TP5-2013. Morphologie mathématique de l'image

Exercice 1 (Éléments structurants, érosion et dilatation d'une image binaire). Soit $p \in [1, +\infty[$, N_1, N_2 deux entiers pairs strictement positifs et a, b deux nombres réels respectivement entre 0 et $N_2/2$ et entre 0 et $N_1/2$.

(1) Construisez avec un code

```
>> I = elstructurant(N1,N2,a,b,p);
```

(<u>el</u>ément <u>structurant</u>) l'image périodisée `I(a,b,p)` (dans $\mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/N_2\mathbb{Z}$) ($N_1$ et N_2 étant donnés) de l'image digitale

$$(j,k) \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \left(\frac{|k|}{a}\right)^p + \left(\frac{|j|}{b}\right)^p \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad (j,k) \in \mathbb{Z}^2.$$

(2) Construisez ensuite un code

```
J = convelstruct(I,a,b,p)
```

(« <u>conv</u>olution avec un <u>él</u>ément <u>struct</u>urant ») calculant la convolée d'une image `I` de taille (N_1, N_2) avec l'image `I(a,b,p)` construite à la question **1**.

(3) En utilisant le code `convelstruct` construit à la question **2**, réalisez un code, qui, étant donnée une image binaire `I`, renvoie l'image $\mathcal{E}_{a,b,p}[\mathtt{I}]$ obtenue en érodant l'image `I` avec l'élément structurant correspondant à l'image `I(a,b,p)` réalisée à partir de a, b, p à la question **1**. On rappelle que cette image érodée est définie comme l'image binaire `J` telle que

$$\mathtt{J(j,k)} = 1 \Longleftrightarrow \Big(\mathtt{I} * \check{\mathtt{I}}\mathtt{(a,b,p)}\Big)[j,k] = \mathtt{sum}\,(\mathtt{I(a,b,p)}(:)),$$

où l'image $\check{\mathtt{I}}$`(a,b,p)` est obtenue par transformation de `I(a,b,p)` par la symétrie par rapport à l'origine $(j,k) \mapsto (-j,-k)$ (ici sans effet puisque l'élément structurant choisi est symétrique).

(4) En utilisant le code `convelstruct` construit à la question **2**, réalisez un code, qui, étant donnée une image binaire `I`, renvoie l'image $\mathcal{D}_{a,b,p}[\mathtt{I}]$ obtenue en dilatant l'image `I` avec l'élément structurant correspondant à l'image `I(a,b,p)` réalisée à partir de a, b, p à la question **1**. On rappelle que cette image érodée est définie comme l'image binaire `JJ` telle que

$$\mathtt{JJ(j,k)} = 1 \Longleftrightarrow \Big(\mathtt{I} * \check{\mathtt{I}}\mathtt{(a,b,p)}\Big)[j,k] \geq 1.$$

Pensez à utiliser ici la règle de dualité :

$$\mathcal{D}_{a,b,p}[\mathtt{I}] = \mathtt{ones}(N_1, N_2) - \mathcal{E}_{a,b,p}[\mathtt{ones}(N_1, N_2) - \mathtt{I}].$$

Exercice 2 (érosion et dilatation d'une image à N niveaux de gris). Soit `I(a,b,p)` un élément structurant comme à l'exercice **1**, considéré ici comme image périodique à N_1 lignes et N_2 colonnes, N_1 et N_2 désignant deux entiers strictement positifs pairs.

(1) Si `I` désigne une image de taille (N_1, N_2) codée sur N niveaux de gris (normalisée pour que ces niveaux de gris se répartissent dans la gamme $[0,(N-1)/N]$), réalisez une routine `erosion`

```
>> J = erosion (I,a,b,p);
```

qui transforme l'image `I` en l'image érodée $\mathcal{E}_{a,b,p}[\mathtt{I}]$ définie comme suit :

$$\mathcal{E}_{a,b,p}[\mathtt{I}]\ : (j,k) \longmapsto \min_{\{(j',k')\,;\,\mathtt{I(a,b,p)}(j',k')=1\}} \mathtt{I}(j+j',k+k').$$

On prolongera préablement l'image `I` en l'entourant de manière symétrique par des `1` (`1-padding`) dans un cadre de taille $(2N_1, 2N_2)$.

(2) Modifiez ce code en un code

```
>> JJ = erosionbis(I,a,b,p,h);
```

de manière à ce que l'image `I` soit transformée en l'image érodée (avec cette fois un élément structurant « non plat ») définie comme suit :

$$\mathcal{E}_{a,b,p,h}[\mathtt{I}]\ : (j,k) \longmapsto \max\Big(0, \min_{\{(j',k')\,;\,\mathtt{I(a,b,p)}(j',k')=1\}} \big(\mathtt{I}(j+j',k+k') - \mathtt{h}(j',k')\big)\Big),$$

où `h` désigne une image digitale nulle en dehors du support de l'élément structurant `I(a,b,p)` (érosion par un élément structurant non plan[1] de support le support de `I(a,b,p)`). On peut également envisager une image `h` non nécessairement positive (mais prenant ses valeurs dans $]-1,1[$).

(3) Réalisez une routine `dilatation`

```
>> JJ = dilatation (I,a,b,p);
```

qui transforme l'image `I` en l'image dilatée $\mathcal{D}_{a,b,p}(\mathtt{I})$ définie comme suit :

$$\mathcal{D}_{a,b,p,h}[\mathtt{I}]\ : (j,k) \longmapsto \max_{\{(j',k')\,;\,\mathtt{I(a,b,p)}(j',k')=1\}} \mathtt{I}(j+j',k+k').$$

On prolongera préablement l'image `I` en l'entourant de manière symétrique par des `0` (`0-padding`) dans un cadre de taille $(2N_1, 2N_2)$.

