AGREGATION EXTERNE 2001, ANALYSE ET PROBABILITES

PARTIE I (sur 4×24 points)

1a [2-2] (coeff.1)

– Si $x > 0$, $e^{-xt} = \mathbf{0}_x(1/t)$ au voisinage de $+\infty$; le critère de comparaison (entre intégrandes positives) et le fait que $1/t^2$ soit intégrable sur $[\epsilon, +\infty[$ pour tout $\epsilon > 0$ impliquent la convergence des deux intégrales

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \quad , \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt \, .$$

–Grâce au changement de variable $t = xu$, on a :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{xu} x du = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt \, .$$

1b.

Premier item [4] (coeff.1)

La fonction

$$\varphi : \; t \mapsto \frac{1 - e^{-t}}{t} \, ,$$

a priori définie et continue sur $]0, 1]$, se prolonge (en posant $\varphi(0) = 1$) en une fonction continue, donc intégrable, sur $[0, 1]$; l'intégrale I est donc bien convergente.

Second item [4] (coeff.1)

On a, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + \mathrm{Ei}(1) &= \Big(\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \Big) - \int_x^1 \frac{dt}{t} \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln x \\ &= \mathrm{Ei}\,(x) + \ln\,(x) \, ; \qquad (1) \end{aligned}$$

d'autre part, le théorème de convergence dominée assure

$$I = \lim_{x \to 0_+} \int_x^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt\,;$$

on a donc, en passant à la limite dans (1) lorque x tend vers 0_+,

$$\lim_{x \to 0_+} (\mathrm{Ei}\,(x) + \ln x) = \mathrm{Ei}\,(1) - I\,.$$

1c [2-2] (coeff.1)

– Pour $t \geq x$, on a :

$$\frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{x}\,,$$

par conséquent

$$\mathrm{Ei}\,(x) \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x}\,.$$

– La fonction

$$t \mapsto \frac{e^{-t}}{x} - \frac{e^{-t}}{t}$$

étant une fonction strictement positive et continue sur $]x, +\infty[$, son intégrale sur $]x, +\infty[$ est aussi strictement positive, ce qui explique pourquoi l'inégalité

$$\mathrm{Ei}\,(x) < \frac{e^{-x}}{x}$$

est bien stricte ; le fait que la fonction $t \mapsto e^t/t$ soit continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ implique, avec la monotonie de l'intégrale, la stricte positivité de $\mathrm{Ei}\,(x)$ pour tout $x > 0$.

1d [2-2] (coeff.2)

– Effectuons d'abord le calcul voulu, en fixant $N \in \mathbb{N}$; par un jeu d'intégrations par parties itérées, il vient, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ei}\,(x) &= \Big[\frac{-e^{-t}}{t}\Big]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \Big(\frac{-1}{t^2}\Big)(-e^{-t}) dt \\
&= \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \\
&= \frac{e^{-x}}{x} - 2\frac{e^{-x}}{x^2} + \cdots + (-1)^n n! \frac{e^{-x}}{x^{n+1}} + \cdots + (-1)^N N! \frac{e^{-x}}{(N+1)!} \\
&\qquad -(-1)^N (N+1)! \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+2}} dt\,.
\end{aligned}$$

– On a, pour tout $x > 0$, en raisonnant comme au **I.1c**,

$$\left| \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+2}} dt \right| < \frac{1}{x^{N+2}} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x^{N+2}} \,,$$

d'où l'on conclut bien que le "reste"

$$(-1)^N (N+1)! \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+2}} dt$$

est un $\mathbf{O}(e^{-x}/x^{N+2})$ lorsque x tend vers $+\infty$.

1e [1-3] (coeff.2)

– Si $p \geq 1$, il suit de **I.1c** que pour tout $x > 0$,

$$0 < [\mathrm{Ei}\,(x)]^p \leq \frac{e^{-px}}{x^p} \,;$$

comme la fonction $x \mapsto e^{-px}/x^p$ est intégrable sur $]\epsilon, +\infty[$, avec $\epsilon > 0$, on a bien, pour tout $p \in [1, +\infty[$, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\int_\epsilon^\infty |\mathrm{Ei}\,(x)|^p dx < +\infty \,.$$

– Lorsque x tend vers 0_+, il suit du fait que $\mathrm{Ei}\,(x) + \ln x$ tende vers I (voir **I.1b**) que $\mathrm{Ei}\,(x)$ est équivalent à $|\ln x|$; par conséquent, si $p \in [1, +\infty[$, $[\mathrm{Ei}\,(x)]^p$, qui est une fonction équivalente lorsque x tend vers 0^+ à la fonction $|\ln x|^p$ (intégrable sur $]0, \epsilon[$ car majorée en $C_p/\sqrt{x}$), est aussi intégrable sur $]0, \epsilon[$; avec ce qui précède, on peut bien conclure que Ei définit un élément de $L^p(\mathbb{R}_+^*)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

2a [1-1-2] (coeff.2)

– Comme, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|K(x)e^{-i\xi x}| = |K(x)|$, que $K \in L^1(\mathbb{R})$ (puisque K est paire et que $K = (1/2)\mathrm{Ei}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après le résultat du **I. 1e**), et qu'enfin, pour tout x dans $\mathbb{R}^*$, la fonction $\xi \mapsto K(t)e^{-itx}$ est continue sur $\mathbb{R}$, il résulte du théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre de Lebesgue (conséquence du théorème de convergence dominée) que la fonction

$$\xi \mapsto \widehat{K}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) e^{-i\xi x} dx$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

– Comme K est aussi dans $L^2(\mathbb{R})$ (d'après le **1e** et la parité de K), K est en fait dans $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ et sa transformée de Fourier définit aussi un élément de $L^2(\mathbb{R})$, comme on le rappelle dans le préambule du problème.

– D'après le lemme de Riemann-Lebesgue, considéré comme connu, la fonction $\widehat{K}$, transformée de Fourier d'un représentant d'un élément de $L^1(\mathbb{R})$, doit tendre vers 0 lorsque ξ tend vers $\pm\infty$.

2b [1-3] (coeff.2)

– On peut deviner que le prolongement naturel de $\widehat{K}$ à $S(1)$ sera la fonction :

$$z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) e^{-izt} dt\,;$$

en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, pour tout $z = x + iy$ dans $S(1)$,

$$|K(x)e^{-izx}| \leq \frac{\mathrm{Ei}\,(|x|)}{2} e^{xy} \leq \frac{e^{-(1-|y|)|x|}}{2|x|}\,,$$

ce qui implique l'intégrabilité de cette fonction sur $\mathbb{R} \setminus [-\epsilon, \epsilon]$ lorsque $\epsilon > 0$; sur $[-\epsilon, \epsilon]$, la majoration

$$|K(x)e^{-izx}| \leq |K(x)| e^{\epsilon}$$

suffit à assurer l'intégrabilité de cette même fonction sur $[-\epsilon, \epsilon]$, $\epsilon > 0$; l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x) e^{-izx} dx$$

converge donc bien lorsque $z \in S(1)$.

– Soit $\epsilon_0 > 0$ (fixé) et $\tau \in]0, 1[$ (arbitraire) ; pour tout x dans $\mathbb{R}^*$, pour tout z dans $S(1-\tau)$, on a, compte tenu des majorations précédentes,

$$|K(x)e^{-izx}| \leq \chi_{[-\epsilon_0, \epsilon_0]}(x) K(x) e^{(1-\tau)\epsilon_0} + \chi_{|x| \geq \epsilon_0}(x) \frac{e^{-\tau|x|}}{2\epsilon_0}\,,$$

la fonction majorante étant indépendante de z (pourvu que $z \in S(1-\tau)$) et définissant un élément de $L^1(\mathbb{R})$ (suivant l'argument déjà proposé au **I.1e**) ; d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction

$$z \mapsto K(x) e^{-itz}$$

est une fonction entière ; le théorème d'holomorphie des intégrales dépendant d'un paramètre s'applique dans l'ouvert $S(1-\tau)$ et l'on en déduit que

$$z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} K(x)e^{-izx}dx$$

est holomorphe dans $S(1-\tau)$; puisque τ était arbitraire dans $]0,1[$, la fonction en question est bien holomorphe dans $S(1)$ et prolonge bien (par construction même) la fonction $\widehat{K}$.

2c [2-2] (coeff.2)

– On a, si $z = \xi + i\eta \in S(1)$,

$$\widehat{K}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x)e^{-i(\xi+i\eta)x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x)e^{\eta x}e^{-i\xi x}dx\,. \tag{2}$$

– Pour tout $\epsilon_0 > 0$, $\eta \in]-1,1[$ et $x \in \mathbb{R}^*$,

$$|K(x)e^{\eta x}| \leq \chi_{[-\epsilon_0,\epsilon_0]}e^{|\eta|\epsilon_0}K(x) + \chi_{|x|\geq\epsilon_0}(x)\frac{e^{-(1-|\eta|)|x|}}{2\epsilon_0}\,,$$

ce qui montre que la fonction $x \mapsto K(x)e^{\eta x}$ définit (comme K) un élément de $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ (suivant encore l'argument proposé au **I.1e**) ; la formule (2) nous permet de reconnaître en $\xi \mapsto \widehat{K}(\xi+i\eta)$ la transformée de Fourier de l'élément de $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ de représentant $x \mapsto K(x)e^{\eta x}$; puisque la transformation de Fourier (comme cela est rappelé en préambule) transforme les éléments de $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ en représentants d'éléments de $L^2(\mathbb{R})$, la fonction

$$\xi \mapsto \widehat{K}(\xi + i\eta)$$

définit bien un élément de $L^2(\mathbb{R})$.

2d [2-1-1] (coeff.3)

–Comme $K \in L^1(\mathbb{R})$, on a, si $\xi \in \mathbb{R}$ (et puisque $|e^{-i\xi x}| = 1$ pour tout x réel)

$$\frac{1}{2}\int_{\mathrm{R}}\left(\int_1^{+\infty}\left|\frac{e^{-t|x|+i\xi x}}{t}\right|dt\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x)dx < +\infty\,;$$

d'autre part, la fonction

$$f:\ (t,x) \mapsto \chi_{t\geq 1}(t)\frac{e^{-t|x|+i\xi x}}{t}$$

est borélienne sur $\mathbb{R}^2$; le théorème de Fubini rappelé dans le préambule s'applique donc ici et l'on peut, en en utilisant l'assertion finale, affirmer que

$$\widehat{K}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{R}} \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t|x|}}{t} dt\right) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \left(\int_{\mathrm{R}} e^{-t|x|} e^{-i\xi x} dx\right) \frac{dt}{t}\,. \qquad (3)$$

– Pour tout $t \geq 1$, il vient (grâce au changement de variable $x = v/t$)

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{R}} e^{-t|x|} e^{-i\xi x} dx &= \frac{1}{t}\int_{\mathrm{R}} e^{-|v|} e^{-i(\xi/t)v} dv \\ &= \frac{1}{2t}\left(\frac{1}{1+i\frac{\xi}{t}} + \frac{1}{1-i\frac{\xi}{t}}\right) \\ &= \frac{1}{t}\,\frac{1}{1+\frac{\xi^2}{t^2}}\,;\end{aligned}$$

en reportant dans (3), on a, si $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned}\widehat{K}(\xi) &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\frac{1}{1+\frac{\xi^2}{t^2}} dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\xi^2} \\ &= \frac{1}{\xi}\int_{\frac{1}{\xi}}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\operatorname{Arctan}\xi}{\xi}\,.\end{aligned}$$

–Pour calculer $\widehat{K}(0)$, il suffit d'utiliser la continuité de $\widehat{K}$ (voir **I.2a**) et le fait que $\operatorname{Arctan}\xi \sim \xi$ au voisinage de $\xi = 0$ pour affirmer que $\widehat{K}(0) = 1$.

3a [4] (coeff.1)

La fonction Arctan se prolonge en une fonction analytique dans le disque $D(0,1)$, à savoir la somme Θ de la série entière dont la série dérivée est la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}\,,$$

choisie de manière à ce que $\Theta(0) = 0$; on a donc, si $|z| < 1$,

$$\Theta(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}\,;$$

au voisinage de $z = 0$,

$$\frac{\Theta(z)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3} + \mathbf{o}(|z|^2)\,,$$

d'où $1-\Theta(z) \sim z^2/3$ au voisinage de $z=0$, ce qui prouve, puisque $\Theta(z)/z = \widehat{K}(z)$ dans $D(0,1)$ d'après le principe du prolongement analytique (ces deux fonctions étant holomorphes dans $D(0,1)$ et égales sur $]-1,1[$), que

$$1-\widehat{K}(z) \sim z^2/3$$

au voisinage de $z=0$ (dans $\mathbb{C}$).

3b [2-2] (coeff.3)

– Si $\tau \in]0,1[$, alors, pour tout $z \in S(1-\tau)$, pour tout $t \geq 1$,

$$\left|\frac{1}{t^2+z^2}\right| \leq \frac{1}{|\mathrm{Re}\,(t^2+z^2)|} = \frac{1}{t^2+x^2-y^2} \leq \frac{1}{t^2-y^2} \leq \frac{1}{t^2-(1-\tau)^2}\,;$$

le membre de droite dans l'inégalité ci-dessus définissant une fonction intégrable sur $[1,+\infty[$ et chaque fonction $z \mapsto 1/(t^2+z^2)$ $(t \geq 1)$ étant holomorphe dans $S(1-\tau)$, il résulte encore du théorème d'holomorphie des intégrales dépendant d'un paramètre que la fonction

$$z \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+z^2}$$

est holomorphe dans $S(1-\tau)$; τ étant arbitraire, cette fonction est holomorphe dans $S(1)$; comme elle coïncide avec $\widehat{K}$ sur l'axe réel (voir les calculs du **I.2d**), elle coïncide avec $\widehat{K}$ dans $S(1)$; on a donc bien, pour tout $z \in S(1)$, la formule

$$\begin{aligned}
\widehat{K}(z) - \overline{\widehat{K}(z)} &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2+z^2} - \frac{1}{t^2+\overline{z}^2}\right) dt \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{\overline{z}^2 - z^2}{(t^2+z^2)(t^2+\overline{z}^2)} dt \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{\overline{z}^2 - z^2}{|t^2+z^2|^2} dt\,.
\end{aligned}$$

– $\widehat{K}(z)$ ést réel si et seulement si $\widehat{K}(z) = \overline{\widehat{K}(z)}$, soit, d'après ce qui précède, si et seulement si

$$\int_1^{+\infty} \frac{\overline{z}^2 - z^2}{|t^2+z^2|^2} dt = (\overline{z}^2 - z^2) \int_1^{+\infty} \frac{dt}{|t^2+z^2|^2} = 0\,;$$

comme
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{|t^2+z^2|^2} > 0$$
(comme intégrale sur $]1,+\infty[$ d'une fonction continue strictement positive), $\widehat{K}(z)$ est réel si et seulement si $z^2 = \overline{z}^2$, soit si et seulement si $z = \overline{z}$ (ce qui signifie $z = \xi \in \mathbb{R}$) ou $z = -\overline{z}$ (ce qui signifie $z = i\eta$, $\eta \in \mathbb{R}$, avec ici bien sûr $|\eta| < 1$ puisque $z \in S(1)$).

