Université Bordeaux I **Analyse Complexe**

Master I de Mathématiques 2012-2013

TD 2

• **Exercice 1.** Soit φ une fonction de classe C^1 dans $\mathbb{C}$, nulle hors du disque $D(0, R_0)$ avec $R_0 > 0$.

(1) Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{z - \zeta} = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(z + \zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta}, \qquad \zeta = \xi + i\eta$$

(2) Déduire de (1) qu'il existe $\Phi \in C^1$ telle que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}}(z) = \varphi(z), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

• **Exercice 2.** Soit $f \in C^1$ au voisinage du disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ et soit $z \in \mathbb{D}$. En utilisant la formule de Cauchy-Pompeiu pour représenter au point z la fonction

$$\zeta \to f(\zeta) \Big(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} z} \Big)$$

Montrer que

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \Big(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} z} \Big) \frac{d\xi d\eta}{z - \zeta} + \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{(1 - \bar{\zeta} z)^2}.$$

• **Exercice 3.** Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ telle que $0 < |z| < 1$ on a

$$\frac{z}{\bar{z}} = z^2 + \frac{1}{\pi z} \iint_{|\zeta|=1} \Big(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \Big)^2 d\xi d\eta$$

Indication. Considérer le compact à bord orienté $K_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : \epsilon \leq |z| \leq 1\}$ et appliquer la formule de Cauchy-Pompeiu.

• **Exercice 4**. Soit f une fonction de classe C^1 Lebesgue intégrable sur $\mathbb{C}$.

(1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'intégrale $F(z)$ est convergente où

$$F(z) = \iint_{\mathbb{C}} f(z + \zeta) \frac{d\xi d\eta}{\xi}, \qquad \zeta = \xi + i\eta.$$

(2) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que F est de classe C^1 dans $D(z_0, 1/4)$

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) = \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Big[f(z + \zeta) \chi(z + \zeta - z_0) \Big] \frac{d\xi d\eta}{\xi}, \qquad z \in D(z_0, 1/4),$$

où χ est de classe C^1 sur $\mathbb{C}$ de support compact inclus dans $D(0, 1)$ et $\chi | D(0, 1/2) = 1$.

(3) En utilisant la formule de Cauchy Pompeiu, montrer que

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) = -\pi f(z), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

• **Exercice 5.** Soit $p_1, \dots p_m$, m polynômes de n variables sans zéros commun dans $\mathbb{C}$, avec $d = \max(\deg p_j) > 0$.

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction

$$\zeta \in \mathbb{C}\backslash\{z\} \to \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{j=1}^{m} |p_j(\zeta)|^2} \Big) \frac{p_j(\zeta) - p_j(z)}{\zeta - z}$$

se prolonge en une fonction Q_z de classe C^1 dans $\mathbb{C}$. Calculer $Q_z(z-\zeta)+1$.

2. Soit $R > 0$ et $z \in D(0,R)$. Représenter au point z avec la formule de Cauchy–Pompeiu la fonction

$$\zeta \in D(0,R) \to (Q_z(\zeta)(z-\zeta)+1)^2.$$

3. Montrer qu'il existe $q_1, \dots, q_m$ telles que

$$1 = \sum_{j=1}^{m} p_j(z) q_j(z), \qquad z \in \mathbb{C}$$

• **Exercice 6.** 1. Soit γ un chemin fermé définie sur $[0,1]$. On pose

$$\psi(t) = \exp\Big(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} ds \Big), \qquad t \in [0,1].$$

1- Vérifier que l'application $\dfrac{\psi}{\gamma - z}$ est constante et que $\mathrm{Ind}_z(\gamma) \in \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Image}(\gamma)$.

