

Analyse 1 - MISMI, UE M1MI2011

Alain Yger

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ BORDEAUX 1, TALENCE 33405,
FRANCE

E-mail address: `Alain.Yger@math.u-bordeaux1.fr`

Version du 24 mars 2014.

RÉSUMÉ. Ce cours correspond à l'enseignement qui sera dispensé en 2013-2014 dans l'UE N1MI2011 « Analyse 1 » de la Licence de Mathématiques. Il s'appuie sur le programme de l'UE d'initiation à l'Analyse dispensée au Semestre 1. On pourra trouver dans [Ymis] un polycopié complet de l'ancienne UE « Mathématiques de base », telle qu'elle était dispensée en MISMI (2007-2008). Ce cours en reprend certains points. La rédaction de ces notes doit énormément aux notes manuscrites rédigées par Philippe Charpentier, avec qui j'ai enseigné cette UE en 2011-2012. Les ouvrages collectifs [MatL1] (chapitre IV) et [MatToutUn], partie IV (tous deux disponibles en plusieurs exemplaires à la BU, et que je vous invite vivement à consulter) m'ont aussi beaucoup inspiré pour la rédaction de ce polycopié ; il faut signaler qu'ils contiennent une foule de tests ou d'exercices corrigés. Destiné à des étudiants envisageant de poursuivre soit dans un cursus Mathématiques (fondamentales ou appliquées, la distinction est devenue aujourd'hui bien difficile à faire), soit dans un cursus Informatique ou Mathématique-Informatique, ce cours est accompagné ou illustré par une démarche algorithmique, avec des ponts, lorsqu'ils sont possibles, vers les applications, visant à placer, autant que faire se peut, les Mathématiques « en situation ». Les textes des exercices proposés par les chargés de TD en 2011-2012 et 2012-2013 (Jean-François Aujol, Marc Arnaudon, Yuri Bilu, Michel Bonnefont, Patrick Fischer, Jean Gillibert, Karim Kellay, Stanislas Kupin, Pierre Mounoud, Fouad Zarouf), ont été regroupés en Annexe A, ainsi que les corrigés des deux devoirs surveillés 2011-2012 (en annexes respectivement B et C) et 2012-2013 (en annexes respectivement D et E). Le texte de DST 2012-2013 figure en Annexe F. En toute fin de ce polycopié, après l'index, vous trouverez aussi (aux titres d'annales) le texte et le corrigé (merci à Philippe Charpentier) de l'examen final (2011-2012). L'utilisation de sites (souvent interactifs) de ressources multimédia en ligne, en particulier le serveur WIMS (sous ce lien : <https://wims.u-bordeaux1.fr/wims/>) ou la plate-forme Moodle (sous laquelle vous pouvez vous logger depuis votre ENT sur le site de Bordeaux 1 (cliquez ensuite sur l'onglet **Espace Formation** sur le bandeau), pourra s'avérer également d'une grande utilité pour la « pratique » active des exercices. Signalons enfin que divers fichiers .mw (à ouvrir sous l'environnement du logiciel de calcul symbolique MAPLE disponible au CREMI ou à l'espace ALPHA) sont en ligne sur <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/MAPLE-analyse1> ; il permettent ainsi, au fil des séances de « revisiter » le cours de manière à la fois illustrée et interactive ; une aide à la prise en main du logiciel MAPLE est disponible sur ce même lien.

Table des matières

Chapitre 1. Suites de nombres réels ou complexes	1
1.1. Des fractions aux nombres réels	1
1.2. Suites de nombres réels	4
1.3. Opérations sur \mathbb{R} et limites de suites de réels	8
1.4. Propriété des « segments emboîtés », critère des suites adjacentes	11
1.5. Valeurs d'adhérence, notions de \limsup et \liminf	13
1.6. Comportement des suites de nombres réels non bornées	17
1.7. Des suites de nombres réels aux suites de nombres complexes	19
1.8. Suites et critère de Cauchy	21
Chapitre 2. Fonctions continues et fonctions dérivables	25
2.1. Préliminaires : adhérence et notion de limite	25
2.2. Continuité d'une fonction en un point	27
2.3. Continuité d'une fonction sur intervalle de \mathbb{R}	28
2.4. Dérivabilité	39
2.5. Dérivations d'ordre supérieur et formules de Taylor	60
2.6. Développements limités (DL) des fonctions en un point	69
2.7. Applications géométriques des développements limités	78
Chapitre 3. Intégration au sens de Riemann	89
3.1. Fonctions en escalier sur un segment	89
3.2. Intégration des fonctions réelles bornées définies sur un segment	92
3.3. Une classe de fonctions réelles intégrables sur un segment	95
3.4. Calcul approché de l'intégrale des fonctions réelles continues	97
3.5. Une seconde caractérisation des fonctions réglées réelles	99
3.6. La classe des fonctions Riemann-intégrables	101
3.7. Critères d'intégrabilité par comparaison	106
3.8. Intégration Riemann et sommes de Darboux	110
3.9. Intégration-Riemann et formules de la moyenne	116
3.10. Annexe : une preuve du critère d'intégrabilité (Théorème 3.1)	123
Annexe A. Une liste d'exercices de TD (2011-2012, 2012-2013)	127
Annexe B. Annales 2011-2012, texte et corrigé du DS 1, 1h30	149
Annexe C. Annales 2011-2012, texte et corrigé du DS 2, 1h30	157
Annexe D. Annales 2012-2013, texte et corrigé du DS 1, 1h30	163
Annexe E. Annales 2012-2013, texte et corrigé du DS 2, 1h30	167