3c [1-1-2] (coeff.3)

– Si $\widehat{K}(z) = 1$, $\widehat{K}(z)$ est en particulier réel, ce qui implique soit que $z = \xi \in \mathbb{R}$, soit que $z = i\eta$ avec $\eta \in]-1,1[$ d'après le **I.3b**.

– Pour tout $\xi \in R^*$, on a
$$\frac{\operatorname{Arctan}\xi}{\xi} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\xi^2} < \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$$
(puisque l'intégrale sur $]1,+\infty[$ d'une fonction continue strictement positive est strictement positive) ; $\xi = 0$ est donc le seul zéro de $\widehat{K}-1$ sur $\mathbb{R}$ (compte tenu du fait que $\widehat{K}(\xi) = \operatorname{Arctan}\xi/\xi$ sur $\mathbb{R}^*$, voir le **I.2d**).

– Si $-1 < \alpha_1 < \alpha_2$, alors, pour tout $t \geq 1$,
$$\frac{1}{t^2+\alpha_1} > \frac{1}{t^2+\alpha_2},$$
d'où, en intégrant, l'on déduit que la fonction
$$\alpha \in]-1,\infty[\to \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\alpha}$$
est strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$; la fonction
$$\eta \in [0,1[\to \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2-\eta^2} = \widehat{K}(\pm i\eta)$$
est donc strictement croissante sur $[0,1[$; comme elle prend la veleur 1 en $\eta = 0$, $\eta = 0$ est le seul point de $[0,1[$ où elle prend cette valeur ; le seul zéro de $i]-1,1[$ où $\widehat{K} = 1$ est donc 0.

PARTIE II (sur 4×15 points)

1 [1-3] (coeff.2)

–Si x est fixé dans $\mathbb{R}$ et si f est une fonction affine, on a, pour tout $y \in \mathbb{R}\setminus\{x\}$ (en utilisant l'estimation du **I.1c**)

$$|K(x-y)f(y)| \leq (\max_{[x-1,x+1]} |f|)\, \chi_{|y-x|\leq 1}(y)\, K(x-y) + \chi_{|y-x|\geq 1} e^{-|y-x|}|f(y)|\,;$$

la fonction dominante à droite de cette inégalité est intégrable sur $\mathbb{R}$ (comme le sont les fonctions K et $y \mapsto |y|e^{-|y|}$; il en résulte que la fonction mesurable (comme composée et produit de fonctions mesurables) $y \mapsto K(x-y)f(y)$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$.

– On a, si $L(y) = \alpha y + \beta$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)(\alpha y+\beta)dy &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} K(v)(\alpha x + \beta - \alpha v)dv \\ &= (\alpha x+\beta)\widehat{K}(0) - \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} vK(v)dv\,; \end{aligned}$$

la fonction $v \mapsto vK(v)$ est une fonction intégrable (d'après le premier point évoqué dans cette question, avec $x = 0$) impaire, donc d'intégrale nulle ; on a donc bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$L(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x-y)L(y)dy\,.$$

2a.

Premier item [4] (coeff.2)

Les classes F et G admettent des fonctions représentantes boréliennes notées encore $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$; en effet, tout élément $\dot{f}$ de L^1 admet un représentant f à valeurs complexes et s'écrivant $f_+ - f_- + i(g_+ - g_-)$ où les quatre fonctions f_-, f_+, g_-, g_+ sont des limites croissantes de suites de fonctions en escalier positives ; un tel représentant est donc borélien comme combinaison de limites simples de suites de fonctions boréliennes ; la fonction de deux variables

$$(x,y) \mapsto \widetilde{F}(x-y)\widetilde{G}(y)$$

est borélienne (comme composée et produit de fonctions boréliennes) ; on peut affirmer que la fonction définie pour presque tout (x,y) par $\Phi(x,y) =$

$F(x-y)G(y)$ est presque partout égale à la fonction borélienne (elle définie partout) $\widetilde{\Phi}: \ (x,y) \mapsto \widetilde{F}(x-y)\widetilde{G}(y)$; montrer que Φ définit un élément de $L^1(\mathbb{R}^2)$ revient à prouver que $\widetilde{\Phi}$ en définit également un.

Deuxième item [2-2] (coeff.2)

– Comme

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{R}} \left(\int_{\mathrm{R}} |F(x-y)| \, |G(y)| dx \right) &= \int_{\mathrm{R}} |G(y)| \left(\int_{\mathrm{R}} |F(x-y)| dx \right) dy \\
&= \int_{\mathrm{R}} |G(y)| \left(\int_{\mathrm{R}} |F(v)| dv \right) dy \\
&= \|F\|_{L^1(\mathrm{R})} \|G\|_{L^1(\mathrm{R})} \,,
\end{aligned}$$

le théorème de Fubini, tel qu'il est rappelé dans le préambule (on l'applique de fait à la fonction borélienne $\widetilde{\Phi}$), assure que pour tout x dans $\mathbb{R}$, la fonction

$$y \mapsto \widetilde{\Phi}(x,y) \quad (= F(x-y)G(y) \text{ p.p en } x, y)$$

est borélienne et que la fonction $\widetilde{\Phi}$ est intégrable dans $\mathbb{R}^2$, donc que Φ représente bien un élément de $L^1(\mathbb{R}^2)$; de plus, pour presque tout x, la fonction

$$y \mapsto \widetilde{\Phi}(x,y) \quad (= F(x-y)G(y) \text{ p.p en } y)$$

est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, puisque

$$\int_{\mathrm{R}} \left(\int_{\mathrm{R}} |\widetilde{\Phi}(x,y)| dy \right) dx = \|F\|_{L^1(\mathrm{R})} \|G\|_{L^1(\mathrm{R})} < +\infty$$

(une fonction positive intégrable est certainement finie presque partout) ; ceci montre que l'on définit bien presque partout une fonction $F * G$ en posant

$$F * G(x) = \int_{\mathrm{R}} F(x-y)G(y) dy \, ;$$

l'assertion du préambule assure que $F * G$ définit une fonction intégrable.

– On a, compte tenu de la définition proposée pour $F * G$, représentant de la classe de L^1 qui lui correspond (et sera noté identiquement),

$$\begin{aligned}
\|F * G\|_{L^1(\mathrm{R})} &= \int_{\mathrm{R}} \left| \int_{\mathrm{R}} F(x-y)G(y) dy \right| dx \\
&\leq \int_{\mathrm{R}} \Big(\int_{\mathrm{R}} |F(x-y)| \, |G(y)| dy \Big) dx = \|F\|_{L^1(\mathrm{R})} \|G\|_{L^1(\mathrm{R})}
\end{aligned}$$

au vu du calcul fait au point précédent.

2b. [1-3] ou [2-2] suivant que Fubini est correctement appliqué au 2a ou non (coeff.1)

– On a

$$(\widehat{F * G})(\xi) = \int_{\mathrm{R}} \left(\int_{\mathrm{R}} F(x-y)G(y)dy \right) e^{-i\xi x} dx\,;$$

formellement, on peut écrire

$$\begin{aligned}
(\widehat{F * G})(\xi) &= \int_{\mathrm{R}} \left(\int_{\mathrm{R}} F(x-y)e^{-i\xi(x-y)} G(y)e^{-i\xi y} dy \right) dx \\
&= \int_{\mathrm{R}} G(y)e^{-i\xi y} \left(\int_{\mathrm{R}} F(x-y)e^{-i\xi(x-y)} dx \right) dy \\
&= \int_{\mathrm{R}} G(y)e^{-i\xi y} \left(\int_{\mathrm{R}} F(x)e^{-i\xi x} dx \right) dy \\
&= \widehat{F}(\xi)\widehat{G}(\xi)\,.
\end{aligned}$$

– Pour justifier ce qui précède, on doit invoquer le théorème de Fubini tel qu'il est rappelé dans le préambule ; si l'on pose, pour ξ fixé dans $\mathbb{R}$, $F_\xi(x) := F(x)e^{-i\xi x}$ et $G_\xi(x) := G(y)e^{-i\xi x}$, on voit que la fonction définie presque partout dans $\mathbb{R}^2$ par

$$H_\xi(x,y) := F_\xi(x-y)G_\xi(y)$$

est une fonction borélienne, telle que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{R}} \left(\int_{\mathrm{R}} |H_\xi(x,y)|dy \right) dx &= \int_{\mathrm{R}} \left(\int_{R} |H_0(x,y)|dy \right) dx \\
&= \|F\|_{L^1(\mathrm{R})} \|G\|_{L^1(\mathrm{R})} < +\infty\,;
\end{aligned}$$

la dernière clause du théorème de Fubini rappelé en préambule s'applique donc, ce qui justifie le calcul formel proposé en premier point de la réponse à cette question.

3a (2-4) (coeff.3)

– La fonction

$$(x,y) \mapsto |F(x-y)|\,|G(y)|$$

est une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}^2$; la fonction

$$x \mapsto \int_{\mathrm{R}} |F(x-y)|\,|G(y)|dy$$

est donc une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $[0,\infty]$; pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{R}} |F(x-y)|\,|G(y)|dy &= \int_{\mathrm{R}} \sqrt{|F(x-y)|}(\sqrt{|F(x-y)|}|G(y)|)dy \\
\leq & \ \left(\int_{\mathrm{R}} |F(x-y)|dy\right)^{1/2} \left(\int_{\mathrm{R}} |F(x-y)|\,|G(y)|^2 dy\right)^{1/2} \\
\leq & \ +\infty
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui implique, compte tenu de **II.2a**, que pour presque tout x cette fois :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{R}} |F(x-y)|\,|G(y)|dy &= \int_{\mathrm{R}} \sqrt{|F(x-y)|}(\sqrt{|F(x-y)|}|G(y)|)dy \\
&\leq \left(\int_{\mathrm{R}} |F(x-y)|dy\right)^{1/2} \Big(|F| * |G|^2(x)\Big)^{1/2} \\
&\leq \|F\|_{L^1(\mathrm{R})} \Big(|F| * |G|^2(x)\Big)^{1/2} < +\infty
\end{aligned}$$

puisque $|F|$ et $|G|^2$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$; en élevant au carré, puis en intégrant, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{R}} \left(\int_{\mathrm{R}} |F(x-y)|\,|G(y)|dy\right)^2 dy &\leq \|F\|_{L^1(\mathrm{R})} \, \||F| * |G|^2\|_{L^1(\mathrm{R})} \\
&\leq \|F\|^2_{L^1(\mathrm{R})} \, \|G\|^2_{L^2(\mathrm{R})}
\end{aligned}$$

(on utilise ici la dernière assertion prouvée au **II.2a**, toujours en tenant compte du fait que $|F|$ et $|G|^2$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$) ; il résulte de tout cela que la fonction $y \mapsto F(x-y)G(y)$ est intégrable pour presque tout x et que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{R}} \left|\int_{\mathrm{R}} F(x-y)G(y)dy\right|^2 dx &\leq \int_{\mathrm{R}} \left(\int_{R} |F(x-y)|\,|G(y)|dy\right)^2 dx \\
&\leq \|F\|_1^2 \, \|G\|^2_{L^2(\mathrm{R})} \, ;
\end{aligned}$$

ceci implique que $F * G$ (qui est bien définie presque partout) peut être considéré comme un représentant d'un élément $F * G$ de $L^2(\mathbb{R})$, avec

$$\|F * G\|_{L^2(\mathrm{R})} \leq \|F\|_{L^1(\mathrm{R})} \, \|G\|_{L^2(\mathrm{R})} \, .$$

3b. [1-2-1] (coeff.3)

– tout élément de $L^2(\mathbb{R})$ (par exemple ici G) est limite, dans $L^2(\mathbb{R})$, d'une suite d'éléments de $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$; en l'occurrence ici, la suite $(G\chi_{[-n,n]})_{n\geq 1}$ converge vers G dans $L^2(\mathbb{R})$.

– D'après le **II.2b**, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}[F * (G\chi_{[-n,n]}](\xi) = \widehat{F}(\xi)\mathcal{F}[G\chi_{[-n,n]}](\xi)$$

(en notant $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier) ; la fonction $\widehat{F}$ est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$ (car continue et tendant vers 0 à l'infini d'après le lemme de Riemann-Lebesgue déjà utilisé au **I.2a**); d'autre part le fait que la transformation de Fourier réalise (voir le préambule) une application continue de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même implique que la suite $\widehat{G\chi_{[-n,n]}}$ converge vers G dans $L^2(\mathbb{R})$; on a donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \|\widehat{F}\mathcal{F}[G\chi_{[-n,n]}] - \widehat{F}\widehat{G}\|_{L^2} &\leq \|\widehat{F}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \lim_{n\to+\infty} \|\mathcal{F}[G\chi_{[-n,n]}] - \widehat{G}\|_{L^2} \\ &= 0\,;\end{aligned}$$

on a donc bien, au sens d'une égalité entre éléments de $L^2(\mathbb{R})$, l'égalité

$$\widehat{F}\widehat{G} = (\widehat{F * G})\,;$$

ceci implique (si l'on revient au niveau des représentants) que pour presque tout ξ,

$$\widehat{F}(\xi)\widehat{G}(\xi) = [\widehat{F * G}](\xi)\,.$$

– La relation ci-dessus ne saurait avoir de sens partout, ne serait-ce que pour la simple raison que $\widehat{F * G}$ n'est défini que comme élément de $L^2(\mathbb{R})$; une définition ponctuelle de $\widehat{F * G}(\xi)$ est ici vide de toute signification.

