Université Bordeaux I **Analyse Complexe**
Master I de Mathématiques 2012-2013

TD 1

• **Exercice 1.** 1. Un champs de vecteurs complexe dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ s'exprime sous la forme

$$u(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + v(x,y)\frac{\partial}{\partial y},$$

où u et v sont des fonctions complexe de U dans $\mathbb{C}$. Vérifie qu'un tel champ s'exprime aussi sous la forme

$$a(z)\frac{\partial}{\partial z} + b(z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

où

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)$$

avec $z = x + iy$. Calculer a et b en fonction de u et v

2. Le crochet de dualité entre le champ de vecteurs $u\partial/\partial x + v\partial/\partial y$ et la 1–forme $Pdx + Qdy$ avec P et Q des fonctions de U dans $\mathbb{C}$ est défini ponctuellement par

$$\Big\langle u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}, Pdx + Qdy\Big\rangle_{(x,y)} = u(x,y)P(x,y) + v(x,y)Q(x,y).$$

On note par

$$dz = dx + idy, \quad \text{et } d\bar{z} = dx - idy,$$

vérifier que l'on a

$$\Big\langle \frac{\partial}{\partial x}, dx\Big\rangle_{(x,y)} = \Big\langle \frac{\partial}{\partial y}, dy\Big\rangle_{(x,y)} = 1 \quad et \quad \Big\langle \frac{\partial}{\partial z}, dz\Big\rangle_{z} = \Big\langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, d\bar{z}\Big\rangle_{z} = 1$$

$$\Big\langle \frac{\partial}{\partial x}, dy\Big\rangle_{(x,y)} = \Big\langle \frac{\partial}{\partial y}, dx\Big\rangle_{(x,y)} = 0 \quad \text{et} \quad \Big\langle \frac{\partial}{\partial z}, d\bar{z}\Big\rangle_{z} = \Big\langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, dz\Big\rangle_{z} = 0$$

• **Exercice 2.** Déterminer $\partial F/\partial z$ et $\partial F/\partial \bar{z}$ dans les cas suivants, en précisant sur quel domaine F est de classe C^1: $F(z) = z^n \bar{z}^m$, $n, m \geq 0$; $F(z) = \log|z|$.

• **Exercice 3.** 1. Vérifier que pour toute fonction F de classe C^2 et à valeurs complexes dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\Big(\frac{\partial}{\partial z} \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big)[F] = \Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \frac{\partial}{\partial z}\Big)[F] = \frac{1}{4}\Delta[F]$$

où

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

désigne l'opérateur de Laplace en dimension 2.

2. Soit un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et V son image réciproque par l'application

$$(r,\theta) \in]0,\infty[\times\mathbb{R} \to (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}.$$

Vérifier que si F est une fonction de classe C^2 dans U, à valeurs dans $\mathbb{C}$, on a pour $(r,\theta) \in V$

$$\Delta_{(x,y)}[F](r\cos\theta, r\sin\theta) = \Big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Big)[G](r,\theta)$$

si $G(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Déterminer toutes les fonctions F de classe C^2 dans $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, radiales ($F(x,y)$ ne dépend que $\sqrt{x^2+y^2}$), et solution de $\Delta[F] \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

• **Exercice 4.** Soient U et V deux ouvert de $\mathbb{C}$ (les coordonnées y étant respectivement dénotées z et w), f un fonction différentiable de U dans V, g une fonction différentiable de V dans $\mathbb{C}$. Exprimer $\partial(g\circ f)/\partial z$ et $\partial(g\circ f)/\partial\bar{z}$ en fonction de f, g, $\partial f/\partial z$, $\partial f/\partial\bar{z}$, $\partial g/\partial w$ et $\partial g/\partial\bar{w}$.

• **Exercice 5.** Soit $\omega = Pdx + Qdy = Adz + Bd\bar{z}$ une 1-forme de classe C^1 dans un ouvert U. Montrer que

$$dw = dP\wedge dx + dQ\wedge dy = \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dx\wedge dy = \Big(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial\bar{z}}\Big)dz\wedge d\bar{z}.$$

• **Exercice 6.** Montrer qu'une 1–forme de type $f(z)dz$, où f est une fonction C^1 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$, est une forme fermée dans U si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}} \equiv 0 \quad \text{dans } U.$$

• **Exercice 7.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0. A quelle condition une 2-forme continue $\Omega = Fdx\wedge dy$ dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ s'écrit elle $\Omega = d|z|^2\wedge\Xi$, où Ξ est une 1-forme continue.