2. Montrer que l'application Ind_γ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Image}(\gamma)$.

3. Montrer que l'application Ind_γ est nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Image}(\gamma)$.

4. Soit η un chemin fermé fermé définie sur $[0,1]$, et soit z_0 n'appartenant pas aux images de γ et η. On suppose que

$$|\gamma(t) - \eta(t)| < |\gamma(t) - z_0|, \qquad t \in [0,1].$$

On pose

$$\phi(t) = \frac{\eta(t) - z_0}{\gamma(t) - z_0}.$$

4.1- Montrer que ϕ est un chemin fermé tel que $\mathrm{Image}(\phi)$ est contenue dans le disque de centre 1 et de rayon un certain $s \in]0,1[$.

4.2- Vérifier que $\mathrm{Ind}_0(\phi) = \mathrm{Ind}_{z_0}(\eta) - \mathrm{Ind}_{z_0}(\gamma)$.

4.3- En déduire que $\mathrm{Ind}_{z_0}(\eta) = \mathrm{Ind}_{z_0}(\gamma)$.

• **Exercice 7.** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0$. On va montrer que P possède une racine. Supposons par l'absurde que P ne s'annule pas. Soit, pour $R \geq 0$, γ_R le chemin de $\mathbb{C}^*$ définit par $\gamma_R(\theta) = P(Re^{i\theta})$, $\theta \in [0, 2\pi]$. On pose $\eta_R(\theta) = a_n R^n e^{in\theta}$. Montrer que si R est assez grand

$$|\eta_R(\theta) - \gamma_R(\theta)| < |\eta_R(\theta)|.$$

En déduire la valeur de $\mathrm{Ind}_0(\gamma_R)$ pour R assez grand et conclure.

• **Exercice 8: Formule de Green** Soit K un compact de $\mathbb{C}$ à bord régulier de classe C^2.

- La ***mesure de longueur*** σ sur ∂K est la somme des mesures de longueur associées aux composantes connexes de ∂K. Si f est une fonction continue alors
$$\int_{\partial K} f d\sigma = \int f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt,$$
où $\gamma : [0,1] \to \partial K$ est un chemin de classe C^2 positivement orienté.
- La ***normale extérieure*** à ∂K en $\zeta_0 \in \partial K$ est le vecteur unitaire $\vec{n}_{ext}(\zeta_0) \in \mathbb{R}^2$ indirectement orthogonal à $\gamma'(t_0)$, où $\gamma : [0,1] \to \partial K$ est un chemin de classe C^2 positivement orienté tel que $\gamma(t_0) = \zeta_0$. Si ζ_0 est un point du bord extérieur, alors $\vec{n}_{ext}(z_0)$ pointe vers la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash K$. Par contre si ζ_0 est un point du bord intérieur -un point à la frontière de l'une des composantes connexes bornées de $\mathbb{C}\backslash K$- alors $\vec{n}_{ext}(z_0)$ pointe vers le trou qu'entoure le lacet . On identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, on a
$$\vec{n}_{ext}(z_0) \equiv -i\frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}$$
- Le ***gradient*** de la fonction u est donné par $\nabla u = (\partial_x u, \partial_y v)$. En identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, on a $\nabla u = \partial_x u + i\partial_y u = 2\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}}$

1. Montrer que si u est de classe C^1 au voisinage de K, alors
$$\iint_K \nabla u(z)dm(z) = \int_{\partial K} u(\zeta)\vec{n}_{ext}(\zeta)d\sigma(\zeta).$$

- Si $\vec{F} = (F_1, F2)$ est un ***champs 2-dimentionnel complexe*** sur un ouvert V i.e. une application de V à valeurs dans $\mathbb{C}^2$. La ***divergence*** de $\vec{F}$ est donnée par $\mathrm{div}(\vec{F}) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2$.

