e_k\, e^{-2i\pi k\omega}.$$

(2) Soient $\mathtt{A} = \mathtt{[a0 \ ... \ aN]}$ et $\mathtt{B} = \mathtt{[b0 \ ...bM]}$ deux tableaux déclarés en ligne sous `MATLAB`, de longueur respectives `N+1` et `M+1`. On suppose que $\mathtt{e}$ et $\mathtt{s}$ sont deux signaux digitaux (tous les deux supposés pour l'instant dans $l^2(\mathbb{Z})$) tels que

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{n=0}^{\mathtt{N}} a_k s_{k-n} = \sum_{m=0}^{\mathtt{M}} b_k e_{k-m}. \qquad (\dagger)$$

Vérifiez que l'on a la relation suivante entre les spectres de $\mathtt{e}$ et de $\mathtt{s}$:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\mathtt{N}} a_n e^{-2i\pi n\omega}\Big)\,\widehat{\mathtt{s}}(\omega) = \Big(\sum_{m=0}^{\mathtt{M}} b_m e^{-2i\pi m\omega}\Big)\,\widehat{\mathtt{e}}(\omega) \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}.$$

On suppose que tous les pôles de la fraction rationnelle

$$R(z) = \frac{\sum\limits_{m=0}^{\mathtt{M}} b_m z^{-m}}{\sum\limits_{n=0}^{\mathtt{N}} a_n z^{-n}} \qquad (\dagger\dagger)$$

sont tous strictement inclus dans le disque unité du plan complexe. Calculez le spectre de `s` à partir du spectre de `e`. Vérifiez que la fonction 1-périodique

$$\omega \mapsto R(e^{2i\pi\omega})$$

s'obtient comme la transformée de Fourier de la suite $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ correspondant à la « réponse » `s(e)` au signal digital `e` défini par $e_0 = 1$ et $e_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$. Ce signal digital $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ s'appelle l'*impulsion* en 0 et la suite $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est dite *réponse impulsionnelle* du système (il s'agit d'un opérateur linéaire continu de $l^1(\mathbb{Z})$ dans lui-même) invariant par translation transformant l'entrée `e` en la sortie `s` suivant les règles (†). Un tel opérateur linéaire continu invariant par translation $\mathtt{e} \in l^1(\mathbb{Z}) \to \mathtt{s} \in l^1(\mathbb{Z})$ s'appelle un *filtre stationnaire* et la fraction rationnelle $z \mapsto R(z)$ (à pôles dans le disque unité ouvert) s'appelle la *fonction de transfert* du filtre.

(3) La routine `fir1` permet de réaliser des listes de nombres complexes `A` = `[1]` et `B` = `[b0 ... bM]` de longueurs respectives 1 et `M+1` (dans l'exemple, on prend `M=20`) de manière à ce que la fonction

$$\omega \longmapsto \left[\frac{\sum\limits_{m=0}^{\mathtt{M}} b_m z^{-m}}{\sum\limits_{n=0}^{\mathtt{N}} a_n z^{-n}}\right]_{z=e^{2i\pi\omega}}$$

réalise la coupure des hautes fréquences de valeur absolue au dessus d'un seuil α (proportion de la bande utile de fréquences donnée, qui faut ici visualiser comme $[-1/2, 1/2]$), la coupure des basses fréquences de valeur absolue en dessous d'un seuil β, la coupure des fréquences de valeur absolue à l'extérieur d'un segment $[\alpha, \beta]$. Testez par exemple :

```
>> Blow = fir1(20,.7,'low') ;
>> Bhigh = fir1(20, 0.3, 'high') ;
>> Bband = fir1 (20, [.3 .5], 'bandpass') ;
```

Dans chaque cas, affichez le graphe de la fonction $\omega \mapsto R(e^{2i\pi\omega})$ sur le segment $[0, 1]$ *via* les routines

```
>> [H,F] = freqz (B,[1],NN,'whole',1);
>> plot(F,abs(H));
```

où `NN` désigne le nombre de points d'échantillonnage pris sur $[0, 1]$.

(4) Téléchargez les deux signaux `testA` et `testB` proposés dans

```
http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/
      MATLABSignal/RoutinesTP/test10.11
```

La routine `filter` opère la transformation $\mathtt{e} \mapsto \mathtt{s}$ lorsque les relations en jeu sont les relations (†), les suites `A` et `B` étant précisées. Cette routine est utilisée à partir d'une entrée `e` sous la forme

```
>> s = filter(B,A,e) ;
```

Peuvent être également imposées des conditions initiales

`eInit = [e(Init-k),...,e(Init-1)]`,

avec `k` strictement inférieur au maximum des longueurs des suites `A` et `B`. Des valeurs finales

`sFinal = [sFinal (Final-k+1),... sfinal(Final)]`

sont alors restituées, permettant ainsi l'enchainement ultérieur avec un autre filtre. Les routines correspondantes sont

```
>> [s sFinal] = filter (B,A, e, eInit) ;
```

Sans déclaration préalable de valeurs initiales, celles ci sont prises toutes égales à 0. Testez sur les signaux `testA` et `textB` le filtrage des fréquences (passe bas, passe haut ou passe bande) suivant le choix des paramètres `A`, `B` du filtre.

(5) Étant donnée la fonction de transfert d'un filtre donné (correspondant à deux suites `A` et `B`, tous les pôles de la fraction rationnelle $R(z^{-1}) = \mathtt{B}(z^{-1})/\mathtt{A}(z^{-1})$ se trouvant dans le disque unité ouvert), comment retrouver à partir ce cette fonction de transfert la réponse impulsionnelle du filtre ?