Annexe F. Annales 2012-2013, texte et corrigé du DS Terminal, 3h00	173
Bibliographie	181
Index	183

Suites de nombres réels ou complexes

1.1. Des fractions aux nombres réels

Toute fraction positive $a/b \in \mathbb{Q}^+$, avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, admet un *développement décimal illimité (DDI)* : la *partie entière* de ce développement est un entier naturel $E(a/b) = q$ (le quotient de a par b dans la division euclidienne $a = bq + r$, que l'on note aussi parfois $q = [a/b]$), dite *partie entière* de la fraction positive a/b ; les *décimales* successives sont des chiffres entre 0 et 9, générés de proche en proche suivant l'algorithme de division euclidienne. La suite des décimales est ainsi une application de \mathbb{N}^* dans $\{0, \dots, 9\}$, on dit aussi une *suite* d'éléments de $\{0, \dots, 9\}$ indexée par \mathbb{N}^* . On écrit

$$d_1 = d(1), d_2 = d(2), d_3 = d(3), \text{ etc.},$$

et la suite $k \in \mathbb{N}^* \mapsto d(k)$ de décimales successives se note ainsi $(d_k)_{k \geq 1}$. L'expression

$$q + 0, d_1 d_2 d_3 [\dots]$$

est dite *développement décimal illimité (DDI)* de la fraction positive a/b (la virgule est remplacée par un point dans la terminologie anglo-saxonne). Par exemple

$$(1.1) \quad \frac{22}{7} = 3, 142857142857142857142857 [\dots]$$

(posez la division comme vous l'auriez fait au collège).

Une première observation s'impose ici. L'une des particularités de l'opération de division euclidienne itérée $[a_k : b]$ ($a_0 = a$, $a_1 = a - bq$, ...) conduisant au calcul des décimales de proche en proche (on le constate sur l'exemple (1.1)) est que le nombre de « restes » possibles à chaque étape est fini (car le reste dans la division euclidienne de $a_k \in \mathbb{N}$ par $b \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel entre 0 et $b - 1$). Or il est un principe clef en mathématiques, lié à la notion d'injectivité : si l'on dispose de K boîtes vides et d'un nombre d'allumettes (à ranger dans les boîtes) strictement supérieur à K , on mettra forcément deux allumettes dans la même boîte ! Suivant ce principe, dans le processus de division conduisant à l'écriture décimale d'une fraction a/b , on est donc certain qu'au bout d'un certain temps, le même reste va apparaître deux fois de suite, au quel cas la suite des décimales reproduira toujours le même motif, et l'on pourra écrire le DDI de a/b sous la forme

$$(1.2) \quad q, d_1 d_2 [\dots] d_k \text{ motif motif motif } [\dots] = q, d_1 d_2 [\dots] d_k \underline{\text{motif}},$$

où motif est un « mot » composé d'une suite de chiffres entre 0 et 9 et répété ensuite indéfiniment, ce que l'on exprime ici par la notation motif.

Une seconde observation s'impose également. On remarque que, suivant pareil procédé, il est impossible d'obtenir une suite de décimales $(d_k)_{k \geq 1}$ se présentant

sous la forme

$$d_1, d_2, d_3, \dots, d_k, 9, 9, 9, 9, \dots \text{ avec } d_k \in \{0, \dots, 8\}.$$

Si tel était le cas, le nombre a/b s'écrirait, en remontant les calculs :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= q + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \dots + \frac{d_k}{10^k} + \frac{9}{10^{k+1}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots\right) \\ &= q + \frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_k}{10^k} + \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \times \frac{9}{10^{k+1}} \\ &= q + \frac{d_1}{10} + \dots + \frac{(d_k + 1)}{10^k}, \end{aligned}$$

et toutes les décimales à partir de la k -ième devraient ainsi être nulles.

Toute fraction $a/b \in \mathbb{Q}$ (on prend cette fois $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$) se trouve « encodée » (une fraction correspondant à un « encodage » et un seul) par la donnée de deux choses :

- un nombre entier $q \in \mathbb{Z}$, plus grand entier inférieur ou égal à q , que l'on appelle *partie entière* de a/b ;
- une suite de décimales $k \in \mathbb{N}^* \mapsto d_k \in \{0, \dots, 9\}$ finissant par répéter indéfiniment un mot fini **motif** (différent du mot constitué du seul chiffre 9).