2. Vérifier que $\mathrm{div}(\vec{F}) = \langle \nabla F_1, e_1\rangle + \langle \nabla F_2, e_2\rangle$, où $\{e_1, e_2\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $\vec{F}$ un champs 2-dimentionnel de classe C^1 au voisinage de K, en déduire *la formule de la divergence*
$$\int_{\partial K} \langle \vec{F}, \vec{n}_{ext}\rangle d\sigma = \iint_K \mathrm{div}(\vec{F})dm.$$

- Soit f une fonction de classe C^1 au voisinage de K la ***derivée normale*** de f sur K est donnée par
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}_{ext}}(\zeta) = df(\zeta).\vec{n}_{ext}(\zeta) = \langle \nabla f, \vec{n}_{ext}(\zeta)\rangle, \qquad \zeta \in \partial K$$

3. Vérifier que
$$\mathrm{div}(F\nabla G) = \langle \nabla F, \nabla G\rangle + F\mathrm{div}(\nabla G) = \langle \nabla F, \nabla G\rangle + F\Delta G$$
et
$$\mathrm{div}(G\nabla F) = \langle \nabla G, \nabla F\rangle + G\Delta F$$

Montrer *la formule de Green* : Si F et G sont de classes C^2 au voisinage de K alors

$$\int_{\partial K} F\frac{\partial G}{\partial \vec{n}_{ext}} - G\frac{\partial F}{\partial \vec{n}_{ext}} d\sigma = \iint_K (F\Delta G - G\Delta F) dm.$$

4. Soit F de classe C^2 au voisinage d'un disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$. Montrer que

$$F(z_0) = \int_0^{2\pi} F(z_0 + re^{it})\frac{dt}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{\overline{D(z_0,r)}} \Delta F(z) \log\frac{|z - z_0|}{r} dm(z).$$

Indication. Appliquer la formule de Green à la fonction F ci-dessus et à la fonction $G(z) = \log|z|$ dans les couronne $K_\epsilon = \{\epsilon \leq |z| \leq 1\}$.

5. En déduire que si f est une fonction de classe C^2 au voisinage du disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} f(e^{it}) dt + \frac{1}{2\pi}\iint_{|w|\leq 1} \Delta f(w) \log\left|\frac{z - w}{1 - \bar{w}z}\right|, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Indication. Appliquer le résultat précédent à $f \circ \phi_w$, où $w \in \mathbb{D}$ et

$$\phi_w(z) = \frac{w - z}{1 - \bar{w}z}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

• Correction Exercice 5. Soit $p_1, \dots p_m$, m polynômes sans zéros commun dans $\mathbb{C}$, avec $d = \max(\deg p_j) > 0$.

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction

$$\zeta \in \mathbb{C}\backslash\{z\} \to \sum_{j=1}^m \Big(\frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{l=1}^m |p_l(\zeta)|^2}\Big)\frac{p_j(\zeta) - p_j(z)}{\zeta - z}$$

se prolonge en une fonction Q_z de classe C^1 dans $\mathbb{C}$. Calculer $Q_z(z - \zeta) + 1$.

$\rightsquigarrow$ Puisque

$$\zeta^k - z^k = (\zeta - z)\sum_{i=0}^{k-1} \zeta^{k-1-i} z^i$$

la fonction

$$\zeta \in \mathbb{C}\backslash\{z\} \to \frac{p_j(\zeta) - p_j(z)}{\zeta - z}$$

est de classe C^1 et ainsi Q_z de classe C^1 dans $\mathbb{C}$. Un calcul direct nous donne

$$Q_z(\zeta)(z - \zeta) + 1 = \sum_{j=1}^m \Big(\frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{l=1}^m |p_l(\zeta)|^2}\Big) p_j(z).$$