4. [2-2] (coeff.1)

–Si $f \in L^1$ vérifie (EI), soit $f = K * f$, on a, d'après **II.2b**,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}\,, \quad \widehat{f}(\xi)(1 - \widehat{K}(\xi)) = 0\,;$$

on en déduit, puisque 0 est le seul zéro de $\widehat{K}$ sur $\mathbb{R}$, que $\widehat{f} = 0$ sur $\mathbb{R}^*$; puisque $\widehat{f}$ est continue (pour la même raison que celle invoquée pour la continuité de $\widehat{K}$ au **I.2a**), on a aussi $\widehat{f}(0) = 0$.

– La formule d'inversion de Fourier assure alors que $f = 0$ presque partout (puisque f est supposée *a priori* dans $L^1(\mathbb{R})$, ce qui sous-entend définie seulement modulo le sous-espace des fonctions nulles presque partout).

5. [2-2] (coeff.1)

– Si f appartient à $L^2(\mathbb{R})$ et satisfait (EI), on a $f = K * f$ presque partout (donc en tant qu'éléments de $L^2(\mathbb{R})$) ; il vient, en utilisant **II.3b**, que $\widehat{f}(\widehat{K} - 1) = 0$ (l'égalité étant entendue en tant qu'une égalité entre éléments de $L^2(\mathbb{R})$) ; toujours puisque 0 est le seul zéro de la fonction continue $1 - \widehat{K}$ sur $\mathbb{R}$, on déduit de cela que $\widehat{f} = 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

– Ceci implique, puisque la transformation de Fourier réalise une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ (à une constante multiplicative près, comme l'indique la formule de Plancherel), que $f = 0$ (toujours en tant qu'élément de $L^2(\mathbb{R})$) ; au niveau des représentants, ceci signifie encore que $f(\xi) = 0$ pour presque tout ξ dans $\mathbb{R}$.

PARTIE III (sur 4×48 points)

1a. [4] (coeff.2)

Si $x < 0$, on a

$$
\begin{aligned}
|G_0(x)| = \left| \int_0^{+\infty} K(-|x| - y) f(y) dy \right| & \leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-|x|-y}}{|x| + y} |f(y)| dy \\
& \leq \frac{e^{-|x|}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y} |f(y)|}{|x| + y} dy
\end{aligned}
$$

compte tenu à la fois de la définition de G_0 et de l'estimation du **I.1c** ; or on sait par hypothèses qu'il existe une constante $C_{1/2} > 0$ telle que $|f(y)| \leq C_{1/2} e^{y/2}$ (en effet f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et est un $\mathbf{O}(e^{y/2})$ lorsque y tend vers $+\infty$; si $x < -1$, l'estimation de G_0 devient

$$
|G_0(x)| \leq C_{1/2} \frac{e^{-|x|}}{2} \int_0^{+\infty} e^{-y/2} dy = C_{1/2} e^{-|x|},
$$

d'où il suit bien que $G(x) = \mathbf{O}(e^{-|x|})$ lorsque x tend vers $-\infty$.

1b. [2-2] (coeff.2)

– Prouvons tout d'abord que les trois fonctions incriminées définissent bien des éléments de $L^1(\mathbb{R})$; comme $f = \mathbf{O}(e^{\beta x/2})$ lorsque x tend vers $+\infty$ et est continue sur $\mathbb{R}_+$, il existe une constante $C_{\beta/2}$ telle que, pour tout $x \geq 0$, $|F_\beta(x)| \leq C_{\beta/2} e^{-\beta x} e^{\beta x/2} \leq C_{\beta/2} e^{-\beta x/2}$, d'où il résulte que $F_\beta \in L^1(\mathbb{R}^+)$, et aussi $F_\beta \in L^1(\mathbb{R})$ puisque F_β est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$; de même, on a, pour tout x tel que $|x| \geq 1$,

$$K_\beta(x) \leq \frac{1}{2} e^{-\beta x} e^{-|x|} \leq \frac{e^{-(1-\beta)|x|}}{2} \;;$$

cette majoration (obtenue via encore l'inégalité établie au **I.1c**), couplée avec l'intégrabilité de K (donc de K_β) sur $[-1,1]$ assure que $K_\beta \in L^1(\mathbb{R})$; enfin, pour tout $x < 0$ (et même en fait pour tout x réel), l'intégrale qui définit $G_\beta(x)$ est convergente car pour tout $y \geq 0$ tel que $y \geq x+1$,

$$K(x-y)|f(y)| \leq \frac{C_{1/2}}{2} e^{-(y-x)} e^{y/2} = \frac{C_{1/2}}{2} e^{-y/2}$$

et que $y \mapsto K(x-y) f(y) \chi_{[0,\infty[}(y)$ est bien intégrable (comme $y \mapsto K(x-y)$ puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+$) sur $[0, \max(0, x+1)]$.

– Puisque F_β et K_β sont dans $L^1(\mathbb{R})$, on peut (d'après le **II.2a**) définir pour presque tout x réel $F_\beta * K_\beta(x)$ par

$$\begin{aligned} F_\beta * K_\beta(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_\beta(x-y) F_\beta(y) dy \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\beta(x-y)} K(x-y)(e^{-\beta y} f(y)) dy \\ &= e^{-\beta x} \int_0^{+\infty} K(x-y) f(y) dy \,; \end{aligned}$$

on voit que $K_\beta * F_\beta$ est presque partout égal à $-G_\beta$ (donc à $F_\beta - G_\beta$) sur $\mathbb{R}_-^*$ (vu la définition de G_β sur ce même intervalle), d'où il résulte puisque $K_\beta * F_\beta \in L^1(\mathbb{R})$ (**II. 2a**) que $G_\beta = (K_\beta * F_\beta)\chi_{]-\infty,0[}$ (presque partout) définit un élément de $L^1(\mathbb{R})$; pour presque tout $x \geq 0$, on a, puisque f est solution de (EI),

$$\begin{aligned} K_\beta * F_\beta(x) &= e^{-\beta x} \int_0^{+\infty} K(x-y) f(y) dy = e^{-\beta x} f(x) \\ &= F_\beta(x) = F_\beta(x) - G_\beta(x) \,; \end{aligned}$$

on a donc bien l'égalité $F_\beta - K_\beta * F_\beta = G_\beta$, cette égalité étant entendue comme une égalité entre éléments de $L^1(\mathbb{R})$.

2a. [2-2] (coeff.1)

– Si $z = \xi - i\eta \in \mathcal{P}_0^-$ ($\eta > 0, \xi \in \mathbb{R}$), on a, pour tout $x \geq 0$,

$$|f(x)e^{-izx}| \leq C_{\eta/2} e^{\eta x/2} e^{-\eta x} = C_{\eta/2} e^{-\eta x/2}\,,$$

d'où la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-izx} f(x)dx\,.$$

– Si $\eta > 0$, on a, pour tout $z \in \mathcal{P}_{-\eta}^-$, pour tout $x \geq 0$,

$$|f(x)e^{-izx}| \leq C_{\eta/2} e^{\eta x/2} e^{-\eta x} = C_{\eta/2} e^{-\eta x/2}$$

(majoration par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et indépendante de z) ; d'autre part, pour tout $x \geq 0$, $z \mapsto e^{-izx} f(x)$ est une fonction entière ; le théorème d'holomorphie des intégrales dépendant holomorphiquement d'un paramètre s'applique donc et l'on en déduit que Φ est holomorphe dans $\mathcal{P}_{-\eta}^-$; η étant arbitraire, Φ est bien holomorphe dans $\mathcal{P}_0^-$.

2b. [4] (coeff.1)

Par définition de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{F_\beta}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} F_\beta(x) e^{-i\xi x} dx = \int_0^\infty (e^{-\beta x} f(x)) e^{-i\xi x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-i(\xi - i\beta)x} f(x) dx = \Phi(\xi - i\beta).
\end{aligned}$$

2c. [2-2] (coeff.1) (on ne pénalise pas au point 2 si le théorème a été cité au II.2a)

– Le candidat naturel pour prolonger $\widehat{G_0}$ serait la fonction définie sur $\mathcal{P}_{-1}^+$ (si tant est que cela s'avère possible) par

$$\widehat{G_0}(z) := \int_{\mathbb{R}} G_0(x) e^{-izx} dx = \int_{-\infty}^0 G_0(x) e^{-izx} dx\,;$$

Puisque G_0 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et est $\mathbf{O}(e^{-|x|})$ lorsque x tend vers $-\infty$ (**III.1a**), on peut majorer $|G_0(x)e^{-izx}|$ sur $\mathbb{R}$ (lorsque $z = \xi + i(-1+\eta)$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$) par

$$|G_0(x)e^{-izx}| \leq e^A |G_0| \chi_{]-A,0]} + C\chi_{]-\infty,-A[} e^{-|x|} e^{(1-\eta)|x|} \tag{4}$$

(tenant compte de ce que $|G_0(x)| \leq Ce^{-|x|}$ si $x < -A$) ; la fonction majorante ci-dessus est intégrable sur $\mathbb{R}$ (car G_0 l'est sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-A, 0[$) et la convergence de l'intégrale définissant $\widehat{G}_0(z)$ pour un tel $z = \xi + i(-1+\eta)$ en résulte.

– Comme l'estimation (5) est valable pour tout z dans $\mathcal{P}^+_{-1+\eta}$ et pour tout x réel, on déduit comme au **III.2a** du théorème d'holomorphie des intégrales dépendant holomorphiquement d'un paramètre que $\widehat{G_0}$ est holomorphe dans tout domaine du type $\mathcal{P}^+_{-1+\eta}$ avec $\eta > 0$ arbitraire, donc dans $\mathcal{P}^+_{-1}$.

2d. [4] (coeff.2)

En utilisant la relation (dans L^1) $F_\beta - K_\beta * F_\beta = G_\beta$ établie au **III.1b**, la linéarité de la transformation de Fourier et le résultat établi au **II.2b**, il vient, pour tout $\beta \in]0,1[$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{F_\beta}(\xi) - \widehat{K_\beta}(\xi)\widehat{F_\beta}(\xi) = \widehat{G_\beta}(\xi)\,; \tag{5}$$

mais, comme on l'a vu au **III.2b**, $\widehat{F_\beta}(\xi) = \Phi(\xi - i\beta)$; de même, si $\beta \in]0,1[$ et $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{G_\beta}(\xi) = \int_{-\infty}^{0} (e^{-\beta x} G_0(x)) e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{0} G_0(x) e^{-i(\xi - i\beta)x} dx = \widehat{G_0}(\xi - i\beta)\,;$$

enfin, toujours pour $\beta \in]-1,1[$ et $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{K_\beta}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) e^{-\beta x} e^{-i\xi x} dx = \widehat{K}(\xi - i\beta)$$

au vu de la définition de $\widehat{K}$ dans $S(1)$ proposée au **I.2b** ; on peut donc relire (6) (lorsque $\beta \in]0,1[$) comme

$$\Phi(\xi - i\beta)(1 - \widehat{K}(\xi - i\beta)) = \widehat{G_0}(\xi - i\beta)\,, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\,;$$

comme $\xi - i\beta$, $\in \mathbb{R}$, $\beta \in]0,1[$, est le point courant de $\mathcal{P}^+_{-1} \cap \mathcal{P}^-_0$, on a bien établi la formule

$$\Phi(z)(1 - \widehat{K}(z)) = \widehat{G_0}(z)$$

voulue.

3a.

Premier item [4] (coeff.1)

Comme $1 - \widehat{K}(z) \sim z^2/3$ au voisinage de $z = 0$ (**I.3a**), la fonction A est bornée dans le disque épointé $D(0, 1/2) \setminus \{0\}$; la singularité $z = 0$ est donc fictive et A se prolonge de $S(1)\setminus\{0\}$ (où elle définit une fonction holomorphe puisque z^2+1, z et $1-\widehat{K}(z)$ le sont) à $S(1)$ (on pose $A(0)=1/3$ pour assurer la continuité en 0) ; comme 0 est le seul zéro de $1-\widehat{K}$ dans $S(1)$ (**I.3c**), le prolongement A ne s'annule pas dans $S(1)$.

Second item [2-2] (coeff.3) (2 points pour toute tentative raisonnable)

–Pour z dans $S(1)$, on a établi au **I.3b** que

$$\begin{aligned}\widehat{K}(z) &= \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2+z^2}=\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2iz}\int_1^R\left(\frac{1}{t-iz}-\frac{1}{t+iz}\right)dt\\ &= \frac{1}{2iz}\lim_{R\to+\infty}\Big(\ln(R-iz)-\ln(R+iz)\Big)\\ &= \frac{1}{2z}\lim_{R\to+\infty}\Big(\arg_{]-\pi,\pi[}(R+iz)-\arg_{]-\pi,\pi[}(R-iz)\Big)\,;\end{aligned}$$

on en déduit l'estimation (très grossière, mais suffisante à nos besoins)

$$|\widehat{K}(z)|\le\frac{\pi}{|z|}\,,\quad \forall z\in S(1)\setminus\{0\}\,;$$

comme

$$A(z)-1=\frac{1}{z^2}-\frac{z^2+1}{z^2}\widehat{K}(z)\,,\quad \forall z\in S(1)\setminus\{0\}\,,$$

il vient bien, dans $S(1)\setminus\{0\}$,

$$|A(z)-1|\le\frac{1}{|z|^2}+\pi\Big(1+\frac{1}{|z|^2}\Big)\frac{1}{|z|}\,,$$

soit

$$|A(z)-1|=\mathbf{O}(1/|z|)$$

lorsque $|z|$ tend vers l'infini, avec z restant dans $S(1)$.

