Université Bordeaux 1 Année 2011-2012

M1MI2011 Analyse 1

Feuille d'exercices n° 1 — Suites

Exercice 1 (suites arithmétiques, suites géométriques)

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 2, telle que $u_5 = 7$. Calculer u_{100}.
2. Quelle est la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ?
3. Soit (u_n) une suite géométrique, de raison q strictement positive, telle que $u_3 = 2$ et $u_7 = 18$. Calculer u_{20}.
4. Quelle est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique ?

Exercice 2

On considère les suites

$$\alpha_n = \frac{2+\cos n}{n}, \quad \beta_n = (2+\cos n)n, \quad \gamma_n = (-1)^n(2+\cos n)n, \quad \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

1. Les suites ci-dessus sont-elles bornées ?
2. Sont-elles convergentes ?

Exercice 3

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\pi + \frac{1}{n}$.

1. La suite (u_n) est-elle bornée ?
2. La suite (u_n) est-elle convergente ?
3. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \sin(u_n)$ converge vers 0.

Exercice 4 (suites complexes)

Etudier la convergence des suites de terme général ci-dessous.

$$1.\ z_n = 4 + ni, \quad 2.\ z_n = \frac{n}{n+3i} - \frac{ni}{n+1}, \quad 3.\ z_n = \frac{n^2 i^n}{n^3+1}, \quad 4.\ z_n = (-1)^n e^{in\pi}$$

$$5.\ z_n = e^{ni\frac{\pi}{4}}, \quad 6.\ z_n = \frac{(1+i)^n}{2^n}, \quad 7.\ z_n = e^{(-1)^n \frac{i\pi}{n}}.$$

Exercice 5 (Définition de la limite d'une suite)

1. Montrer que si (u_n) converge alors la limite est unique.
2. Montrer qu'une suite $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si les deux sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes vers la même limite.
3. Étudier la convergence des suites $(u_n)_n$ de terme général

$$u_n = (-1)^n,\ u_n = i^n,\ u_{nj} = \sum_{1 \le k \le n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

4. Montrer que $(1/\sqrt{n})_{n \ge 1}$ converge vers 0 en utilisant la définition de la limite.

Exercice 6

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_1 = 1 \text{ et, pour tout } n \geq 1,\ u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 2$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 7 (Moyenne de Cesàro)

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$c_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}.$$

On dit que (u_n) converge au sens de Cesàro si la suite (c_n) converge.

1. Montrer que la suite $u_n = (-1)^n$ converge au sens de Cesàro vers une limite que l'on déterminera.
2. Montrer que si $(u_n)_n$ convergente vers l alors $(c_n)_n$ est également convergente de limite l.

Exercice 8 (suites de Cauchy)

1. Montrer que la suite $u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ n'est pas une suite de Cauchy.
2. Montrer que la suite $u_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ est de Cauchy.
3. Soit $(u_n)_n$ montrer que la suite définie par $u_n = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k}$ n'est pas une suite de Cauchy. Vers quoi tends u_n quand $n \to +\infty$?
4. Montrer qu'une suite $(u_n)_n$ vérifiant, $\forall n$, $|u_{n+1} - u_n| \leq 2^{-n}$ est de Cauchy.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2+\frac{1}{k})^k}.$$

Montrer que la suite (u_n) est une suite de Cauchy. En déduire qu'elle converge.

Exercice 10

Soit $(H_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1. En utilisant une intégrale, montrer, pour tout $n \geq 1$, l'inégalité double

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

2. En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de H_n.
4. Montrer que la suite $u_n := H_n - \ln(n)$ converge (indication : on montrera que (u_n) est décroissante).

Exercice 11

1. Démontrer qu'une suite réelle (u_n) converge si et seulement si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite.
2. Pour $n \geq 1$, on pose
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$
Montrer que la suite (u_n) converge (indication : on pourra montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes).

Exercice 12

Soient $0 < a < b$, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les deux suites définies par
$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
Montrer que ces suites sont adjacentes.

Exercice 13

On considère les deux suites
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n! \cdot n}$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite, notée e.
2. Montrer que e est irrationnel.

Exercice 14

Calculer $\sup\{u_p,\ p \geq n\}$, $\inf\{u_p,\ p \geq n\}$, $\overline{\lim}_n u_n$ et $\underline{\lim}_n u_n$ pour les suites $(u_n)_n$ suivantes :

1. $u_n = (-1)^n$;
2. $u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$;
3. $u_n = \left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$;
4. $u_n = n^{(-1)^n}$.

Exercice 15

Soit f une application de $[0,1]$ dans lui-même telle qu'il existe un réel positif $0 < k < 1$ tel que
$$\forall x, y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|.$$
Soit $a \in [0,1]$. On considère la suite $(x_n)_n$ définie par $x_0 = a$, $x_n = f(x_{n-1})$, pour $n \geq 1$.

1. Montrer que, $\forall n$, $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n\,|x_1 - x_0|$ et conclure que la suite $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy.
2. Montrer que $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$ est l'unique point fixe de la fonction f.