TP6-2013. Transformées de Hough et de Radon

EXERCICE 1 (Construction de la transformée de Hough d'une image binaire). Soit `I` une image binaire de taille (N_1, N_2), considérée comme inscrite dans le cadre $[0, N_2-1] \times [0, N_1-1]$ du plan (puisqu'il s'agit d'un tableau à N_2 colonnes et N_1 lignes). On note (x_c, y_c) le centre de symétrie de cette image.

(1) Si $\theta \in [0, 2\pi]$, quelle est le maximum `Rmax` des valeurs possibles pour

$$\cos\theta \times (x - x_c) + \sin\theta \times (y - y_c)$$

lorsque (x, y) parcourt le cadre $[0, N_2-1] \times [0, N_1-1]$?

(2) Pour une valeur $\theta \in [0, 2\pi]$ fixée, réalisez, après avoir formé la grille cartésienne :

```
>> [X,Y] = meshgrid(0:N2-1,0:N1-1);
```

une routine qui :

– dans un premier temps identifie les pixels (j, k) de `I` où

$$r_\theta(j,k) := \cos\theta \times (x(j,k) - x_c) + \sin\theta \times (y(j,k) - y_c) \geq 0$$

en leur assignant la valeur 0 si ce n'est pas le cas, la valeur 1/2 si cette quantité est nulle, la valeur 1 si elle est strictement positive (exploitez pour cela la fonction `sign`) ;

– dans un second temps construit une image $\mathtt{I}_\theta$ de même taille que `I` telle que

$$\mathtt{I}_\theta(k,l) = 0 \quad \text{si } \mathtt{I(k,l)} = 0$$
$$\mathtt{I}_\theta(k,l) = \mathtt{eps}/2 \quad \text{si } \mathtt{I(j,k)} = 1 \quad \text{et} \quad r_\theta(j,k) = 0$$
$$\mathtt{I}_\theta(k,l) = r_\theta(j,k) + \mathtt{eps} \quad \text{si } \mathtt{I(j,k)} = 1 \quad \text{et} \quad r_\theta(j,k) > 0.$$

– dans un troisième temps, liste en une colonne $\mathtt{C}_\theta$ les entrées non nulles (mais pouvant valoir `eps`/2) de l'image $\mathtt{I}_\theta$.

– calcule enfin l'histogramme :
`h_theta = histc(C_theta,0:tauR:Rmax);`
où `tauR` désigne un pas strictement inférieur à `Rmax` fixé.

(3) En utilisant la routine auxiliaire construite à la question **2**, construisez une routine

```
>> H = Hough(I,tauTheta,tauR);
```

qui, étant donné un pas angulaire `tauTheta` $< 2\pi$ et un pas en la "distance au centre" r (`tauR` $<$ `Rmax (size(I))`), construit l'image de la transformée de Hough de l'image `I` rapportée à la grille cartésienne

$$\mathtt{[0:tauTheta:2*pi]} \times \mathtt{[0:tauR:Rmax]}.$$

(4) Testez cette routine sur une image de contour `Contour1` ou `Contour2` binaire réalisée morphologiquement ainsi :

```
>> II = seuillagebinaire(I,seuilOTSU,N);
>> Contour1 = II - erosionbinaire(II,a,b,p);
>> Contour2 = dilatationbinaire(II,a,b,p) - II;
```

où `I` est une image codée sur `N` niveaux de gris, `seuilOTSU` désigne le seuil optimum fourni par l'algorithme d'Otsu, a, b sont choisis suffisamments petits et $p \geq 1$ (par exemple $p = 1$ ou 2). Prenez l'image `I` dans le vivier habituel (`bordeaux.jpg`, `lena.jpg`, `alsace.jpg`, `venise.jpg`, `hibiscus.bmp`, `cameraman.jpg`, etc.).

Exercice 2 (transformation de Radon discrète). Cet exercice reprend à la lumière du cours sur la transformation de Hough l'exercice 4 de la feuille de TP 2 (cisaillements et rotation d'une image). On rappelle que, si `I` désigne une image (codée sur N niveaux de gris entre 0 et 1) et `theta` $\in [0, 2\pi[$, la routine (élaborée dans le TP2)

```
>> [Iinit,Irot] = rotationdirect(I,theta);
```

– d'une part place l'image au centre d'un cadre (`zeropadding` conduisant à l'image agrandie `Iinit`) carrée de taille minimale (M, M) pour qu'elle puisse pivoter dans ce cadre par rapport à son centre de symétrie sans sortir de ce cadre rectangulaire imparti ;
– d'autre part transforme l'image `Iinit` en sa transformée par rotation d'angle `theta` (dans le sens trigonométrique) et de centre le centre de symétrie commun du cadre des images `I` ou `Iinit`.