3b [1-3] (coeff.3)

–Si ξ est réel non nul, on a

$$A(\xi)=\frac{\xi^2+1}{\xi^2}\Big(1-\frac{\operatorname{Arctan}\xi}{\xi}\Big)\,;$$

cette fonction est paire ; il suffit, pour décrire $A(\mathbb{R})$, d'étudier la fonction A sur $\mathbb{R}_+^*$; sur cet intervalle, on a

$$\begin{aligned}A'(\xi) &= -\frac{2}{\xi^3}-\frac{1}{\xi^3}-\operatorname{Arctan}\xi\Big(-\frac{1}{\xi^2}-\frac{3}{\xi^4}\Big)\\ &= \frac{\xi^3+3}{\xi^4}\left(\operatorname{Arctan}\xi-\frac{3\xi}{\xi^2+3}\right).\end{aligned}$$

– Posons, pour étudier le signe de A' sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$h(\xi) = \operatorname{Arctan} \xi - \frac{3\xi}{\xi^2+3}\,, \quad \xi > 0\,;$$

on a, pour $\xi > 0$,

$$h'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} - \frac{3}{3+\xi^2} + \frac{6\xi^2}{(\xi^2+3)^2} = \frac{4\xi^4}{(\xi^2+1)(\xi^2+3)^2} > 0\,;$$

la fonction h (qui est nulle en 0) est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui assure que A est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$; comme $A(\xi)$ tend vers $1/3$ lorsque ξ tend vers 0_+ et vers 1 lorsque ξ tend vers $+\infty$ (**III.3a**), on a donc $A(\mathbb{R}_+) = [1/3, 1[$; par parité de A, $A(\mathbb{R}) = [1/3, 1[$.

3c. [2-2] (coeff.2)

–Comme $|A(z) - 1| = \mathbf{O}(1/|z|)$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini, z restant dans $S(1)$ (**III.3a**), il existe $R > 0$ tel que, pour $z \in S(1) \cap \{z \in \mathbb{C}\,;\, |\mathrm{Re}\, z| > R\}$, on ait $|A(z) - 1| > 1/2$, ce qui implique *a fortiori* que pour de tels z, on ait $\mathrm{Re}\,[A(z)] > 1/2 > 1/6$.

–Comme la fonction $\mathrm{Re}\, A$ est continue (donc uniformément continue) sur le rectangle compact $[-R, R] \times [-1/2, 1/2]$ et que $A(\xi) = \mathrm{Re}\,(A(\xi)) \geq 1/3$ sur $[-R, R] \times \{0\}$, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\mathrm{Re}\, A > 1/6$ sur le rectangle $[-R, R] \times [-\alpha, \alpha]$; cette valeur α est donc bien telle que $A(\overline{S}(\alpha)) \subset \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\, z > 1/6\}$.

4a. [4] (coeff.1)

Soit z un nombre complexe fixé et $\epsilon > 0$; comme $|A(z) - 1| = \mathbf{O}(1/|z|)$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini, z restant dans $S(1)$ et que $\ln$ est continue et nulle en 1, il existe $R(\epsilon) > 0$ tel que, pour $R > R(\epsilon)$,

$$\sup_{\eta \in [-\alpha, \alpha]} |\ln (A(\pm R + i\eta)| \leq \epsilon\,;$$

pour $R > \max(R(\epsilon), |z|)$, on a donc

$$\left| \int_{R-i\alpha}^{R+i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t-z} dt \right| \leq \frac{2\alpha}{R - |z|}\, \epsilon$$

et

$$\left| \int_{-R-i\alpha}^{-R+i\alpha} \frac{\ln (A(t))}{t-z} dt \right| \leq \frac{2\alpha}{R - |z|}\, \epsilon\,;$$

comme ϵ était arbitraire, on en déduit bien

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{R-i\alpha}^{R+i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t-z}dt=0 \quad , \quad \lim_{R\to+\infty}\int_{-R-i\alpha}^{-R+i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t-z}dt=0\,.$$

4b. [3-1] (coeff.3)

– Soit z_0 un point de $\mathcal{P}^+_{-\alpha}$ (resp. de $\mathcal{P}^-_{\alpha}$) et $\epsilon_0>0$ tel que $\operatorname{Im} z_0-\epsilon_0>-\alpha$ (resp. $\operatorname{Im} z_0+\epsilon_0<\alpha$) ; comme $A(\overline{S}(\alpha))$ est inclus dans $\{z\in\mathbb{C}\,;\,\operatorname{Re} z>1/6$ (**III.3c**), la fonction $t\mapsto \ln A(t)$ est continue sur les droites $\mathbb{R}-i\alpha$ et $\mathbb{R}+i\alpha$; d'autre part, comme $|A(z)-1|=\mathbf{O}(1/|z|)$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini, z restant dans $S(1)$, et que $\ln(1+u)\sim u$ au voisinage de $u=0$, il existe une constante γ telle que

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\ln(A(\xi\pm i\alpha)|\leq\frac{\gamma}{1+|\xi|}\,;$$

pour tout z dans $D(z_0,\epsilon_0)$, on a donc, pour tout $\xi\in\mathbb{R}$,

$$\frac{|\ln A(\xi-i\alpha)|}{|\xi-i\alpha-z|}\leq\frac{\gamma}{(1+|\xi|)\,|\xi-i\alpha-(z_0-i\epsilon_0)|}$$
$$\left(\quad\text{resp.}\quad\frac{|\ln A(\xi+i\alpha)|}{|\xi+i\alpha-z|}\leq\frac{\gamma}{(1+|\xi|)\,|\xi+i\alpha-(z_0+i\epsilon_0)|}\quad\right)$$

(c'est une application immédiate du théorème des obliques inégales) ; la fonction majorante (de la variable ξ) figurant au membre de droite des inégalités ci-dessus est, d'une part intégrable sur $\mathbb{R}$ (car en $\mathbf{O}(1/(1+\xi^2))$, d'autre part indépendante de z, la majoration restant valide tant que $z\in D(z_0,\epsilon_0)$; lorsque t est fixé dans $\mathbb{R}\pm i\alpha$, la fonction

$$z\mapsto\frac{\ln A(t)}{t-z}$$

est holomorphe dans $D(z_0,\epsilon_0)$; le théorème d'holomorphie des intégrales dépendant holomorphiquement d'un paramètre nous assure que la fonction

$$z\mapsto U_+(z):=\int_{-\infty-i\alpha}^{+\infty-i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t-z}dt$$

(resp. la fonction

$$z\mapsto U_(z):=\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t-z}dt\quad)$$

est holomorphe dans $D(z_0, \epsilon_0)$; comme z_0 était arbitraire et que l'holomorphie est une propriété locale, ces deux fonctions sont bien respectivement holomorphes, l'une dans $\mathcal{P}^+_{-\alpha}$, l'autre dans $\mathcal{P}^-_{\alpha}$; comme

$$A_+(z) = \exp \frac{U_+(z)}{2i\pi} \quad , \quad A_-(z) = \exp \frac{U_(z)}{2i\pi} \, ,$$

l'holomorphie de A_+ et A_- respectivement dans $\mathcal{P}^+_{-\alpha}$ et $\mathcal{P}^-_{\alpha}$ résulte du fait que l'exponentielle est une fonction entière et que la composée de deux fonctions holomorphes est encore holomorphe.

– Comme $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, A_+ et A_- ne s'annulent pas.

4c. [2-4] (coeff.3)

– Comme la fonction ln est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et que $A(\overline{S}(\alpha)) \subset \{z \in \mathbb{C}\, ; \operatorname{Re} z > 1/6\}$, la fonction

$$t \mapsto \ln A(t)$$

est holomorphe dans un voisinage de $\overline{S}(\alpha)$; si $\Gamma_{\alpha,R}$ désigne le chemin paramétré C^1 par morceaux correspondant au bord du rectangle $[-R, R] \times [-\alpha, \alpha]$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique, il résulte de la formule de Cauchy que, pour tout point z de $]-R, R[\times]-\alpha, \alpha[$,

$$\ln A(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{\alpha,R}} \frac{\ln A(t)}{t - z} \, dt \, . \tag{6}$$

– On fixe maintenant z dans $S(\alpha)$ et l'on fait tendre R vers $+\infty$; grâce au résultat établi au **III.4a**, les contributions des segments verticaux à l'intégrale curviligne figurant au second membre de (7) ont vocation à tendre vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$; du fait de la convergence des deux intégrales

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\ln A(\xi \pm i\alpha)}{\xi \pm i\alpha - z} \, d\xi$$

(convergene établie comme conséquence des estimations nécessaires pour prouver au **III.4b** l'holomorphie de A_+ et A_- dans leurs domaines respectifs), on obtient, en faisant tendre R vers $+\infty$ dans (7), z étant toujours fixé dans $S(\alpha)$:

$$\ln A(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{-\infty - i\alpha}^{+\infty - i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t - z} \, dt - \int_{-\infty + i\alpha}^{+\infty + i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t - z} \, dt \right) ;$$

en exponentiant cette identité, on obtient bien $A(z) = A_+(z)/A_-(z)$ pour tout $z \in S(\alpha)$.

5. [4] **(coeff.2)**

Comme Φ est entière, Φ se développe en série entière (de rayon de convergence infini) autour de $z = 0$, soit

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \,;$$

les inégalités de Cauchy impliquent que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $R > 0$,

$$|\alpha_n| \leq \frac{\max_{|z|=R} |\Phi(z)|}{R^n} \,;$$

or, si $|\Phi(z)| = \mathbf{o}(|z|^{N+1})$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini,

$$\max_{|z|=R} |\Phi(z)| = \mathbf{o}(R^{N+1})$$

lorsque R tend vers $+\infty$; on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{R \to +\infty} |\alpha_n| R^{n-N-1} = 0 \,;$$

il en résulte $\alpha_n = 0$ dès que $n \geq N+1$, ce qui prouve que Φ est un polynôme de degré au plus égal à N.

6a. [4] **(coeff.1)**

Suivant la définition de A **III.3a** et la formule établie au **III.2d**, on a, pour tout z dans $\mathcal{P}^+_{-1} \cap \mathcal{P}^-_0$,

$$A(z)\Phi(z) = \frac{z^2+1}{z^2} \widehat{G_0}(z)\,;$$

si l'on se restreint à $\mathcal{P}^+_{-\alpha} \cap \mathcal{P}^-_0$, on a donc

$$\frac{A_+(z)}{A_-(z)} \Phi(z) = \frac{z^2+1}{z^2} \widehat{G_0}(z)\,;$$

utilisant le fait que, ni A_+, ni A_-, ni $z - i$ ne s'annulent dans ce dernier domaine, on peut y réécrire la formule précédente

$$\frac{(z+i)\widehat{G_0(z)}}{A_+(z)} = \frac{z^2 \Phi(z)}{(z-i)A_-(z)} \,.$$

6b.

Premier item. [4] (coeff.1)

La fonction

$$\Phi_- \,:\; z \mapsto \frac{z^2\Phi(z)}{(z-i)A_-(z)}$$

est holomorphe dans $\mathcal{P}_0^- \subset \mathcal{P}_\alpha^-$ puisque Φ (voir le **III.2a**), A_- (voir le **III.4b**) y sont holomorphes et que $(z-i)A_-$ ne s'y annule pas ; la fonction

$$\Phi_+ \,:\; z \mapsto \frac{(z+i)\widehat{G_0}(z)}{A_+(z)}$$

est, quant-à-elle, holomorphe dans $\mathcal{P}_{-\alpha}^+$, puisque A_+ est holomorphe et sans zéros dans ce domaine (**III.4b**) et que $\widehat{G_0}$ est holomorphe dans un ouvert plus grand, à savoir $\mathcal{P}_{-1}^+$ (voir le **III.2c**) ; dans l'intersection de leurs domaines de définition, à savoir dans $\mathcal{P}_{-\alpha}^+ \cap \mathcal{P}_0^-$, les deux fonctions Φ_- et Φ_+ coïncident ; elles se recollent donc en une fonction holomorphe dans l'union des leurs deux domaines de définition, à savoir $\mathbb{C}$ tout entier, en une fonction entière.

Second item. [4] (coeff.2)

On fixe ϵ dans $]0,\alpha[$; pour tout z dans $\overline{\mathcal{P}}_{-\epsilon}^-$, on a, en reprenant les estimations utilisées au **III.1b** et liées au fait que $f = \mathcal{O}(e^{\alpha x})$ pour tout $\alpha > 0$ lorsque x tend vers $+\infty$,

$$|\Phi(z)| \leq \int_0^{+\infty} |f(x)|e^{-\epsilon x}dx \leq C_{\epsilon/2}\int_0^{+\infty} e^{-\epsilon x/2}dx = \frac{2C_{\epsilon/2}}{\epsilon}\,;$$

comme

$$H(z) = \frac{z^2\Phi(z)}{(z-i)A_-(z)}$$

dans $\overline{\mathcal{P}}_{-\epsilon}^-$ et que $|z-i|/|z|$ est minoré par une constante γ_ϵ dans ce domaine, on a, pour tout z dans $\mathcal{P}_{-\epsilon}^-$,

$$|H(z)| \leq \frac{2C_{\epsilon/2}}{\gamma_\epsilon \epsilon}\frac{|z|}{|A_-(z)|}\ ;$$

dans $\overline{\mathcal{P}}_{-\epsilon}^+$, on a de même

$$|\overline{G_0}(z)| = \int_{-\infty}^0 |G_0(x)|e^{\epsilon|x|}dx = \widetilde{C}_\epsilon < +\infty$$

(puisque G_0 est intégrable et est $\mathbf{O}(e^{-|x|})$ lorsque x tend vers $-\infty$ (voir le **III.1a**) ; comme

$$H(z) = \frac{(z+i)\widehat{G_0}(z)}{A_+(z)}$$

dans $\overline{\mathcal{P}}^-_{-\epsilon}$, on a

$$|H(z)| \leq \widetilde{C}_\epsilon \frac{|z|+1}{|A_+(z)|}$$

pour tout z dans $\overline{\mathcal{P}}^+_{-\epsilon}$; il reste à minorer $|A_-|$ dans $\overline{\mathcal{P}}^-_{-\epsilon}$ et $|A_+|$ dans $\overline{\mathcal{P}}^+_{-\epsilon}$; les deux estimations étant identiques, nous prouverons d'abord la première : on a, pour tout z dans $\overline{\mathcal{P}}^-_{-\epsilon}$ (en reprenant les estimations du **III.4b, premier point**),

