Université Bordeaux 1 Année 2012-2013

M1MI2011 Analyse 1

Feuille d'exercices n° 2 — Continuité

Exercice 1
En revenant à la définition, montrer que :

$$\lim_{x \to 1} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 2$$

Exercice 2
Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x\ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 3

1. Montrer que la fonction indicatrice $\chi_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la nature des points de discontinuité de la fonction f définie par

$$f(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$$

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(2x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 5
Montrer que deux fonctions f et g continues sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur $\mathbb{Q}$, coïncident en fait sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 6 (extrait DS1 2006-07)
On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}.$$

a) Montrer que $f(]0, 1[) \subseteq]0, 1[$ et que $f(]1, +\infty[) \subseteq]1, +\infty[$.

b) On se donne un réel $x_0 \in]0, 1[$. Montrer qu'on peut définir une suite (x_n) par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.

c) Montrer que (x_n) est croissante. En déduire qu'elle converge, et trouver sa limite.

Exercice 7 (TVI)

1. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. On dit alors que x_0 est un point fixe de f.
2. Donner un exemple de fonction $g :]0,1[\to]0,1[$ qui n'admet pas de point fixe.

Exercice 8 (extréma)
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}$$

a) Montrer que f est une fonction continue, majorée et minorée.
b) Déterminer $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ et $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$. Ces bornes sont-elles atteintes ?

Exercice 9 (extréma)
Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction continue, qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

1. Montrer que f est bornée et atteint sa borne supérieure.
2. Atteint-elle toujours sa borne inférieure ?

Exercice 10 (extréma)
Montrer qu'une fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 (TVI, extréma)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(i) L'image par f d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.
(ii) L'image par f d'un segment est un segment.
(ii) L'image par f d'une partie bornée est bornée.
(iv) L'image réciproque par f d'un intervalle est un intervalle.

Exercice 12 (TVI)
Soit a un réel strictement positif, et soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'on ait

$$|f(x) - f(y)| \geq a|x-y|$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est injective.
2. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que y_0 appartient à $f(\mathbb{R})$. En déduire que f est bijective.

Exercice 13 (TVI)
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$, et soit $p \geq 1$ un entier fixé. Montrer qu'il existe un réel $x_p \in [0,1]$ tel que

$$f\left(x_p + \frac{1}{p}\right) = f(x_p)$$

Exercice 14 (bijection)
On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $g([0,1]) \subseteq [0,1]$.
2. Montrer que $g : [0,1] \to [0,1]$ est une application bijective.
3. Montrer que g n'est ni monotone ni continue sur $[0,1]$.

Exercice 15 (bijection)

1. Existe-t-il une bijection continue entre $[0,1[$ et $\mathbb{R}$?
2. Soit la fonction $f : [-1,+\infty[\to \mathbb{R}$, définie par
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$
Montrer que f réalise une bijection entre $[-1,+\infty[$ et son image, que l'on déterminera. Expliciter la bijection réciproque.
3. Trouver le plus grand intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction
$$g(x) = \tan(x^3)$$
soit injective, et réalise donc une bijection entre I et $g(I)$. Expliciter l'ensemble $g(I)$ et la fonction réciproque g^{-1}.

Exercice 16 (extréma)
Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction continue vérifiant :
$$\forall x > 0, \quad f(x) < x$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Étant donnés a et b tels que $0 < a < b$, montrer qu'il existe $M \in [0,1[$ tel que
$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leq Mx$$

Exercice 17 (extréma)
Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$h(t) = \sup_{x \in [0,1]} \left(f(x) + tg(x)\right).$$

a) Montrer que h est bien définie, et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $x_t \in [0,1]$ tel que
$$h(x_t) = f(x_t) + tg(x_t).$$

b) Soit $M = \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|$. Ce sup est-il atteint ?

c) Montrer que
$$\forall s,t \in \mathbb{R}, \quad f(x_t) + sg(x_t) \leq f(x_s) + sg(x_s)$$
et en déduire
$$\forall s,t \in \mathbb{R}, \quad |h(t) - h(s)| \leq M|t-s|$$
c'est-à-dire que la fonction h est M-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 (monotonie)
Soit la fonction f définie par
$$f(x) = (\ln(x+1))^2$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. La fonction f est-elle monotone sur D_f ?
3. Déterminer $f([0,+\infty[)$. La fonction f réalise-t-elle une bijection de $[0,+\infty[$ sur son image ? Si oui, déterminer la bijection réciproque.
4. Même question sur l'intervalle $]-1,0]$.

Exercice 19
soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telle que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad f(x+y)=f(x)+f(y).$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Pour $p\in\mathbb{N}^*$ et pour $r\in\mathbb{Q}$, calculer $f(p)$, $f(\frac{1}{p})$, et $f(r)$ en fonction de $f(1)$.
3. On suppose de plus que f est continue. Montrer qu'il existe alors $a\in\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=ax.$$

4. Déterminer toutes les fonctions continues $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x,y\in]0,+\infty[,\quad f(xy)=f(x)+f(y)$$

(on pourra considérer la fonction $x\mapsto f(e^x)$).

5. On considère maintenant une fonction continue $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad g(xy)=xg(y)+yg(x)$$

(a) Calculer $g(1)$ puis $g(-1)$ et en déduire que g est impaire.

(b) Pour $x>0$, on pose $h(x)=\frac{g(x)}{x}$.

(i) Exprimer $h(xy)$ en fonction de $h(x)$ et $h(y)$;

(ii) Déterminer la fonction g.

Exercice 20
Soit f une fonction définie sur $I=[a,b]$ et soit $J=[c,d]$ avec $a<c<d<b$. Les deux assertions suivantes sont-elles équivalentes ?

(i) $f_{|J}$ est continue.

(ii) f est continue sur J.

Exercice 21 (TVI)

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Montrer que si $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, alors il existe $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(x_0)=0$.
2. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair. Montrer que P admet une racine réelle.

Exercice 22 (TVI)
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne deux nombres réels strictements positifs p et q. En considérant la fonction g définie par $g(x)=pf(a)+qf(b)-(p+q)f(x)$, montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que :

$$pf(a)+qf(b)=(p+q)f(c).$$