(6) Un filtre rationnel est dit *causal* si la valeur de la sortie $\mathtt{s}_k$ ne dépend que des valeurs des $\mathtt{e}_l$ pour $l \leq k$. À quelle condition sur `A` et `B` (tels que tous les pôles de la fraction rationnelle `R` soient dans le disque unité) le filtre digital transformant `e` en `s` est-il causal ? Utilisez pour cela la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle R donnée en (††). On rappelle que la décomposition d'une fraction rationnelle $F(z) = P(z)/Q(z)$ (exprimée sous forme irréductible) sur $\mathbb{C}$ est donnée, lorsque les pôles de F sont $\alpha_1, ..., \alpha_q$ (avec les ordres respectifs $\mu_1, ..., \mu_q$), par

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = q(z) + \frac{r(z)}{Q(z)} = A(z) + \sum_{\kappa=1}^{q} \sum_{\nu=1}^{\nu_\kappa} \frac{\beta_{\kappa,\nu}}{(z-\alpha_\kappa)^\nu},$$

où q et r sont les polynômes correspondant respectivement au quotient et au reste de la division euclidienne de P par Q. Exprimez la réponse impulsionnelle du filtre à partir de cette décomposition en éléments simples et vérifiez dans ce cas que cette réponse impulsionnelle est bien dans $l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$.

(7) On considère les deux filtres rationnels correspondant aux transformations entrées/sorties régies respectivement par les relations :

$$4s(k) - s(k-2) = e(k) - e(k-1) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$
$$s(k) - 3\,s(k-1) + 2\,s(k-2) = e(k) - e(k-1) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Vérifiez que les fractions rationnelles $R(z)$ correspondant à ces deux filtres sont respectivement

$$R_1(z) = \frac{z(z-1)}{4z^2-1}, \quad R_2(z) = \frac{z}{z-2}.$$

Décomposez en éléments simples ces fractions rationnelles sur $\mathbb{C}$: on rappelle que lorsque α est un pôle simple de $P(z)/Q(z)$ avec

$$P(z) = q(z)Q(z) + r(z)$$

(division euclidienne), le coefficxient $\beta_\alpha = \beta_{\alpha,1}$ s'exprime comme

$$\beta_\alpha = r(\alpha)/Q'(\alpha).$$

Lorsque le pôle α est d'ordre $\nu > 1$, il convient d'écrire

$$\frac{r(z)}{Q(z)} = \frac{1}{(z-\alpha)^\nu} \times \frac{r(z)}{Q_\alpha(z)}$$

(avec donc $Q_\alpha(\alpha) \neq 0$) et d'effectuer ensuite la division du polynôme $r(X+\alpha) = r_{\alpha,0} + r_{\alpha,1}X + \cdots + r_{\alpha,d}X^d$ par le polynôme

$$Q_\alpha(X+\alpha) = Q_\alpha(\alpha) + q_{\alpha,1}X + \cdots$$

suivant les puissances croissantes cette fois ; le début du quotient (on fait la division jusqu'à l'ordre ν) fournit

$$\beta_{\alpha,\nu} + \beta_{\alpha,\nu-1}X + \cdots + \beta_{\alpha,1}X^{\nu-1} + X^\nu H(X)$$

et donne (dans l'ordre inverse) les coefficients $\beta_{\alpha,1}, ..., \beta_{\alpha,\nu}$ voulus. Calculez les réponses impulsionnelles des deux filtres correspondant à R_1 et R_2 et vérifiez qu'elles sont bien toutes les deux dans $l^1(\mathbb{Z})$. Montrez que le second filtre est causal, mais que le premier ne l'est pas.

(8) Un filtre est dit *irréalisable* lorsque le calcul de la sortie à l'instant $k \in \mathbb{Z}$ necessite au préalable le calcul des entrées $e(k+l_\nu)$ où $(l_\nu)_{\nu \geq 0}$ est une suite d'entiers positifs tendant vers $+\infty$. Montrez que si $R(z)$ présente des pôles à l'extérieur du disque unité, alors le filtre correspondant est irréalisable.

Terminons cet exercice par un peu de vocabulaire : de manière tout à fait logique, un filtre correspondant à un jeu de relations entrées/sorties de la forme

$$s(k) + a_1\, s(k-1) + \cdots + a_N\, s(k-N) = b_0\, e(k) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

(avec $b_0 \neq 0$) est dit *Auto-Regressive* (`AR`), tandis qu'un filtre correspondant à un jeu de relations

$$s(k) + a_1\, s(k-1) + \cdots + a_N\, s(k-N) = b_0\, e(k) + \cdots + b_M\, e(k-M) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

(toujours avec $b_0 \neq 0$) est dit *Auto-Regressive* with *Moving Average* (`ARMA`). Les filtres réalisés à la question **3** avec la commande `fir1` étaient du type `MA` (*Moving Average*) car tous les coefficients a_n (saux $a_0 = 1$) étaient supposés nuls dans ces constructions. Un filtre `MA` est nécessairement causal, comme l'est d'ailleurs un filtre `ARMA` lorsque tous les pôles de $R(z)$ sont à l'intérieur du disque unité dans $\mathbb{C}$ et que cette fraction rationnelle ne présente pas de partie entière (*cf.* la question **6**). Un filtre `ARMA` est irréalisable à partir du moment où la fraction rationnelle correspondante $R(z)$ présente des pôles dans $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| > 1\}$.

Exercice 2 (Filtres rationnels analogiques et digitalisation).