2. Soit $R > 0$ et $z \in D(0, R)$. Représenter au point z avec la formule de Cauchy–Pompeiu la fonction

$$\zeta \in D(0, R) \to (Q_z(\zeta)(z - \zeta) + 1)^2.$$

$\rightsquigarrow$ Nous allons appliquer la formule de Cauchy Pompeiu à la fonction

$$\varphi_z(\zeta) = (Q_z(\zeta)(z - \zeta) + 1)^2, \qquad \zeta \in D(0, R)$$

On a $\varphi_z \in C^1$ au voisinage du disque fermé $\overline{D(0, R)}$, la formule de Cauchy–Pompeiu donne pour tout $z \in D(0, R)$

$$\varphi_z(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{\varphi_z(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{D(0,R)} \frac{\partial \varphi_z}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{dxdy}{\zeta - z}, \qquad \zeta = x + iy \quad (1)$$

où $\gamma_R : \theta \in [0, 2\pi] \to Re^{i\theta}$. On a $\varphi_z(z) = 1$ et

$$\frac{\partial \varphi_z}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = 2(Q_z(\zeta)(z - \zeta) + 1)(\zeta - z) \frac{\partial Q_z}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)$$
$$= 2(\zeta - z) \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \Big(\frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{l=1}^m |p_l(\zeta)|^2} \Big) \frac{p_k(\zeta) - p_k(z)}{\zeta - z} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \Big(\frac{\overline{p_k(\zeta)}}{\sum_{l=1}^m |p_l(\zeta)|^2} \Big) p_j(z) \quad (2)$$

Puisque $\varphi_z(z) = 1$, les égalités (1) et (2) nous donne

$$1 = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \Big(\int_{\gamma_R} \frac{\overline{p_j(\zeta) p_k(\zeta)}}{\big(\sum_{l=1}^m |p_l(\zeta)|^2\big)^4} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \Big) p_j(z) p_k(z)$$
$$- \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{m} \iint_{D(0,R)} \frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\big(\sum_{l=1}^m |p_l(\zeta)|^2\big)^2} \frac{p_k(\zeta) - p_k(z)}{\zeta - z} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \Big(\frac{\overline{p_k(\zeta)}}{\sum_{l=1}^m |p_l(\zeta)|^2} \Big) p_j(z) dxdy$$

3. Montrer qu'il existe $q_1, \ldots, q_m$ telles que

$$1 = \sum_{j=1}^{m} p_j(z) q_j(z), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

$\rightsquigarrow$ Pour $1 \leq j, k \leq m$, on a pour ζ assez grand

$$\frac{\overline{p_j(\zeta) p_k(\zeta)}}{\big(\sum_{l=1}^m |p_l(\zeta)|^2\big)^4} \leq \frac{1}{\big(\sum_{l=1}^m |p_l(\zeta)|^2\big)^4} \leq \frac{c}{|\zeta|^{2d}}.$$

pour une certaine constante $c > 0$. Donc pour z fixé et $|z| < R$

$$\Big| \int_{\gamma_R} \frac{\overline{p_j(\zeta) p_k(\zeta)}}{\big(\sum_{l=1}^m |p_l(\zeta)|^2\big)^4} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \Big| \leq \frac{2\pi R}{R - |z|} \frac{c}{R^{2d}} \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (3)$$

Le terme sous chacune des intégrales figurant au second membre dans l'équation (2) est majoré en module pour ζ assez grand par

$$\frac{C}{|\zeta|^{d+2}},$$

où C est une constante qui dépend de z. Puisque $d+2>2$, tous les intégrales dans (2) sont convergente par le critère de Riemann. Donc en faisant tendre R vers l'infinie et on tenant compte de (3), on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= -\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\underbrace{\Big[\sum_{k=1}^{m}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\big(\sum_{l=1}^{m}|p_l(\zeta)|^2\big)^2}\frac{p_k(\zeta)-p_k(z)}{\zeta-z}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\Big(\frac{\overline{p_k(\zeta)}}{\sum_{l=1}^{m}|p_l(\zeta)|^2}\Big)dxdy\Big]}_{-\frac{\pi}{2}q_j(z)}p_j(z) \\ &= \sum_{j=1}^{m}q_j(z)p_j(z) \end{aligned}$$

Les q_j sont bien des polynômes de degré au plus $d-1$.