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-i\infty+i\alpha}^{i\infty+i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t-z} dt\right| &\leq \gamma \int_{\mathrm{R}} \frac{d\xi}{(1+|\xi|)\left((\xi - \operatorname{Re} z)^2 + (\alpha+\epsilon)^2\right)^{1/2}} \\
&\leq \gamma \left(\int_{\mathrm{R}} \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^2}\right)^{1/2} \left(\int_{\mathrm{R}} \frac{d\xi}{(\xi - \operatorname{Re} z)^2 + (\alpha+\epsilon)^2}\right)^{1/2} \\
&\leq \gamma \left(\int_{\mathrm{R}} \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^2}\right)^{1/2} \left(\int_{\mathrm{R}} \frac{d\xi}{\xi^2 + (\alpha+\epsilon)^2}\right)^{1/2}, \qquad (7)
\end{aligned}$$

la majoration finale étant indépendante de z ; de même, pour tout z dans $\overline{\mathcal{P}}^+_{-\epsilon}$ (toujours en reprenant les estimations du **III.4b, premier point**),

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-i\infty-i\alpha}^{i\infty-i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t-z} dt\right| &\leq \gamma \int_{\mathrm{R}} \frac{d\xi}{(1+|\xi|)\left((\xi - \operatorname{Re} z)^2 + (\alpha-\epsilon)^2\right)^{1/2}} \\
&\leq \gamma \left(\int_{\mathrm{R}} \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^2}\right)^{1/2} \left(\int_{\mathrm{R}} \frac{d\xi}{(\xi - \operatorname{Re} z)^2 + (\alpha-\epsilon)^2}\right)^{1/2} \\
&\leq \gamma \left(\int_{\mathrm{R}} \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^2}\right)^{1/2} \left(\int_{\mathrm{R}} \frac{d\xi}{\xi^2 + (\alpha-\epsilon)^2}\right)^{1/2}, \qquad (8)
\end{aligned}$$

la majoration finale étant indépendante de z ; on conclut de ces estimations que $|A_-|$ et $|A_+|$ sont uniformément minorées respectivement dans $\overline{\mathcal{P}}^-_{-\epsilon}$ et $\overline{\mathcal{P}}^+_{-\epsilon}$; il résulte des deux estimations précécentes de $|H(z)|$ dans chacun de ces deux domaines, combinées avec les minorations uniformes précédentes, et du fait que l'union de ces deux domaines couvre $\mathbb{C}$, que $|H(z)| = \mathbf{o}(|z|^2)$

lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$, donc (en invoquant le **III.5**) que H est un polynôme de degré au plus 1.

Troisième item. [4] (coeff.2)

Si $0 < \beta < \alpha$, on sait

$$\xi \in \mathbb{R} \mapsto \Phi(\xi - i\beta)$$

est la transformée de Fourier de F_β (**III.2b**) ; comme

$$\int_{\mathrm{R}} |F_\beta(x)|^2 dx = \int_0^{+\infty} e^{-2\beta x} |f(x)|^2 dx \leq C_{\beta/2}^2 \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} dx = \frac{C_{\beta/2}^2}{\beta},$$

F_β, donc aussi $\widehat{F_\beta}$, est dans $L^2(\mathbb{R})$; comme

$$\Phi(\xi - i\beta) = H(\xi - i\beta) \frac{\xi - i\beta - i}{(\xi - i\beta)^2} A_-(\xi - i\beta), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

et que, comme on l'a vu, $\xi \mapsto |A_(\xi - i\beta)|$ est minorée par une constante strictement positive, il s'avère indispensable, pour que $\xi \mapsto \Phi(\xi - i\beta)$ puisse représenter un élément de $L^2(\mathbb{R})$, que H soit un polynôme de degré 0, c'est à dire une constante ; il existe donc bien une constante C telle que

$$\Phi(z) = C \frac{z - i}{z^2} A_-(z)$$

pour tout z dans $\mathcal{P}_0^-$.

7a. [2-2] (coeff.4)

– On sait, d'après la formule d'inversion relative à la transformation de Fourier considérée comme opérateur de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, que l'on a bien, si $(\mu_k)_{k\geq 0}$ et $(\nu_k)_{k\geq 0}$ sont deux suites strictement croissantes (et tendant vers $+\infty$) de réels strictement positifs,

$$F_\beta = \frac{1}{2\pi} \lim_{\substack{L^2(\mathrm{R}) \\ k\to+\infty}} \left[\int_{-\mu_k} \Phi(\xi - i\beta) e^{i(\cdot)\xi} d\xi \right];$$

on peut donc extraire de la suite de fonctions

$$x \mapsto \int_{-\mu_k}^{\nu_k} \Phi(\xi - i\beta) e^{i\xi x} d\xi$$

une sous-suite convergeant presque partout (et en particulier pour presque tout $x > 0$) vers la fonction F_β ; pour presque tout $x > 0$, on peut donc affirmer que

$$f(x) = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\mu_{p_k}}^{\nu_{p_k}} \Phi(\xi - i\beta) e^{i(\xi - i\beta)x} d\xi \right).$$

Ceci n'est vrai que presque partout, l'ensemble négligeable dépendant *a priori* de de la sous-suite p_k et d'ailleurs aussi des suites $(\mu_k)_{k\geq 0}$ et $(\nu_k)_{k\geq 0}$; il faut donc maintenant s'affranchir de ces difficultés, même si la formule d'inversion de Fourier nous a permis d'entrevoir la réponse à la question.

–On peut écrire, pour tout $t \in \mathbb{R} - i\beta$,

$$\Phi(t) = C\frac{t-i}{t^2}(1 - A_-(t)) + C\frac{A_-(t)}{t^2} + \frac{C}{t} ;$$

si μ et ν sont deux nombres strictement positifs, une intégration par parties nous montre que, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} I_1(\mu, \nu; x) : \ &= \int_{-\mu}^{\nu} \frac{C}{\xi - i\beta} e^{i(\xi - i\beta)x} dx \\ &= \left[\frac{C}{(\xi - i\beta)} \frac{e^{i(\xi - i\beta)x}}{(ix)} \right]_{-\mu}^{\nu} + C \int_{-\mu}^{\nu} \frac{e^{i(\xi - i\beta)x}}{(\xi - i\beta)^2} d\xi ; \end{aligned}$$

lorsque $\mu = \mu_k$ et $\nu = \nu_k$, $k = 0, 1, ...$, correspondent aux valeurs prises par deux suites strictement croissantes de réels positifs tendant toutes deux vers l'infini avec k, la limite (lorsque k tend vers l'infini) de la suite $(I_1(\mu_k, \nu_k; x))_k$ existe et vaut

$$e^{\beta x} W_1(x),$$

où la fonction

$$W_1 : \ x \in \mathbb{R} \mapsto C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x}}{(\xi - i\beta)^2} dx$$

est une fonction continue (comme cotransformée de Fourier d'un élément de $L^1(\mathbb{R})$) ; de même, on a (en utilisant le théorème de convergence dominée et le fait que $|A_-|$ soit uniformément bornée sur $\mathbb{R} - i\beta$)

$$\lim_{k\to+\infty} \left(C \int_{-\mu_k}^{\nu_k} \frac{A_-(\xi - i\beta) e^{i(\xi - i\beta)x}}{(\xi - i\beta)^2} d\xi \right) = \int_{\mathrm{R}} \frac{A_-(\xi - i\beta) e^{i(\xi - i\beta)x}}{(\xi - i\beta)^2} d\xi ;$$

ici encore, la limite (qui est indépendante des suites $(\mu_k)_k$ et $(\nu_k)_k$) s'écrit sous la forme $e^{\beta x}W_2(x)$, où W_2 est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (comme cotransformée de Fourier d'un élément de $L^1(\mathbb{R})$) ; il reste à étudier le comportement de la suite

$$I_3(\mu_k,\nu_k;x) := C\int_{-\mu_k}^{\nu_k} C\frac{\xi - i\beta - i}{(\xi - i\beta)^2}(1 - A_-(\xi - i\beta))e^{i(\xi - i\beta)x}d\xi\,;$$

pour cela, il faut reprendre plus soigneusement l'estimation de

$$\left|\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t - \xi - i\beta}dt\right|$$

faite (grossièrement) au **III.6b, item 2** ; on majore ainsi cette intégrale (lorsque $\xi \neq 0$)

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t - \xi - i\beta}dt\right| &\leq \gamma\int_{\xi-\sqrt{|\xi|}}^{\xi+\sqrt{|\xi|}}\frac{du}{(1+|u|)\left((u-\xi)^2+(\alpha+\beta)^2\right)^{1/2}}\\ &+\gamma\frac{1}{|\xi|^{1/4}}\int_{|u-\xi|\geq\sqrt{|\xi|}}\frac{du}{(1+|u|)\left((u-\xi)^2+(\alpha+\beta)^2\right)^{1/4}}\,;\end{aligned}\tag{9}$$

une nouvelle application de Cauchy-Schwarz (comme dans les estimations du **III.6b, item 2**) à la seconde intégrale figurant à droite de l'inégalité ci-dessus assure que

$$\left|\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t - \xi - i\beta}dt\right| = \mathbf{O}(1/|\xi|^{1/4})$$

(de fait, avec plus de soin, on pourrait remplacer 1/4 par 1/2 mais nous n'en avons pas ici besoin) ; il en résulte

$$|1 - A_-(\xi - i\beta)| = \mathbf{O}(1/|\xi|^{1/4})$$

(puisque $\ln(1+t) \sim t$ au voisinage de 0 (dans $\mathbb{C}$) et que la suite $I_3(\mu_k,\nu_k;x)$ converge vers $e^{\beta x}W_3(x)$, où W_3 est la cotransformée de Fourier de la fonction intégrable

$$\xi \mapsto C\frac{\xi - i\beta - i}{(\xi - i\beta)^2}\left(1 - A_-(\xi - i\beta)\right);$$

on a ainsi justifié (pour $x > 0$) la convergence (sans ambigüité) de l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty-i\beta}^{+\infty-i\beta}\Phi(z)e^{izx}dz$$

vers $\widetilde{f}(x)$, où $\widetilde{f}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$; ce que nous avons dit lors du premier point concernant la formule d'inversion de Fourier nous assure que $\widetilde{f}(x) = f(x)$ presque partout sur $\mathbb{R}_+^*$, donc aussi partout sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque les deux fonctions sont continues.

7b. [4] (coeff.2)

On a l'estimation

$$\int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} |e^{izx}| \frac{|z-i|\,|A_-(z)|}{|z|^2} |dz| = e^{-\alpha' x} \int_{\mathrm{R}} \frac{|\xi + i\alpha' - i|}{|\xi + i\alpha'|^2} |A_-(\xi + i\alpha')| d\xi\,;$$

les estimations (9) envisagées au **III.7a, second point** montrent que $|A_-(\xi + i\alpha'| = \mathbf{O}(|\xi|^{-1/4})$ lorsque $|\xi|$ tend vers l'infini (il n'y a pas de différence au niveau des estimations (9) si ce n'est qu'il convient de remplacer $(\alpha+\beta)^2$ dans l'un des deux facteurs figurant dans les dénominateurs des intégrandes majorantes par $(\alpha - \alpha')^2 > 0$).

7c [1-3] (coeff.4)

– On considère $\alpha' \in]0, \alpha[$, $\beta \in]0,1[$, $R > 0$ et $\Gamma_{\alpha',\beta,R}$ le chemin C^1 par morceaux correspondant au bord du rectangle $[-R, R] \times [-\beta, \alpha']$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique ; la formule des résidus implique

$$\int_{\Gamma_{\alpha',\beta,R}} C e^{izx} \frac{z-i}{z^2} \frac{dz}{2i\pi} = C \mathrm{Res}_0 \left[\left(e^{izx} \frac{z-i}{z^2} A_-(z) \right) dz \right]\,;$$

l'idée est ensuite de déformer ce contour en faisant tendre R vers $+\infty$.

– les modules des intégrales curvilignes correspondant aux côtés verticaux de de ce rectangle sont majorés par

$$(\beta + \alpha') \frac{R+1+\beta}{R^2} \mathbf{O}_{\alpha',\beta}(R^{-1/4}) e^{|x| \max(\alpha', \beta)}$$

et tendent donc vers 0 lorsque x est fixé et R tend vers $+\infty$; l'intégrale sur le bord inférieur de ce rectangle converge (d'après le résultat obtenu au **III.7a** et le fait que

$$\Phi(z) = C \frac{z-i}{z^2} A_-(z)$$

dans $\mathcal{P}_0^-$, donc en particulier sur ce bord inférieur) vers $-if(x)$; l'intégrale sur le bord supérieur du rectangle converge, lorsque R tend vers l'infini, vers

$$iC \int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} e^{izx} \frac{z-i}{z^2} A_-(z) \frac{dz}{2\pi}\,;$$

il reste à calculer le résidu au pôle double $z = 0$; on l'obtient comme la dérivée (évaluée en $z = 0$) de la fonction

$$z \mapsto (z-i)e^{izx}A_-(z)\,,$$

soit

$$\text{Res}_0\left[\left(e^{izx}\frac{z-i}{z^2}A_-(z)\right)dz\right] = xA_-(0) + A_-(0) - iA'_-(0)\,;$$

en divisant le résultat obtenu par $-i$, on obtient

$$f(x) - C\int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} e^{izx}\frac{z-i}{z^2}A_-(z)\frac{dz}{2\pi} = ixA_-(0) + iA_-(0) + A'_-(0)\,,$$

d'où la formule avec $a = iA_-(0)$ et $b = iA_-(0) + A'_-(0)$.

7d. [1-3] (coeff.4)

– Pour tout z dans $\mathcal{P}_\alpha^-$ (donc en particulier pour $z = 0$), on a (de par la définition de A_- au **III.4b**) :

$$A_-(z) = \exp\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t-z}\,dt\,;\right.$$

en $z = 0$, il vient

$$A_-(0) = \exp\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t}\,dt\,;\right.$$

soit, pour $R > 0$, L_R le chemin paramétré obtenu en concaténant les chemmins

$$t \in [-R,-r] \mapsto t \quad , \quad t \in [-r,r] \mapsto re^{i\pi\frac{(r-t)}{2r}} \quad , \quad t \in [r,R] \mapsto t\,;$$

du fait de la parité de A sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{L_R}\ln A(t)\frac{dt}{t} = \int_{\mathcal{C}^+(0,r)}\ln A(t)\frac{dt}{t}\,;$$

on note maintenant $\widetilde{\Gamma}_R$ le contour obtenu en fermant L_R via la ligne polygonale $[R, R+i\alpha, -R+i\alpha, -R]$ (parcourue dans ce sens) ; l'idée est de faire tendre R vers $+\infty$ et de déformer ainsi $\widetilde{Gamma}_R$ en le chemin consistant à suivre L_R, puis $]+\infty+i\alpha, -\infty+i\alpha[$ (les jonctions se faisant à l'infini sur la sphère de Riemann).