(4) Modifiez ce code en un code `dilatationbis`

```
>> JJ = dilatationbis(I,a,b,p,h);
```

de manière à ce que l'image `I` soit transformée en l'image dilatée définie comme suit :

$$\mathcal{D}_{a,b,p,h}[\mathtt{I}]\ : (j,k) \longmapsto \max\Big(0, \max_{\{(j',k')\,;\,\mathtt{I(a,b,p)}(j',k')=1\}} \big(\mathtt{I}(j+j',k+k') + \mathtt{h}(j',k')\big)\Big),$$

où `h` désigne une image digitale nulle en dehors du support de l'élément structurant `I(a,b,p)` (dilatation par un élément structurant non plan de support le support de `I(a,b,p)`). On peut également envisager une image `h` non nécessairement positive (mais prenant ses valeurs dans $]-1,1[$).

1. La troisième dimension figurant ici la profondeur des niveaux de gris.

Exercice 3 (ouverture, fermeture, granulométrie et anti-granulométrie). On rappelle que si `B` est un élément structurant (toujours considéré comme une image périodique de taille (N_1, N_2)), l'*ouverture* d'une image périodique `I` de taille (N_1, N_2) par l'élément structurant `B` est défini comme

$$\gamma_{\mathtt{B}}[\mathtt{I}] := \mathcal{D}_{\check{\mathtt{B}}}\big[\mathcal{E}_{\mathtt{B}}[\mathtt{I}]\big]$$

tandis que la *fermeture* de `I` est définie par

$$\varphi_{\mathtt{B}}[\mathtt{I}] := \mathcal{E}_{\check{\mathtt{B}}}\big[\mathcal{D}_{\mathtt{B}}[\mathtt{I}]\big].$$

(1) Réalisez des codes

```
>> O = ouverture (I,a,b,p);
>> F = fermeture (I,a,b,p);
```

réalisant l'ouverture et la fermeture d'une image digitale à N niveaux de gris de taille (N_1, N_2) avec l'élément structurant (plat) `I(a,b,p)`.

(2) Réalisez des codes permettant de réaliser, sous forme de matrices de taille (N_1, N_2, K), la granulométrie et l'antigranulométrie d'une image digitale `I` (à N niveaux de gris) à partir de la suite d'éléments structurants

$$\mathtt{I}(a_k, b_k, p), \quad a_{K,k} = \frac{N_1}{\alpha^{K+1-k}}, \quad b_{K,k} = \frac{N_2}{\alpha^{K+1-k}}, \quad k = 1, 2, ..., KK \quad (1 \leq KK \leq K)$$

(avec $1 < \alpha \leq 2$ et $\alpha^{K+1-KK} \geq 2$).

```
>> G = granulometrie(I,p,alpha,K,KK);
>> antiG = antigranulometrie (I,p,alpha,K,KK);
```

de manière à ce que, pour tout $k = 1, ..., K$,

$$\mathtt{G(:,:,k)} = \gamma_{a_{K,k}, b_{K,k}, p}[\mathtt{I}]\,, \quad \mathtt{antiG(:,:,k)} = \varphi_{a_{K,k}, b_{K,k}, p}[\mathtt{I}], \quad \mathtt{k=1,...,KK}.$$

(3) Testez ces codes (avec $p = 1$ ou $p = 2$) sur les images `granulometrie.png`, `granulometrie2.png` et `cameraman.png` que vous téléchargerez comme d'habitude depuis le répertoire :

`http://www.math.u-bordeaux1.fr/~ayger/MATLABSignal/Images`

(4) Réalisez des codes qui calculent et renvoient en sortie de la même manière la liste des *gradients morphologiques intérieurs*

$$\mathtt{I} - \mathcal{E}_{a_k, b_k, p}[\mathtt{I}], \quad \mathtt{k=1,...,K}$$

celle des *gradients morphologiques extérieurs*

$$\mathcal{D}_{a_k, b_k, p}[\mathtt{I}] - \mathtt{I}, \quad \mathtt{k=1,...,K},$$

celle enfin des *laplaciens-gradients morphologiques*

$$\frac{\mathcal{D}_{a_k, b_k, p}[\mathtt{I}] - \mathcal{E}_{a_k, b_k, p}[\mathtt{I}]}{2}, \quad \mathtt{k=1,...,K}.$$

Testez ces routines sur les images `squale.png` et `port.png` exploitées dans le cours.

Exercice 4 (*Hit or Miss*, détecteur de coins). Réalisez des routines effectuant la transformée *Hit or Miss* d'une image binaire avec les éléments structurants étendus B_e suivants ($*$ signifie ici « rien »), le centre de l'élément étant dans chaque cas le centre du carré formé par le tableau [3,3].

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 1 \\ * & 1 & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ * & 1 & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & 1 & * \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & 1 & * \\ 1 & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quels sont coins que cette routine *Hit or Miss* détecte (suivant l'élément structurant étendu utilisé) ? On rappelle le principe de la méthode : on positionne le centre choisi pour l'élément structurant sur le pixel (j,k) ; on examine si le contenu de l'image (à l'intérieur du cadre [3,3] de l'élément structurant étendu ainsi positionné) est identique à celui de l'élément structurant étendu (exception faite des points marqués $(*)$) ; si la réponse est OUI, on prend 1 comme valeur au pixel (j,k) pour la nouvelle image ; si la réponse est NON, on prend 0 comme valeur à ce pixel pour la nouvelle image. On construit ainsi à partir de `I` une nouvelle image binaire.