MHT 202 — 2010 — Feuille d'exercices n° 4

EXERCICE 1.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x - x^3/6 \leq \sin(x) \leq x - x^3/6 + x^5/120$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x - x^2/2 \leq \ln(1+x) \leq x$.

Pour ces deux questions, que se passe-t-il lorsque x est négatif ?

EXERCICE 2.

Calculer les développements limités en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x-x^2}$, avec $n = 4$.
2. $f(x) = (\sin(x^3))^{\frac{1}{3}}$, $n = 13$.
3. $f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$, avec $n = 2$.
4. $f(x) = \ln(1 + x\sin(x))$, et $n = 4$.
5. $f(x) = e^{\cos(x)}$, $n = 4$.
6. $f(x) = (1+\cos(x))^{1/3}$, $n = 4$.
7. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, $n = 4$.

EXERCICE 3.

Calculer le développement limité en $\pi/4$ à l'ordre 4 de $\sqrt{\tan(x)}$.

EXERCICE 4.

1. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral en 0 à l'ordre 3 pour l'exponentielle.
2. Donner un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3 tel que, pour tout x de $[0,1]$, $|e^x - P(x)| \leq (e-1)/6$.
3. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral en 0 à l'ordre n pour l'exponentielle, et en déduire l'existence d'un polunôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n vérifiant :

$$\forall x \in [0,1], |e^x - P_n(x)| \leq (e-1)/n!$$

EXERCICE 5.

1. Soit n un entier. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral au voisinage de 0 à l'ordre n pour la fonction $\cos(x)$.
2. En déduire que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k/(2k)!$ a une limite quand n tend vers l'infini, et calculer cette limite.

EXERCICE 6.

1. Pour un entier fixé $N > 2$ on définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^N \sin(1/x^N)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
2. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre $N-1$ en 0.
3. Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. A l'aide des questions précédentes, déterminer les entiers $n \geq 0$ pour lesquels la proposition suivante est vraie : "*toute fonction f de I dans $\mathbb{R}$ admettant un développement limité à l'ordre n en a est n fois dérivable en a*".

Exercice 7.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sqrt{1+\sin(x)\mathrm{sh}(x)}$.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 1 de $\arcsin(\ln^2(x))$.
3. Déterminer
$$\lim_{x\to 1/2}\left((2x^2-3x+1)\tan(\pi x)\right).$$
4. Calculer
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x}{4^x+5^x}\right)^{1/x}.$$

Exercice 8.

On définit pour $x \in \mathbb{R}$ les fonctions $f(x) = \ln(2+x)$ et $g(x) = \ln(1+e^{-x})$.

1. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
2. Même question pour la fonction g (on pourra utiliser a)).
3. En déduire l'équation de la tangente au graphe de f en 0.
4. Étudier la position de cette tangente par rapport au graphe de f.

Exercice 9.

On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (e^x-1)/x$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$.

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(x)$ pour tout x.
2. Montrer que f est en fait deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et donne $f''(0)$.
3. Écrire la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 pour f. Préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.
4. Déterminer les variations de $\phi := xe^x - e^x + 1$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer l'intervalle image J de la fonction f, et montrer que la fonction réciproque g de f est deux fois dérivable sur J.

Exercice 10.

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 tel que f et f'' sont bornées. On pose $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

1. Soit $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ quelconques ; écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 entre x et $x+2a$.
2. En déduire que pour tout $a > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f'(x)| \leq M_0/a + aM_2$.
3. En conclure que f' est bornée, et qu'on a $M_1^2 \leq 4M_0M_2$, où $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$.

Exercice 11.

1. Calculer les limites suivantes en 0 :
2. $\left(\frac{1}{1+x^2} - \cos(x)\right)\frac{1}{x^2}$.
3. $\frac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x}$.
4. $\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\sinh^2(x)}$.

5. $\left(\frac{e^{ax}+e^{bx}}{2}\right)^{1/x}$, ($a$ et b réels quelconques).

EXERCICE 12. Rechercher les asymptotes aux graphes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}}$.
2. $g(x) = [(x^2-2)(x+3)]^{1/3}$.