• **Exercice 8.** Soit $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ un chemin. On désigne par $|\gamma|$ la longueur de γ, donnée par

$$|\gamma| = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|dt.$$

Soit $f\ :\mathrm{Im}\gamma \to \mathbb{C}$ une application continue. On définit

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(s))\gamma'(s)ds.$$

(1) Montrer que

$$\Big|\int_\gamma f(z)dz\Big| \leq \sup_{z\in\mathrm{Im}\gamma} |f(z)||\gamma|.$$

(2) Soit γ est le cercle de centre 0 et de rayon $R > |a|$ orienté positivemen. Montrer que
$$\Big|\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z+a)}\Big| \leq \frac{2\pi R}{R^2 - a^2}.$$

• **Exercice 9.** Calculer les intégrales $\int_\gamma f(z)dz$ dans les cas suivants avec γ orienté positivement :

(1) $f(x+iy) = x$ et γ est le polygône $[-i, -i+1, i+1, i, -i]$.
(2) $f(x+iy) = y$ et γ est le demi-cercle supérieur.
(3) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ et γ est un cercle de centre 0.
(4) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ et γ est le rectangle de sommets $\pm a \pm ib$.
(5) $f(z) = \overline{z}^n$, $n \in \mathbb{Z}$ et γ est le cercle unité.
(6) $f(z) = \frac{1}{z-a}$ et γ est un cercle de centre a.

• **Exercice 10.** Soit $P(z) = \sum_{0 \leq i \leq m} a_i z^i$ un polynôme à coefficients complexes. Calculer
$$J_n = \int_\gamma P(z) z^n dz,$$
où γ désigne le cercle de centre 0 et de rayon R orienté positivement.

• **Exercice 11**. Montrer qu'une 1-forme différentielle dans un ouvert $\mathcal{O}$ est exacte si et seulement si pour tout lacet γ telle que $\mathrm{Im}\gamma \subset \mathcal{O}$
$$\int_\gamma \omega = 0.$$

• **Exercice 12.** Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$, la forme
$$\omega_\alpha := \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{|z|^\alpha}, \qquad z = x + iy,$$
est–elle fermée dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$? exacte dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Calculer
$$\int_{\partial \mathbb{D}} \omega_1.$$

• **Exercice 13.** Montrer que la forme différentielle
$$\omega = (xy - y^2 + 1)dx + (x^2 - xy - 1)dy$$
n'est pas fermée . Déterminer les fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que la forme différentielle $\omega(x,y)f(xy)$ soit exact.

- **Exercice 14.** Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
  (1) Soit φ une fonction continue sur $\mathcal{O}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \mathcal{O}$, déterminer
  $$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{\overline{D}(z_0,\varepsilon)} \varphi(x,y)dxdy.$$
  (2) Soit $f \in C^2(\mathcal{O})$ et soit un disque fermé $\overline{D} \subset \mathcal{O}$. En utilisant le formule de Green-Riemann, calculer
  $$\int_{\overline{D}} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\Big)dxdy.$$
  (3) Conclure.

- **Exercice 15.** Soit $R > 0$ et soit
  $$\omega_0 = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \omega_1 = xdy - ydx$$
  (1) ω_0 et ω_1 sont-elles fermés, exactes?
  (2) Montrer que
  $$\omega_0 = -i\Big(\frac{dz}{z} - d(\log|z|)\Big) \quad \text{et} \quad \int_{\partial D(0,R)} \omega_1 = -i\int_{\partial D(0,R)} \overline{z}dz.$$
  (3) Calculer de deux façons différentes les intégrales suivantes
  $$\int_{\partial D(0,R)} \omega_0, \quad \int_{\partial D(0,R)} \omega_1.$$

- **Exercice 16.** Soit la 1-forme différentielle
  $$\omega = xy^2dx + 2xydy.$$

Calculer l'integrale curviligne
$$\int_{\partial\Omega} \omega,$$
directement et en utilisant la formule de Green, lorsque
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$$
et lorsque Ω est le disque unité. Ici $\partial\Omega$ est parcouru dans le sens positif.