- Voyons les justifications ; le fait que $|\ln A(t)|$ soit un $\mathbf{O}(|t|^{-1})$ lorsque $|t|$ tend vers ∞, t restant dans $\overline{S}(\alpha)$ (voir le **III.3a**, plus le fait que $\ln(1+u) \sim u$ au voisinage de $u=0$ dans $\mathbb{C}$) permet d'affirmer que les modules des intégrales curvilignes de la forme

$$\frac{\ln A(t)dt}{t}$$

le long des segments verticaux du parcours $\widetilde{\Gamma}_R$ tendent vers 0 lorsque R tend vers l'infini ; l'intégrale sur le bord horizontal supérieur du contour tend vers

$$\int_{\mathrm{R}+i\alpha} \ln A(t)\frac{dt}{t}$$

lorsque R tend vers $+\infty$ (il s'agit d'une intégrale absolument convergente) ; comme la fonction $t \mapsto (\ln A(t))/t$ est holomorphe au voisinage du domaine fermé enserré par $\widetilde{\Gamma}_R$, on a

$$\int_{\widetilde{\Gamma}_R} \ln A(t)\frac{dt}{t} = 0$$

par le théorème de Cauchy ; si l'on fait tendre R vers $+\infty$, on obtient bien compte tenu de ce qui prćède

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}^+(0,r)} \ln A(t)\frac{dt}{t} = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} \ln A(t)\frac{dt}{t}\,,$$

d'où la formule

$$A_-(0) = \exp\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}^+(0,r)} \ln A(t)\frac{dt}{t}\right); \tag{10}$$

on sait que $A(0) = 1/3$ (voir le **III.3a**) ; en faisant tendre r vers 0 dans la formule (10), on obtient

$$A_-(0) = \exp\Big(\frac{1}{2i\pi}(i\pi)\log(1/3)\Big) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

7e. [4] (coeff.1)

Si f est une solution de (WH) telle que $f(x) \sim x$ lorsque x tend vers $+\infty$, alors il résulte de la formule établie au **III.7c** et de l'estimation **III.7b** que $f(x) \sim C(iA_-(0)x+b) \sim x$ au voisinage de $+\infty$; on a donc forcément

$iA_-(0)C = 1$, d'où $C = -i\sqrt{3}$ (puisque $A_-(0) = 1/\sqrt{3}$ d'après le **III.7d**) ; dès lors, la fonction f est parfaitement déterminée (au moins sur $\mathbb{R}_+^*$) par la formule
$$f(x) = -i\sqrt{3}\int_{-\infty-i\beta}^{\infty+i\beta} e^{izx}\frac{z-i}{z^2}A_-(z)dz\,,\quad x>0$$
(au vu du **III.7a**) où
$$A_-(z) = \exp\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} \ln\Big[\frac{t^2+1}{t^3}(t-\operatorname{Arctan} t)\Big]\frac{dt}{t-z}\right);$$
le fait de disposer d'une telle formule suffit à prouver l'unicité de la solution f au problème (WH) telle que $f(x)\sim x$ au voisinage de $+\infty$; la continuité de f en $x=0$ assure en effet que f est parfaitement déterminée dès que ses valeurs sur $\mathbb{R}_+^*$ le sont, ce qui est le cas ici.

PARTIE IV (sur 4×46 points)

1a. [0-4] (coeff.1), pas de pénalisation si la question est traitée sous l'hypo thèse "u bornée"

–La fonction u est une fonction borélienne sur B ; si $\|u\|_\infty$ désigne le sup essentiel de $|u|$ sur B, A_n ($n\in\mathbb{N}^*$) le sous ensemble mesurable de B défini par
$$A_n := |u|^{-1}\Big(\Big]\|u\|_\infty + \frac{1}{n}, +\infty\Big[\Big)$$
et π_2 la projection de B sur $[-1,1]\setminus\{0\}$, on a, d'après le théorème de Fubini-Tonelli (Fubini dans le cadre des fonctions positives),
$$\iint_{A_n} dx d\mu = 0 = \int_{\mu\in\pi_2(A_n)} m\Big(\{x\in[0,+\infty[\,;\ |u(x,\mu)| > M + \frac{1}{n}\}\Big)\,,\quad (11)$$
m désignant la mesure de Lebesgue sur $[0,+\infty[$; or, du fait de la continuité des applications $u(\cdot,\mu)$, $\mu\in[-1,1]\setminus\{0\}$, on a, si $\mu\in\pi_2(A_n)$,
$$m\Big(\{x\in[0,+\infty[\,;\ |u(x,\mu)| > \|u\|_\infty + \frac{1}{n}\}\Big) > 0\,;$$

on déduit alors de (11) que $\pi_2(A_n)$ est un sous-ensemble négligeable de $[-1,1] \setminus \{0\}$ et qu'en conséquence, si

$$\mathcal{N} := \bigcup_{n=1}^{+\infty} \pi_2(A_n) \,,$$

on a, pour tout $\mu \in [-1,1] \setminus (\mathcal{N} \cup \{0\})$, pour tout $x \in [0,+\infty[$,

$$|u(x,\mu)| \leq \|u\|_\infty \ :$$

de plus $\mathcal{N}$ est de mesure nulle dans $[-1,1) \setminus \{0\}$ (comme union dénombrable de sous-ensembles de mesure nulle) ; dans toute cette partie, on remplacera $[-1,1]\setminus\{0\}$ par l'ensemble $[-1,1]^* := [-1,1]\setminus(\mathcal{N}\cup\{0\})$, de manière à ne plus avoir à supposer u essentiellement bornée, mais u <u>bornée</u> ; notons d'ailleurs que cette précision s'avère indispensable, ne serait-ce que pour la définition de $\langle u \rangle$:

$$\langle u \rangle(x) := \frac{1}{2}\int_{[-1,1]} u(x,\mu)d\mu = \frac{1}{2}\int_{[-1,1]^*} u(x,\mu)d\mu \ ;$$

notons d'ailleurs que $|\langle u \rangle|$ est bornée (partout) par $\|u\|_\infty$; cette précaution prise, on peut attaquer le problème.

– Soit

$$\mathcal{F}_u(x) = \frac{1}{2}\int_{[-1,1]} \mu u(x,\mu) = \frac{1}{2}\int_{[-1,1]^*} \mu u(x,\mu)d\mu \,;$$

comme $\langle u \rangle$ est bornée sur $[0,\infty[$ (par $\|u\|_\infty$), on déduit du fait que u satisfait (MSa) que

$$|\mu u| + \Big|\frac{\partial}{\partial x}[\mu u]\Big| \leq 3\|u\|_\infty$$

sur $[0,\infty[\times[-1,1]^*$; comme

$$x \mapsto u(x,\mu)$$

est continuement différentiable sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $\mu \in [-1,1]^*$, il résulte du théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre (de Lebesgue), que $\mathcal{F}_u$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\mathcal{F}_u'(x) = \frac{1}{2}\int_{[-1,1]^*} [\mu \frac{\partial u}{\partial \mu}(x,\mu)]d\mu = \frac{1}{2}\int_{[-1,1]^*} [\langle u \rangle(x) - u(x,\mu)]d\mu = 0\,;$$

ceci implique bien que $\mathcal{F}_u$ est constante.

1b. [2-4] (coeff.2)

– Une différentiation formelle sous le signe somme nous parmet d'écrire que, sur $\mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_u'(x) &= \frac{1}{2}\int_{[-1,1]^*} \mu\Big[\mu\frac{\partial u}{\partial x}(\mu,x)\Big]d\mu \\ &= \frac{1}{2}\int_{[-1,1]^*} \mu(-u(x,\mu)+\langle u\rangle(x))d\mu = -\mathcal{F}_u\,;\end{aligned}$$

on a donc

$$\mathcal{G}_u(x) = \mathcal{G}_u(0) - x\mathcal{F}_u\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+\,.$$

– La justification de ce qui précède repose encore sur l'utilisation du théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre (de Lebesgue) ; on a en effet ici encore

$$|\mu^2 u| + \Big|\frac{\partial}{\partial x}[\mu^2 u]\Big| \le 3\|u\|_\infty$$

pour tout (x,μ) dans $\mathbb{R}_+ \times [-1,1]^*$, tandis que $x \mapsto u(x,\mu)$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $\mu \in [-1,1]^*$.

1c. [4] (coeff.2)

Pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, on a

$$|\mathcal{G}_u(x)| \le \frac{1}{2}\int_{[-1,1]^*} \|u\|_\infty d\mu = \|u\|_\infty\,;$$

cette fonction $\mathcal{G}_u$ est donc bornée ; comme on sait d'autre part (**IV.1b**) que $\mathcal{G}_u(x) = \mathcal{G}_u(0) - x\mathcal{F}_u$, on en déduit bien $\mathcal{F}_u = 0$.

2a [1-3] (coeff.2)

– On sait que, pour tout μ dans $[-1,1]^*$, la fonction $x \mapsto u(x,\mu)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a les estimations

$$|\mu u^2| + \Big|\frac{\partial}{\partial x}[\mu u^2]\Big| \le 3\|u\|_\infty^2$$

de par le fait que

$$\frac{\partial}{\partial x}[\mu u^2] = 2u(\langle u\rangle - u)$$

puisque u vérifie (MSa).

– On a donc ici que $\mathcal{H}_u$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}'_u(x) &= -\int_{[-1,1]^*} u(x,\mu)(u(x,\mu)-\langle u\rangle(x))d\mu \\ &= -\int_{[-1,1]^*} (u(x,\mu)-\langle u\rangle(x))^2 d\mu \leq 0\end{aligned}$$

puisque

$$\int_{[-1,1]^*} \langle u\rangle(x)(u(x,\mu)-\langle u\rangle(x))d\mu = 0\,;$$

il en résulte la décroissance de $\mathcal{H}_u$ sur $\mathbb{R}_+$; notons que l'on pouvait utiliser ici aussi l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui permettait d'affirmer que

$$\frac{1}{2}\Big(\int_{[-1,1]^*} u(x,\mu)d\mu\Big)^2 = \langle u\rangle(x)\Big(\int_{[-1,1]^*} u(x,\mu)d\mu\Big) \leq \int_{[-1,1]^*} u(x,\mu)^2 d\mu\,.$$

2b. [3-1] (coeff.2)

– La fonction

$$(x,\mu)\mapsto (u(x,\mu)-\langle u\rangle(x))^2$$

est une fonction borélienne positive sur B ; en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli (Fubini dans le cadre des fonctions positives), on a

$$\iint_B (u(x,\mu)-\langle u\rangle(x))^2 d\mu dx = \int_0^{+\infty}\left(\int_{-1}^1 (u(x,\mu)-\langle u\rangle(x))^2 d\mu\right)dx\,;$$

or

$$\int_{-1}^1 (u(x,\mu)-\langle u\rangle(x))^2 d\mu = \int_{[-1,1]^*} (u(x,\mu)-\langle u\rangle(x))^2 d\mu = -\mathcal{H}_u(x)'$$

(d'après le calcul fait au **IV. 2a**).

– on a donc

$$\iint_B (u(x,\mu)-\langle u\rangle(x))^2 d\mu dx = -\int_0^{+\infty} \mathcal{H}_u(x)' dx = -\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \mathcal{H}'_u(x)dx$$

(théorème de convergence monotone) ; on a donc finalement

$$\iint_B (u(x,\mu)-\langle u\rangle(x))^2 d\mu dx = -\lim_{n\to+\infty}(\mathcal{H}_u(n)-\mathcal{H}_u(0)) \leq \mathcal{H}_u(0)$$

du fait de la décroissance de $\mathcal{H}_u$.

2c. [4] (coeff.1)
On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{[-1,1]^*}\mu(u(x,\mu)-\langle u\rangle(x))^2d\mu &= \frac{1}{2}\int_{[-1,1]^*}\mu u(x,\mu)^2d\mu \\ &\quad -2\langle u\rangle(x)\mathcal{F}_u+\frac{\langle u\rangle(x)^2}{2}\int_{[-1,1]^*}\mu d\mu \\ &= \frac{1}{2}\int_{[-1,1]^*}\mu(u(x,\mu))^2d\mu=\mathcal{H}_u(x)\end{aligned}$$

puisque $\mathcal{F}_u=0$ (**IV.1c**).

2d. [2-2] (coeff.2)
– La fonction $\mathcal{H}_u$ est décroissante (**IV.2a**) sur $\mathbb{R}_+$; d'autre part, d'après les calculs faits au **IV.2b**, on a, pour tout $X>0$,

$$\int_0^X \mathcal{H}'_u(x)dx=\mathcal{H}_u(X)-\mathcal{H}_u(0)\geq -\iint_B |u(x,\mu)-\langle u\rangle(x)|^2d\mu>-\infty\ ;$$

la fonction $\mathcal{H}_u$ est donc décroissante et minorée ; elle admet une limite l.
– Il suit de la formule établie au **IV.2c** que

$$|\mathcal{H}_u(x)|\leq\int_{-1}^1 |u(x,\mu)-\langle u\rangle(x)|^2d\mu\,;$$

cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après le **IV.2b** et le théorème de Fubini-Tonelli ; comme d'autre part $\mathcal{H}_u(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$, on a nécessairement $l=0$.