Réalisez en utilisant cette routine `rotationdirect` une routine

```
>> [Iinit,S] = Radon(I,tauTheta);
```

qui, étant donné un pas `tauTheta` tel que `tauTheta` $< \pi$, renvoie l'image « encadrée » `Iinit` ainsi qu'une matrice `S` dont le nombre de lignes est $M(N_1, N_2)$ et le nombre de colonnes la longueur du vecteur `Theta = 0 : tauTheta : pi`, de manière à ce que la colonne d'indice `k` de cette matrice figure le vecteur obtenu comme la moyenne des $M(N_1, N_2)$ vecteurs lignes de l'image `Irotk` obtenue par

```
>> [Iinit,Irotk] = rotationdirect(I,Theta(k));
```

Étant donné un nombre $R > 0$ et une fonction positive bornée

$$(x, y) \in \{x^2 + y^2 \leq R^2\} \longmapsto f(x, y) \in [0, \infty[,$$

la transformée de Radon de f est définie comme la fonction

$$R[f] \ : (\theta, r) \in [0, \pi] \times [-R, R] \longmapsto \int_{-R}^{R} f(r\cos\theta - t\sin\theta, r\sin\theta + t\cos\theta)\, dt.$$

En quoi la transformation qui à l'image discrète `I` (considérée ici comme « encadrée » dans l'image carrée `Iinit`) associe `S` est-elle la version discrète de la transformation de Radon (lorsque $R =$ `ceil(M/2)`) ? Dégagez un lien entre la transformation de `Hough` implémentée à l'exercice **1** et cette transformation de Radon discrète `Radon` envisagée ici. Testez cette transformation sur des images binaires de contours obtenues par exemple à partir de `lena.jpg` et comparez avec les résultats obtenus *via* la transformation de Hough.

EXERCICE 3 (inversion de la transformée de Radon discrète par rétro-projection). Soit `I` une image discrète de taille (N_1, N_2) (tous les deux pairs) et `Init`, `S` les variables obtenues par transformation discrète de `I` (exercice **2**) :

```
>> [Iinit,S] = Radon(I,tauTheta).
```

L'inversion de la transformation de Radon (continue) $f \mapsto R[f]$ introduite à la question **3** de l'exercice **2** s'obtient ainsi (on l'admettra dans cet exercice centré sur la rédaction d'un code), lorsque f est une fonction définie dans le disque $D(0, R)$ et nulle hors de ce disque :

– on prolonge $R[f]$ à $[0, 2\pi] \times [-R, R]$ en observant que
$$R[f](\theta + \pi, r) = R[f](\theta, -r) \qquad \forall\, \theta \in [0, \pi]$$
(pourquoi est-ce naturel ?) ;
– on calcule $\big(\partial R[f]/\partial r\big)\,(\theta, r)$ sur $[0, 2\pi] \times [-R, R]$;
– on calcule pour chaque valeur de θ le spectre de la fonction
$$r \mapsto \frac{\partial\, R[f]}{\partial r}(\theta, r)$$
et on « fenêtre » le spectre obtenu (pour chaque valeur de θ) par une fenêtre de Hamming pour « adoucir » la brutalité de la coupure inévitable liée à la troncature des hautes fréquences ;
– pour chaque valeur de θ, on multiplie le spectre tronqué obtenu précédemment par la fonction
$$\omega \mapsto -i\,\mathrm{sign}(\omega)$$
(transformation de Hilbert), ce qui donne dans le domaine fréquenciel pour chaque valeur de θ un signal $\omega \mapsto u(\theta, \omega)$ vivant dans le domaine des fréquences ;
– pour chaque valeur de θ dans $[0, 2\pi]$, on cherche l'antécédent $r \mapsto g(\theta, r)$ du signal $\omega \mapsto u(\theta, \omega)$ obtenu précédemment dans le domaine fréquentiel ;
– on construit enfin la fonction
$$(x, y) \in D(0, R) \longmapsto \int_0^{2\pi} g(\theta, x\,\cos\theta + y\,\sin\theta)\, d\theta$$
(c'est l'étape dite de *rétroprojection*).
– dans le contexte continu, la fonction de deux variables ainsi obtenue doit être multipliée par un facteur $1/(4\pi)$ (cette dernière opération est irrelevante dans le contexte discret).

Le résultat de toutes ces opérations est la fonction f dont la transformée de Radon $R[f]$ était connue et dont on est ici parti.

En utilisant les routines `Gradient.m` (voir le TP3) [pour le point 2], puis `hamming.m`, `spectre.m`, `ispectre.m` (voir le TP4) [pour les points 3, 4 et 5], enfin un code adhoc pour réaliser l'opération de rétroprojection [point 6], réalisez un code

```
>> II = iRadon(S,tauTheta);
```

qui reconstitue l'image `I` à partir de son spectrogramme `S` calculé avec un pas angulaire `tauTheta` par la routine `Radon` élaborée à l'exercice **2**.