Université Bordeaux 1 — Année 2012-2013

M1MI2011 Analyse 1

Feuille d'exercices n° 5 — Intégration

Exercice 1
Calculer les intégrales suivantes (on pourra intégrer par parties).

$$C_1 = \int_0^1 (x-1)e^{-x}\,dx \;; \qquad C_2 = \int_0^1 \arctan x\,dx \;;$$
$$C_3 = \int_0^1 (x^2+1)\cos x\,dx \;; \qquad C_4 = \int_1^2 (3x^2+x+1)\ln x\,dx.$$

Exercice 2
Calculer les intégrales suivantes (on pourra effectuer des changements de variables).

$$D_1 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx \;; \qquad D_2 = \int_0^1 e^x\cos(e^x)\,dx \;; \qquad D_3 = \int_e^3 \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx \;;$$
$$D_4 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x+1)}\,dx \;; \qquad D_5 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \;; \qquad D_6 = \int_{1/2}^2 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.$$

(poser $t = \ln x$ dans D_1, D_3 et D_4 ; poser $x = \sin u$ dans D_5 ; poser $y = 1/x$ dans D_6).

Exercice 3
Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x\,dx \;; \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x\cos^3 x\,dx \;; \quad I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos^2 x\,dx.$$

Pour le calcul de I_1, on posera $t = \sin x$. Deviner la suite. Que peut-on dire en général ?

Exercice 4
Calculer par linéarisation (formules d'Euler) la valeur des intégrales

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx \quad \text{et} \quad J_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\sin^4 x\,dx.$$

Exercice 5
Calculer les intégales suivantes :

$$K_1 = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx \;; \qquad K_2 = \int_{1/2}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx \;; \qquad K_3 = \int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx \;;$$
$$K_4 = \int_{-1}^1 (\arccos x)^2\,dx \;; \qquad K_5 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \;; \qquad K_6 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$$

Exercice 6
Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ ;\qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}\ ;\qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin(\frac{k\pi}{n})\ ;$$
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\ ;\qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\ ;\qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{k+2n}{n}}.$$

Exercice 7
Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2-k}=\frac{1}{2},\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2k+1}=\frac{1}{2}\log 2.$$

Exercice 8
Soit $a\in\mathbb{R}$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Scinder en facteurs irréductibles le polynôme $X^{2n}-1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire, pour $n\in\mathbb{N}^*$:
$$a^{2n}-1=(a^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(a^2-2a\,\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right).$$
3. On suppose $a^2\neq 1$. À l'aide des sommes de Riemann, montrer que :
$$I(a)=\int_0^{\pi}\ln\left(a^2-2a\,\cos(t)+1\right)dt=\begin{cases}0 & \text{si } |a|<1\\ 2\pi\,\ln|a| & \text{si } |a|>1.\end{cases}$$

Exercice 9
On pose :
$$I=\int_0^1 e^{-x^2}\,dx,\quad J=\int_0^2 e^{x^2}\,dx,\quad K=\int_0^1 e^{-x^2}\sin(x)\,dx.$$
Montrer les inégalités suivantes :
$$\text{(a) } 0\leq I\leq 1\ ;\qquad \text{(b) } I\leq J\ ;\qquad \text{(c) } |K|\leq\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{e}\Big).$$

Exercice 10
Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on pose
$$I_n=\int_0^{\pi/4}\big(\tan(x)\big)^n\,dx.$$

1. Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est minorée. Que peut-on en déduire ?

Exercice 11
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $\alpha>0$.

1. Montrer que si f est impaire, alors $\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)\,dx=0$.
2. Que peut-on dire si f est paire ?

Exercice 12

1. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $n \geq m$. Calculer $\displaystyle\int_m^n \lfloor x \rfloor \, dx$, où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^2 x|x| \, dx$ et $\displaystyle\int_{-1}^1 x|x| \, dx$.

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique, de période $T > 0$. Montrer que la quantité $\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+T} f(x) \, dx$ ne dépend pas de α.

Exercice 14

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

1. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.
2. Montrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$
3. Montrer
$$\forall\, n \geq 2, \ \int_1^n \frac{dx}{x^2} \leq u_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2}.$$
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge, lorsque n tend vers l'infini, vers un nombre L appartenant au segment $[1, 2]$.

Exercice 15

Soit $a \in]0, +\infty[$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel x positif, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^a + 1)^n}.$$

1. Déterminer une relation de récurrence entre $I_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$.
2. On suppose $a = 2$. Montrer que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \ I_n(x) = \int_0^{\arctan(x)} \big(\cos(t)\big)^{2(n-1)} \, dt.$$

Exercice 16

1. Calculer
$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}.$$
2. Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ (avec $a < b$) telle que
$$\forall\, x \in [a, b], \ f(a + b - x) = f(x).$$
Exprimer $\int_a^b x f(x) \, dx$ en fonction de $\int_a^b f(x) \, dx$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_0^\pi \frac{x}{1 + \sin x} \, dx.$$

Exercice 17
Soit f une fonction continue sur le segment $I = [a, b]$ avec $a < b$. On considère une fonction g positive et Riemann-intégrable sur I, telle que $\int_{[a,b]} g(x)\,dx > 0$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Exercice 18
1. Pour $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, démontrer que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$.
2. Démontrer le même résultat pour une fonction f en escalier sur $[a, b]$.
3. Démontrer le même résultat pour une fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$.

Exercice 19
Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. On pose $x_k = a + k(\frac{b-a}{n})$ pour $k = 0, \ldots, n$. Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})f'(x_k).$$

Exercice 20
Montrer que

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt = \log 3, \quad \lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t} = \log 2.$$

Exercice 21
Soit $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$. Démontrer que la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sin x} f(t)\,dt$ est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 22
Pour tout $x > 0$ on pose :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\log t}{1+t^2}\,dt$$

1. Quel est le signe de F sur $\mathbb{R}_+^*$?
2. Etudier la continuité et la dériviablité de F sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $F'(x)$.
3. Donner le DL de F au voisinage de $x = 1$ à l'ordre 3.