2e. [1-3] (coeff.3)
–On a (voir le **IV.2b**), pour tout $X>0$,

$$\int_0^X\int_{[-1,1]^*}(u(x,\mu)-\langle u\rangle(x))^2d\mu dx=\mathcal{H}_u(0)-\mathcal{H}_u(X)\,;$$

en faisant tendre X (selon une suite $(X_k)_k$) vers $+\infty$ et en utilisant le **IV.2d** et le théorème de convergence monotone, on voit que

$$\|u-\langle u\rangle\|^2_{L^2(B)}=\mathcal{H}_u(0)\,;$$

notons que l'on peut ici invoquer, à la place du théorème de convergence monotone, le fait que $\mathcal{H}_u$ soit positive (car décroissante vers 0) et qu'en conséquence, pour tout $X > 0$,

$$\int_0^X \int_{[-1,1]^*} (u(x,\mu) - \langle u\rangle(x))^2 d\mu dx \leq \mathcal{H}_u(0)\,,$$

ce qui suffit aussi à impliquer l'inégalité

$$\|u - \langle u\rangle\|^2_{L^2(B)} \leq \mathcal{H}_u(0)$$

suffisante à nos besoins pour la suite.

– On a, par définition,

$$\mathcal{H}_u(0) := \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \mu u(0,\mu)^2 d\mu \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \mu(h(\mu))^2 d\mu$$

puisque la fonction $\mu \mapsto \mu(h(u)^2$ est négative sur $[-1,0]$ (on utilise ensuite la relation de Chasles) ; on a donc finalement

$$\|u - \langle u\rangle\|^2_{L^2(B)} \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \mu(h(\mu))^2 d\mu\,;$$

la constante $C_1 = 1/2$ convient donc ici.

3. [2-2] (coeff.2)

– Si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (MSa-b) continues sur B, leur différence $u = u_1 - u_2$ est solution du même problème, mais cette fois avec donnée au bord $h = 0$; il résulte du **IV.2e** que

$$\iint_B |u(x,\mu) - \langle u\rangle(x)|^2 dx d\mu = 0\,,$$

et donc, puisque u est continue dans B, $u(x,\mu) = \langle u\rangle(x)$ pour tout (x,μ) dans B ; on a donc, pour tout $\mu \in [-1,1] \setminus \{0\}$, $u(x,\mu) = \langle u\rangle(x)$.

– En utilisant (MSa), on déduit de ce qui précède que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\mu) = 0$$

dans $[-1,1] \setminus \{0\}$; chaque $u(\cdot,\mu)$ est donc une fonction constante, égale à 0 puisque nulle en 0 (du fait de (MSb)) ; on a donc bien prouvé $u \equiv 0$, donc $u_1 \equiv u_2$ dans B, ce qui prouve l'unicité de la solution continue dans B au problème (MSa-b).

4a. [2-2] (coeff.3)

– Soit $\mu > 0$; comme

$$\langle u\rangle(x) = u(x,\mu) - \mu\frac{\partial u}{\partial x}(x,\mu)$$

pour $x > 0$ et que $u(\cdot,\mu)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $\langle u\rangle$ est (sur $\mathbb{R}_+^*$) la restriction à cet intervalle d'une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ (en l'occurrence la fonction

$$x \mapsto u(x,\mu_0) - \mu\frac{\partial u}{\partial x}(x,\mu_0)$$

avec μ_0 arbitraire) ; on notera pour simplifier $\langle u\rangle$ ce prolongement (on verra en fait au **IV.4b** que $\langle u\rangle$ était une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui justifie ici cet abus de notation) ; si l'on résout le problème de Cauchy sur $\mathbb{R}_+$ correspondant à l'équation du premier ordre

$$\mu y'(x) + y(x) = \langle u\rangle(x) \quad x \in \mathbb{R}_+$$

avec donnée initiale $y(0) = h(\mu)$, on trouve immédiatement, en utilisant la méthode de la variation des constantes :

$$y(x) = e^{-x/\mu}h(\mu) + \int_0^x e^{-(x-y)/\mu}\frac{1}{\mu}\langle u\rangle(y)dy$$

(notons que la valeur imposée à $\langle u\rangle(0)$ n'affecte pas cette formule puisque $\{0\}$ est de mesure nulle) ; on a donc bien $y(x) = u(x,\mu)$ pour tout $x \geq 0$, pour tout $\mu \in]0,1]$, puisque

$$x \mapsto u(x,\mu)$$

est précisément solution de ce problème de Cauchy.

– Pour $\mu \in [-1,0[$, calculons

$$\int_x^{+\infty} e^{-(y-x)/|\mu|}\frac{1}{|\mu|}\langle u\rangle(y)dy$$

après avoir remarqué que cette intégrale était bien convergente car $|\langle u\rangle|$ était une fonction bornée par $\|u\|_\infty$; on a, en utilisant le fait que u satisfait (MSa) :

$$\int_x^{+\infty} e^{-(y-x)/|\mu|}\frac{1}{|\mu|}\langle u\rangle(y)dy \quad = \quad \int_x^{+\infty} e^{-(y-x)/|\mu|}\frac{1}{|\mu|}u(y,\mu)dy$$

$$
\begin{aligned}
& \qquad - \int_x^{+\infty} e^{-(y-x)/|\mu|} \frac{\partial u}{\partial y}(y,\mu) dy \\
= & \int_x^{+\infty} e^{-(y-x)/|\mu|} \frac{1}{|\mu|} u(y,\mu) dy \\
& \qquad - e^{x/|\mu|} \Big[e^{-y/|\mu|} u \Big]_x^{+\infty} \\
& \qquad - \frac{e^{x/|\mu|}}{|\mu|} \int_x^{+\infty} e^{-y/|\mu|} u(y,\mu) dy \\
= & -e^{x/|\mu|} \Big[e^{-y/|\mu|} u \Big]_x^{+\infty} = u(x,\mu)
\end{aligned}
$$

en utilisant une intégration par parties.

4b. [1-3] (coeff.3)

– La continuité de $\langle u \rangle$ est immédiate à partir de sa définition (on connaissait d'ailleurs déjà la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque u est solution de (MSa)) si l'on se place dans le cas où u est bornée ; c'est en effet une conséquence du théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre de Lebesgue puisque, pour chaque $\mu \in [-1,1] \setminus \{0\}$, la fonction

$$x \mapsto u(x,\mu)$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$|u(x,\mu)| \le \|u\|_\infty .$$

– Dans le cadre du problème, on ne peut suppposer u bornée et il faut donc partir de

$$\langle u \rangle(x) = \frac{1}{2} \int_{[-1,1]^*} u(x,\mu) d\mu \, ;$$

pour chaque $\mu \in [-1,1]^*$, la fonction $x \mapsto u(x,\mu)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$; pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, pour tout μ dans $[-1,1]^*$, on a $|u(x,\mu)| \le \|u\|_\infty$; le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre s'applique encore, mais dans ce nouveau cadre cette fois.

4c. [4] (coeff.2)

Supposons que u_1 et u_2 soient deux éléments de $\mathcal{E}$ solutions de (MSa-b) ; leur différence u est solution de (MSa-b) avec $h \equiv 0$ et se représente avec les formules (1a) et (1b) du **IV. 4a** ; il est facile de voir que la fonction

$$F_u^+ : \; (x,\mu) \mapsto \int_0^x e^{y/\mu} \langle u \rangle(y) dy$$

est continue sur $\mathbb{R}_+\times]0,1]$ (en x, c'est une primitive de fonction continue, en μ, la dérivée partielle existe et est continue de par le théorème élémentaire de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre) la fonction est donc de fait de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+\times]0,1]$; de même, la fonction

$$F_u^- : (x,\mu) \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-y/|\mu|}\langle u\rangle(y)dy \;=\; \int_1^{\infty} e^{-y/|\mu|}\langle u\rangle(y)dy - \int_1^{x} e^{-y/|\mu|}\langle u\rangle(y)dy$$

admet sur $[-1,0[$ des dérivée partielles continues (en (x,μ)) par rapport à x (c'est une primitive en x de la fonction continue $(x,\mu)\mapsto -\langle u\rangle(x)e^{-x/|\mu|}$) et par rapport à y (on utilise le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre de Lebesgue pour ce qui concerne l'intégrale sur $[1,+\infty[$, le théorème élémentaire pour ce qui concerne l'intégrale sur $[1,x]$) ; il résulte de la continuité de F_u^+ et F_u^- que u est continue sur B ; il suit alors du **IV.3** que $u\equiv 0$, ce qui implique $u_1\equiv u_2$ dans B et prouve donc la clause d'unicité.

5a. [2-2] (coeff.2)

On prouve le résultat par récurrence, nous montrons que

$$u_n(x,\mu) \le u_{n+1}(x,\mu)$$

et $u_n(x,\mu) \le \|h\|_\infty$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ et tout $\mu\in[-1,1]\setminus\{0\}$ tel que $h(|\mu|)\le\|h\|_\infty$ (on notera $[-1,1]^{**}$ l'ensemble de tels μ), soit pour presque tout μ de $[-1,1]\setminus\{0\}$, ce qui sera notre hypothèse inductive (H_n) ; comme $u_0\equiv 0$, le fait que $u_1(x,\mu)=e^{-x/\mu}h(\mu)$ pour $\mu>0$ et $u_1(x,\mu)=0$ pour $\mu<0$ montre que l'hypothèse (H_0) est satisfaite ; si (H_{n-1}) est vraie, c'est-à-dire si $u_n(x,\mu)\ge u_{n-1}(x,\mu)$ et $u_n(x,\mu)\le\|h\|_\infty$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ et pour μ tel que $h(|\mu|)\le\|h\|_\infty$, on a, par monotonie de l'intégrale

$$\langle u_n\rangle(x) = \frac{1}{2}\int_{[-1,1]^{**}} u_n(x,\mu)d\mu \ge \frac{1}{2}\int_{[-1,1]^{**}} u_{n-1}(x,\mu)d\mu = \langle u_{n-1}\rangle(x)$$

pour tout $x\in\mathbb{R}_+$; le fait que $u_n(x,\mu)\le\|h\|_\infty$ pour tout (x,μ) dans $\mathbb{R}_+\times[-1,1]^{**}$ implique aussi (toujours par monotonie de l'intégrale) que

$$\langle u_n\rangle(x) = \frac{1}{2}\int_{[-1,1]^{**}} u_n(x,\mu)d\mu \le \|h\|_\infty\,.$$

– On a donc, pour tout $\mu>0$ de $]0,1]$ tel que $h(\mu)\le\|h\|_\infty$, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, en utilisant (H_{n-1}) et la formule (1a),

$$u_{n+1}(x,\mu)-u_n(x,\mu) = \frac{1}{\mu}\int_0^x e^{-(x-y)/\mu}(\langle u_n\rangle(y)-\langle u_{n-1}\rangle(y))dy \ge 0\,;$$

on a aussi, toujours grâce à la formule (1a),

$$u_n(x,\mu) \leq e^{-x/\mu}\|h\|_\infty + \frac{1}{\mu}\|h\|_\infty \int_0^x e^{-(x-y)/\mu} dy = \|h\|_\infty \,.$$

– On a aussi, pour tout $\mu \in [-1, 0[$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, en utilisant (H_{n-1}) et la formule (1b),

$$u_{n+1}(x,\mu) - u_n(x,\mu) = \frac{1}{|\mu|} \int_x^{+\infty} e^{-(y-x)/|\mu|} (\langle u_n\rangle(y) - \langle u_{n-1}\rangle(y)) dy \geq 0 \,;$$

on a aussi, toujours grâce à la formule (1b),

$$u_n(x,\mu) \leq \frac{1}{|\mu|}\|h\|_\infty \int_x^{\infty} e^{-(x-y)/\mu} dy = \|h\|_\infty \,;$$

l'assertion (H_n) est alors satisfaite, et la récurrence fonctionne.

On remarque que, pour tout (x, μ) dans B, le même raisonnement montre que la suite $(u_n(x, \mu))_n$ est croissante (puisque la fonction h est supposée partout positive et que l'hypothèse inductive $u_n \geq u_{n-1}$ sur B implique $\langle u_n\rangle \geq \langle u_{n-1}\rangle$ sur $\mathbb{R}_+$ et en conséquence, au vu des formules (1a) ou (1b), $u_n(x, \mu) \leq u_{n+1}(x, \mu)$ pour tout (x, μ) dans B) ; la fonction dominant cette suite de fonctions est la fonction

$$(x, \mu) \mapsto \max(h(\mu), \|h\|_\infty) \,,$$

au lieu de la fonction constante $\|h\|_\infty$ qui ne la domine que sur $\mathbb{R}_+ \times [-1, 1]^{**}$.

5b. [2-2] (coeff.2)

– La suite u_n est une suite de fonctions positives, croissante sur l'ensemble B, dominée par la fonction $(x, \mu) \mapsto \max(h(\mu), \|h\|_\infty)$ (voir le **IV.5a**)) ; cette suite converge donc simplement vers une fonction borélienne u partout finie sur B.

– Le théorème de convergence monotone implique que, pour tout (x, μ) dans B, on a, suivant que $\mu > 0$ ou $\mu < 0$ la formule (1a) ou la formule (1b) ; en effet la suite $\langle u_n\rangle$ converge en croissant vers la fonction $\langle u\rangle$ si u_n converge en croissant vers u sur $\mathbb{R}_+ \times [-1, 1]^{**}$ (il y a donc ici deux applications successives du théorème de convergence monotone de Beppo-Levi nécessaires pour conclure).

5c. [4] (coeff.4)

Soit u la limite de la suite (u_n) construite au **IV.5a** et dont on a prouvé l'existence au **IV.5b** ; comme la fonction u vérifie (1a) et (1b) et que u est essentiellement bornée par $\|h\|_\infty$ (**IV.5a**), il faut montrer, pour prouver que u est dans $\mathcal{E}$, que toutes les fonctions $x \mapsto u(x,\mu)$, $\mu \in [-1,1] \setminus \{0\}$, sont bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Pour montrer cela, on commence à remarquer que ces formules impliquent (puisque $\langle u \rangle$ est essentiellement bornée par $\|h\|_\infty$) que les applications $x \mapsto u(x,\mu)$, $\mu \in [-1,1] \setminus \{0\}$ sont toutes continues ; d'autre part, on a vu (théorème de convergence monotone) que

$$\langle u \rangle (x) = \int_{[-1,1]^{**}} u(x,\mu) d\mu \,;$$

comme $|u(\mu,x)| \leq \|h\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout μ dans $[-1,1]^{**}$, la fonction $\langle u \rangle$ est continue d'après le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre (de Lebesgue) ; il résulte alors du fait que u vérifie (1a) ou (1b) que

$$x \mapsto u(x,\mu)$$

se présente comme une fonction de classe C^1 (primitive de fonction continue $\times$ fonction continue, à laquelle il faut ajouter si $\mu > 0$ la fonction $x \mapsto h(\mu)e^{-x/\mu}$) ; la fonction u (qui est dans $L^\infty(B)$ car essentiellement bornée par $\|h\|_\infty$) est donc bien dans $\mathcal{E}$.

