Université Bordeaux 1 Année 2012-2013

M1MI2011 Analyse 1

Feuille d'exercices n° 3 — Dérivabilité

Exercice 1
Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto |x(x-2)|$.

Exercice 2
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sqrt{1 + x^2 \sin^2 x} \qquad f_2(x) = \frac{\exp(1/x) + 1}{\exp(1/x) - 1} \qquad f_3(x) = \ln\left(\frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)}\right)$$

$$f_4(x) = (x(x-2))^{1/3} \qquad f_5(x) = \ln|\tan(x/2)| \qquad f_6(x) = \ln(\tan(1 + \sqrt{\sin(x^2)}))$$

$$f_7(x) = \frac{1}{(x^2)^{1/3}} - \frac{1}{(x^3)^{1/2}} \qquad f_8(x) = x^x$$

Exercice 3
Prolonger par continuité en 0, puis étudier la dérivabilité en ce même point, des fonctions

$$g_1 : x \mapsto x^2 \cos(1/x) \qquad \text{et} \qquad g_2 : x \mapsto \sin(x)\sin(1/x)$$

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable en 0.
3. La fonction f' est-elle continue en 0 ?

Exercice 5
En dérivant n fois la fonction $x \mapsto e^{3x}$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$.

Exercice 6
Soit f une fonction dérivable en x_0. Calculer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h^2) - f(x_0 + h)}{h}.$$

Exercice 7
Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$. On suppose que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0,1[$ et que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $f'(0)f'(1) \leq 0$. (Indication : montrer d'abord que f est de signe constant sur $[0,1]$).

Exercice 8
Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admettant deux limites égales en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que la dérivée de f s'annule sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

1. Donner un exemple de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée n'est pas continue.
2. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que f' vérifie sur I le théorème des valeurs intermédiaires, même si elle n'est pas continue (c'est le théorème de Darboux).

Exercice 10

1. Donner une version explicite du théorème de Rolle sur les intervalles $[1, 2]$ puis $[2, 3]$ pour la fonction $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
2. On pose $f(x) = 1 - (x^2)^{1/3}$. Montrer que f' ne s'annule pas sur $[-1, 1]$; pourquoi cela ne prend-il pas le théorème de Rolle en défaut ?
3. Donner une version explicite du théorème des accroissements finis pour la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-1, 2]$.

Exercice 11
Soient a et b deux réels, et $n \geq 2$ un entier naturel. Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ admet au plus trois racines réelles distinctes.

Exercice 12
Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On pose

$$P_n(X) = \frac{d^n}{dX^n}\left[(1 - X^2)^n\right]$$

1. Quel est le degré de P_n ?
2. Montrer, à l'aide du théorème de Rolle, que P_n a n racines réelles distinctes, qui appartiennent toutes à $[-1, 1]$.

Exercice 13

(1) En étudiant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, encadrer la différence $\sqrt{100.1} - 10$.

(2) En étudiant la fonction $x \mapsto \exp(-x^2)$, encadrer la différence $1 - \exp(-0.024)$.

Exercice 14
Montrer qu'une fonction qui est dérivable sur un intervalle I, sur lequel elle a dérivée bornée, est uniformément continue sur I.

Exercice 15
Appliquer le théorème des accroissements finis ou l'une de ses variantes pour démontrer les inégalités suivantes :

(1) $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$ pour x et y réels quelconques ;

(2) $\ln(1 + x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$;

(3) $e^x \geq 1 + x$ pour tout x réel ;

(4) $x/(1 + x^2) \leq \arctan(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 16
Montrer que si une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ s'annule en k réels distincts alors sa dérivée s'annulle en au moins $k-1$ réels distincts. En déduire que si P est un polynôme en une indéterminées à coefficients réels dont toutes les racines sont réelles, il en va de même de P'.

Exercice 17
Soit f une fonction dérivable sur $[a,b[$, telle que $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$.

1. Montrer que f' n'est pas bornée sur $[a,b[$.
2. Peut-on dire que $\lim_{x\to b} f'(x) = +\infty$? (Indication : étudier la fonction $f(x) = -\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[-1,0[$).

Exercice 18
Soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert borné non vide de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable non bornée sur cet intervalle. Montrer que f' n'est pas bornée sur I. Réciproquement, si f' est une fonction de I dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I et de dérivée non bornée, peut-on affirmer que f est elle aussi non bornée ?

Exercice 19
Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(-1) = f(1) = 0$. On note respectivement $f'(-1)$ et $f'(1)$ les dérivées à droite en -1 et à gauche en 1. Pour $x \in]-1,1[$, on pose

$$g(x) = \frac{f(x)}{1-x^2}.$$

1. Montrer que g est prolongeable par continuité sur $[-1,1]$. On note $\tilde{g}$ la fonction prolongée ; expliciter $\tilde{g}(1)$ et $\tilde{g}(-1)$ en fonction des données de l'énoncé.
2. Montrer qu'il existe $c \in]-1,1[$ tel que
$$g'(c) = -\frac{1}{4}\left(f'(1) + f'(-1)\right).$$
3. La fonction $F(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ est-elle bornée sur $]-1,1[$?
4. Même question pour f.
5. Même question pour g.

Exercice 20

1. Soit $\alpha > 0$ un réel fixé. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = 1/x^\alpha$, montrer que l'on a, pour entier $n \geq 2$,
$$\frac{1}{n^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right].$$
2. On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_k = \sum_{n=1}^{k} 1/n^{\alpha+1}$. Montrer que cette suite admet une limite finie.
3. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $\ln(x)$, montrer que pout tout n dans $\mathbb{N}$, $n \neq 0$, on a $\ln(n+1) - \ln(n) < 1/n$.
4. Soit (v_k) la suite définie par $v_k = \sum_{n=1}^{k} 1/n$. Montrer que $\lim_{k\to+\infty} v_k = +\infty$.