Série entière

• **Exercice 1.** (Rayon de convergence)

Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est donné par

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

En déduire la règle de Cauchy et celle de d'Alembert.

Application. Déterminer le rayon de convergence des séries

$$\sum_{n\geq 1} n^k z^n, \quad \sum_{n\geq 1} n^n z^n, \quad \sum \frac{n^k}{n!} z^n, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!} z^n, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n, \quad \sum_{n\geq 0} z^{n!}, \quad \sum_{n\geq 0} (\cos in) z^n \quad \sum_{n\geq 1} (1+a^n) \frac{z^n}{n}.$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right) z^n, \quad \sum_{n\geqslant 0} z^{n^2}, \quad \sum_{n\geqslant 0} \sin(n) z^n, \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin n}{n^2} z^n$$

• **Exercice 2.** (Théorème d'Abel)

Soit $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $0 < R < \infty$. On suppose que cette série converge uniformément sur un sous ensemble Γ non vide du cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$. Montrer que la série converge uniformément sur $\Omega(\Gamma) = \{z = re^{it} , 0 \leq r \leq R , Re^{i\theta} \in \Gamma\}$. En particulier si $z_0 \in \Gamma$, alors

$$\lim_{r\to R-} S(re^{i\theta_0}) = \sum_{n\geq 0} a_n z_0^n, \qquad z_0 = Re^{i\theta_0}.$$

Application. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ converge uniformément sur tout compact de $\overline{\mathbb{D}}\backslash\{1\}$.

• **Exercice 3.** (Théorème de Tauber)

Soit une suite $(a_n) \subset \mathbb{C}$ telle que $na_n = o(1)$ et $\lim_{r\to 1-} \sum_{n\geq 0} a_n r^n = \ell \in \mathbb{C}$.

Montrer que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et à pour somme ℓ.

•**Exercice 4** (Principe des zéros isolés)

Soit $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière non nulle de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que

$$\textbf{Si } n_0 = \inf\{n \geq 0 : a_n \neq 0\}, \quad \textbf{alors} \quad S(z) = a_{n_0} z^{n_0}(1 + \epsilon(z)), \quad \text{avec} \quad \lim_{z\to 0} \epsilon(z) = 0.$$

En particulier, il existe $0 < \rho < R$ telle que pour tout $z \in D(0, \rho)\backslash\{0\}$, on ait $S(z) \neq 0$.

Application. Determiner les séries entières S définies sur $\mathbb{C}$ et vérifiant $S(2^{-n}) = 8^{-n}$. Même question si $S(1/n) = 0$ pour tout $n \geq 0$.

•Exercice 5 (Théorème de Liouville)

Soit $S(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière non nulle de rayon de convergence $R>0$.

1. Montrer que pour tout $0<\rho<R$ on a

$$\sum_{n\geq 0} |a_n|^2\rho^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(\rho e^{it})|^2 dt.$$

Que dire de S si $|S|$ admet un extremum local en 0 ?

2. On pose $M(\rho)=\sup_{|z|<\rho}|S(z)|$, $0<\rho<R$, Montrer l'inégalité de Cauchy,

$$|a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}.$$

3. Montrer que si $R=+\infty$ et si $S(z)$ est bornée sur $\mathbb{C}$, alors S est constante.

3'. Montrer que si $R=+\infty$ et s'il existe $P\in\mathbb{R}_N[X]$ tel que $|S(z)|\leqslant P(|z|)$ sur $\mathbb{C}$, alors $S\in\mathbb{C}_N[X]$.

Application. Soit S une série entière de rayon de convergence $R=+\infty$. Que peut–on dire sur S si l'une des conditions suivantes est satisfaite

- il existe deux réels positifs A et B ona $|f(z)|\leq A+B\sqrt{|z|}$ pour tout z dans $\mathbb{C}$.
- S admet 1 et i comme périodes.

•Exercice 6

Former de deux façons le développement en série entière en 0 de

$$S : x\mapsto \mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

En déduire la relation

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{(2n+1)}$$

•Exercice 7

Soient $p\in\mathbb{N}$ et

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p}{p}x^n$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant cette fonction.
2. Calculer $S(x)$ en étudiant $(1-x)S'(x)$.

•Exercice 8

Determiner toutes les séries entières $S(x)=\sum_n a_n x^n$ telle que

$$(1-x^2)S''(x)-2xS'(x)+\lambda(\lambda+1)S(x)=0.$$