Un calcul immédiat fait en utilisant les formules (1a) (si $\mu > 0$) ou (1b) (si $\mu < 0$) montre que $x \mapsto u(x,\mu)$ est solution de l'équation différentielle du premier ordre avec second membre (MSa) sur $\mathbb{R}_+$; en appliquant (1a) après avoir fait tendre x vers 0, on trouve $u(0,\mu) = h(\mu)$, ce qui achève de prouver que u est une solution de (MSa-b).

5d. [4] (coeff.1)

Toute fonction h de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ appartenant à $L^\infty(]0,1])$ s'écrit $h = h_+ - h_-$, où h_+ et h_- ont les mêmes propriétés, mais sont en plus positives ($h_+ := \sup(h,0)$, $h_- := \sup(-h,0)$) ; on associe à h_+ (resp. à h_-) via le processus décrit dans la suite de questions **IV. 5abc** une solution u_+ (resp u_-) du problème (MSa-b) avec condition initiale h_+ (resp. h_-) ; $u = u_+ - u_-$ est une solution de (MSa-b) avec condition initiale h (juste par linéarité) ; cette solution est unique au vu du **IV.4c**.

6a. [4] (coeff.1)

On doit avoir

$$\mu + x + g(\mu) - \int_{-1}^{1} g(\mu)d\mu - x \equiv 0$$

pour tout $x > 0$, pour tout μ dans $[-1,1] \setminus \{0\}$; on a donc $g(\mu) + \mu = C$, où C est une constante ; réciproquement, si $g(\mu) = -\mu + C$, la fonction $x \mapsto x + g(\mu)$ vérifie bien le jeu d'équations voulu.

6b. [4] (coeff.2)

Soit u la solution de (MSa-b) avec donnée initiale μ et soit w la fonction définie dans B par

$$w(x,\mu) := u(x,\mu) + x - \mu\,;$$

cette fonction répond aux exigences (2abc) ; si w_1 et w_2 sont deux fonctions répondant aux exigences de (2abc), les fonctions

$$u_j : \ (x,\mu) \mapsto w_j(x,\mu) - x + \mu$$

sont dans $\mathcal{E}$ et sont solutions de (MSa-b) avec donnée initiale $h(\mu) = \mu$; d'après la conclusion de **IV.5d**, on a $u_1 \equiv u_2$ dans B, donc $w_1 \equiv w_2$ dans B, ce qui prouve l'unicité d'une fonction w répondant aux exigences (2abc).

6c. [4] (coeff.2)

On a

$$\int_{-1}^{1} \mu(w(x,\mu) - x + \mu)d\mu = 0$$

puisque, on l'a vu au **IV. 6b**, $w - x + \mu$ est solution de (MSa-b) (on lui applique alors **IV. 1c**) ; il vient alors

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu w(x,\mu)d\mu = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu^2 d\mu = -1/3\,.$$

7a. [4] (coeff.6)

Comme la preuve des formules (1a) et (1b) au **IV. 4a** n'a fait intervenir que les hypothèses (MSa) et (MSb) et le fait que $\langle u\rangle$ avait une croissance contrôlée en x (si u est de la forme $v + x$ avec $v \in \mathcal{E}$, la preuve marcherait encore, pourvu que u soit solution de (MSa) et (MSb), par exemple avec $h \equiv 0$), ce jeu de formules (1a-b) est vérifié par l'unique solution w du problème posé au **IV. 6b** ; on calcule alors

$$\langle w\rangle(x) := \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u(x,\mu)d\mu = \langle u\rangle(x)$$

en utilisant les formules (1a) (pour $\mu < 0$) et (1b) (pour $\mu > 0$), et bien sûr le théorème de Fubini ; on a donc, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}\langle w\rangle(x) &= \int_{-1}^{0}\Big(\int_x^{+\infty} e^{-|x-y|/|\mu|}\langle w\rangle(y)dy\Big)\frac{d\mu}{|\mu|}\\ &\qquad + \int_0^1 \Big(\int_0^x e^{-|x-y|/\mu}\langle w\rangle(y)dy\Big)\frac{d\mu}{\mu}\\ &= \int_0^1\Big(\int_0^\infty e^{-|x-y|/\mu}\langle w\rangle(y)dy\Big)\frac{d\mu}{\mu}\,;\end{aligned}$$

la clause de sécurité du théorème de Fubini est valide ici car $w(y)-y$ est une fonction bornée ; en effet

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{R}}\Big(\int_0^1 e^{-|x-y|/\mu}\frac{d\mu}{\mu}\Big)|\langle w\rangle(y)|dy &= \int_{\mathrm{R}}\Big(\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t|x-y|}}{t}dt\Big)|\langle w\rangle(y)|dy\\ &= K*|\langle w\rangle|(x) < +\infty\,;\end{aligned}$$

en supprimant les modules et en profitant des mêmes intervertions d'intégrales (autorisées puisque la clause de sécurité de Fubini est remplie), on trouve

$$\forall x \geq 0\,,\quad \langle w\rangle(x) = K*\langle w\rangle(x)\,,$$

ce qui montre que $\langle w\rangle$ satisfait (WH) ; comme $\langle w\rangle(x) \sim x$ lorsque x tend vers l'infini, $\langle w\rangle$ est bien (voir **III.7e**) l'unique solution de (WH) satisfaisant la condition supplémentaire $\langle w\rangle(x) \sim x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

7b. [4] (coeff.1)

On a, suivant la formule (1b) dont on a vu au **IV.7a** qu'elle était applicable :

$$\forall \mu \in]0,1]\,,\quad w(0,-\mu) = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} e^{-y/\mu}\langle w\rangle(y)dy = \frac{1}{\mu}\widehat{\Phi}(-i/\mu)\,,$$

où Φ est la transformée de Fourier complexe de $\langle w\rangle$ introduite au **III.2a** ; on a, en utilisant la formule établie au **III.6b** et le calcul de C effectué au **III.7e** ($C = -i\sqrt{3}$),

$$\begin{aligned}w(0,-\mu) &= -\frac{i\sqrt{3}}{\mu}\Big(\frac{-i/\mu - i}{-1/\mu^2}\Big)A_-(i/\mu) = \sqrt{3}\,\mu(\mu+1)A_-\Big(\frac{-i}{\mu}\Big)\\ &= \sqrt{3}\,\mu(\mu+1)\exp\Big(\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha}\ln\Big[\frac{t^2+1}{t^3}(t-\operatorname{Arctan} t)\Big]\frac{dt}{\mu t + i}\Big)\,.\end{aligned}$$

PARTIE V (sur 4×14 points)

1. [1-3] (coeff.4)

– On avait (au **IV.2a**) :

$$\mathcal{H}_u'(x) = -\int_{-1}^{1} (u(x,\mu) - \langle u\rangle(x))^2 d\mu\,;$$

en multipliant par $e^{2\gamma x}$,

$$\begin{aligned} e^{2\gamma x}\mathcal{H}_u(x) &= -\int_{1}^{1} e^{2\gamma x}(u(x,\mu) - \langle u\rangle(x))^2 d\mu \\ &= \frac{d}{dx}[\mathcal{H}_u e^{2\gamma x}] - 2\gamma e^{2\gamma x}\mathcal{H}_u(x)\,. \end{aligned}$$

–Compte tenu de l'expression intégrale de $\mathcal{H}_u$ obtenue au **IV. 2c**,

$$\begin{aligned} -2\gamma e^{2\gamma x}\mathcal{H}_u(x) &= -\gamma e^{2\gamma x}\int -1^1 \mu(u(x,\mu) - \langle u\rangle(x))^2 d\mu \\ &\geq -\gamma e^{2\gamma x}\int_{-1}^{1} (u(x,\mu) - \langle u\rangle(x))^2 d\mu\,; \end{aligned}$$

on a donc, en intégrant entre 0 et X :

$$-\int_0^X \frac{d}{dx}[\mathcal{H}_u e^{2\gamma x}](x)dx \geq (1-\gamma)\int_0^X \left(\int_{-1}^{1} e^{2\gamma x}(u(x,\mu) - \langle u\rangle(x))d\mu\right)dx\,,$$

d'où, en utilisant le fait que $\mathcal{H}_u$ est positive, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^X \left(\int_{-1}^{1} e^{2\gamma x}(u(x,\mu) - \langle u\rangle(x))d\mu\right)dx &\leq \frac{1}{1-\gamma}\mathcal{H}_u(0) \\ &\leq \frac{1}{2(1-\gamma)}\int_0^1 \mu(h(\mu))^2 d\mu \end{aligned}$$

d'après le **IV.2.e** ; on conclut en utilisant le fait que cette majoration est satisfaite quelque soit X, d'où

$$\int_0^{+\infty}\int_{-1}^{1} |u(x,\mu) - \langle u\rangle(x)|^2 e^{2\gamma x} dx d\mu \leq \frac{1}{2(1-\gamma)}\int_0^1 \mu h(\mu)^2 d\mu\,;$$

la constante $C_2 = 1/2$ convient donc.

2a. [4] (coeff.3)
On a par définition de l

$$\begin{aligned}0 = 3\langle\mu^2 u\rangle - l &= 3\Big\langle\mu^2(u - \langle u\rangle)\Big\rangle - 3\Big\langle\mu^2\langle u\rangle\Big\rangle \\ &= 3\Big\langle\mu^2(u - \langle u\rangle)\Big\rangle + \langle u\rangle - l\,,\end{aligned}$$

d'où

$$|\langle u\rangle - l| = 3\Big|\Big\langle\mu^2(u - \langle u\rangle)\Big\rangle\Big|\,;$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc, pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}|\langle u\rangle(x) - l|^2 &\leq \frac{9}{4}\bigg(\int_{-1}^{1}|u(x,\mu) - \langle u\rangle(x)|^2 d\mu\bigg)\bigg(\int_{-1}^{1}\mu^4 d\mu\bigg) \\ &\leq \frac{9}{20}\int_{-1}^{1}(u(x,\mu) - \langle u\rangle(x))^2 d\mu\,;\end{aligned}$$

on peut donc prendre $C_3 = 9/20$.

2b. [4] (coeff.1)
On majore en utilisant l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ avec $a = u(x,\mu) - \langle u\rangle(x)$ et $b = \langle u\rangle(x) - l$; la première partie de la somme est majorée compte-tenu du **V.1** par

$$2\frac{C_2}{(1-\gamma)}\int_0^1 \mu h(\mu)^2 d\mu\,;$$

la seconde partie se majore en deux temps par

$$4\frac{C_3 C_2}{(1-\gamma)}\int_0^1 \mu h(\mu)^2 d\mu\,,$$

en utilisant tout d'abord la majoration du **V.2a**, puis celle du **V.1** ; on peut donc prendre $C_4 = 2C_2(1 + 2C_3)$.

3. [4] (coeff.6)
On écrit

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-1}^{1}\mu|w(x,-\mu)|\;[u(x,\mu) - l]d\mu\right|^2 \\ &\qquad\leq \bigg(\int_{-1}^{1}|w(x,-\mu)|^2 d\mu\bigg)\bigg(\int_{-1}^{1}(u(x,\mu) - l)^2 d\mu\bigg)\end{aligned}$$

grâce à Cauchy-Schwarz ; comme $w-x$ appartient à $\mathcal{E}$, il existe une constante T telle que

$$\int_{-1}^{1} |w(x,-\mu)|^2 d\mu \leq T(x+1)^2\,;$$

si $\gamma \in]0,1[$ est fixé, la conclusion du **V. 2b** montre que la fonction

$$\Theta :\ x \mapsto \int_{-1}^{1} (u(x,\mu)-l)^2 d\mu$$

est dans $L^1(\mathbb{R}_+, e^{2\gamma t}dt)$; il existe donc une suite $(x_n)_n$ de points de $\mathbb{R}_+$ tendant vers $+\infty$ et telle que $\Theta(x_n) = \mathbf{o}(e^{-2\gamma x_n})$; pour cette suite $(x_n)_n$, on a donc

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{-1}^{1} \mu w(x_n,\mu)(u(x_n,\mu)-l) d\mu \right) = 0\,;$$

on peut montrer aussi que la fonction

$$\Upsilon :\ x \mapsto \int_{-1}^{1} \mu w(x,-\mu) u(x,\mu) d\mu$$

est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$ (égale donc à sa valeur en 0) ; comme l'on sait d'autre part que

$$\forall x \geq 0\,, \quad \int_{-1}^{1} \mu w(x,\mu) d\mu = -2/3$$

d'après le **IV.6b**, on déduira alors de l'existence de la suite $(x_n)_n$ vérifant (12) que

$$\frac{2}{3} l = \int_{-1}^{1} \mu w(0,-\mu) d\mu\,,$$

d'où

$$l = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} \mu W(\mu) d\mu\,;$$

pour montrer enfin que Υ est constante, on montre que l'on peut appliquer le théorème de dérivation de Lebesgue après avoir écrit

$$\Upsilon(x) = \int_{[-1,1]^*} \mu w(x,-\mu) u(x,\mu) d\mu$$

où $[-1,1]^*$ est tel que, pour tout μ dans cet ensemble, $u(\dot{x})$ et $w(\cdot,\mu)-(\cdot)$ sont bornées respectivement par $\|h\|_\infty$ et $\|w(\cdot,\cdot)-(\cdot)|_{L^\infty(B)}$; le théorème de dérivation de Lebesgue s'applique alors (localement sur $\mathbb{R}_+$) et un calcul immédiat montre (exploitant les relations (2a) pour w, (MSa) pour u) montre que

$$\int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial x}\Big[\mu w(x,-\mu)u(x,\mu)\Big]d\mu \equiv 0\,;$$

le résultat concernant le calcul de l est alors complètement justifié.