La fraction « encodée » par q et la suite $(d_k)_{k \geq 0}$ est la fraction

$$q + 0, d_1 d_2 d_3 [\dots] d_k \underline{\text{motif}}.$$

On peut la recalculer à partir de la connaissance de d_1, \dots, d_k et du mot **motif**.

EXEMPLE 1.1 (un exemple en guise d'exercice). On traitera un exemple pour se convaincre. Partons du DDI :

$$12 + 0, 431 \underline{572}.$$

Si ce DDI correspond à un nombre x , celui de $1000x - 12431$ est

$$0 + 0, \underline{572};$$

celui de $1000(1000x - 12431)$ est donc

$$572 + 0, \underline{572}.$$

Les deux nombres $1000(1000x - 12431) - 572$ et $1000x - 12431$ devraient avoir le même DDI. En écrivant qu'ils sont égaux, on trouve

$$1000(1000x - 12431) - 572 = 1000x - 12431,$$

d'où l'on déduit bien que x est une fraction. Reste juste à vérifier, en reprenant les calculs à l'envers, que le DDI de x est bien $12 + 0, 431 \underline{572}$, comme on le voulait.

Les fractions a/b que l'on encode ainsi de manière à ce que la suite des décimales stationne à 0 ($d_k = 0$ pour k assez grand) sont les *nombre décimaux*.

Pour définir les nombre réels, il suffit juste de s'affranchir de la règle de *répétition d'un motif* qui préside à la construction des DDI des fractions.

- DÉFINITION 1.1. Un nombre *réel* (donné sous forme décimale) est la donnée :
- d'un nombre entier relatif $E = E(x) = \mathbf{floor}(x)$, que l'on appelle *partie entière* de x ; on note $\mathbf{ceil}(x)$ le nombre $E(x) + 1$.

- d'une suite $(d_k)_{k \geq 1}$ de chiffres entre 0 et 9, sans aucune restriction cette fois sur le comportement de la suite, hormis le fait de ne pas stationner indéfiniment à 9.

On note le nombre réel encodé par l'entier E et la suite $(d_k)_{k \geq 1}$ comme :

$$(1.3) \quad x = E + 0, d_1 d_2 d_3 [\dots]$$

On dit que l'écriture (1.3) ci-dessus correspond au *développement décimal illimité* (DDI) du nombre réel x .

L'ensemble \mathbb{R} des nombres réels contient l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels (une fois que l'on a identifié un nombre rationnel avec son développement décimal illimité), puisque l'on n'impose plus cette fois aucune restriction à la suite des décimales d_k (hormis le fait de ne pas stationner à 9). Le nombre

$$(1.4) \quad \pi = 3 + 0, 141592653589793238462643383279502884197169399375 [\dots]$$

(aucun mot ne paraît ici à première vue répété) est par exemple un nombre réel. Difficile cependant de voir si ce développement décimal illimité correspond ou non à celui d'un nombre rationnel car le mot (éventuel) amené à se répéter dans un DDI du type (1.2) pourrait être long et par conséquent difficile à trouver.

DÉFINITION 1.2 (ordre sur \mathbb{R}). On définit un *ordre* sur l'ensemble \mathbb{R} en décidant que le nombre réel x « encodé » par E et $(d_k)_{k \geq 1}$ est « avant » (ou encore « précède ») le nombre réel x' « encodé » par E' et $(d'_k)_{k \geq 1}$ (auquel cas on écrit $x \leq x'$) si et seulement si

- d'une part $E \leq E'$ (suivant l'ordre sur les entiers relatifs) ;
- d'autre part, la suite de chiffres $(d_k)_{k \geq 1}$ précède la suite $(d'_k)_{k \geq 1}$ lorsque l'on choisit comme ordre l'ordre lexicographique (ou « du dictionnaire »), les chiffres 0, 1, ..., 9 étant rangés dans cet ordre (comme le seraient les dix lettres A, B, C, D, E, F, G, H, I, J).

Si $x \leq y$ et $x \neq y$, on écrit $x < y$ et on dit que x est « strictement inférieur à y ».

DÉFINITION 1.3 (sous-ensembles majorés, sous-ensembles minorés de \mathbb{R}). Un sous-ensemble A de \mathbb{R} est dit *majoré* s'il existe un nombre réel M tel que

$$\forall x \in A, x \leq M.$$

On dit alors que M est un *majorant* de A . Un sous-ensemble A de \mathbb{R} est dit *minoré* s'il existe un nombre réel m tel que

$$\forall x \in A, m \leq x.$$

On dit alors que m est un *minorant* de A .

Une des propriétés fondamentales de l'ensemble \mathbb{R} ainsi construit est la suivante :

PROPOSITION 1.1 (propriété de la borne supérieure). *Si A est une partie de \mathbb{R} non vide et majorée, l'ensemble (non vide) de tous les majorants de A , c'est-à-dire l'ensemble*

$$\text{Majorant}(A) := \{M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in A, x \leq M\}$$

contient un unique nombre réel (noté $\sup(A)$ et appelé borne supérieure de A) tel que

$$\forall y \in \text{Majorant}(A), \sup(A) \leq y.$$

Le nombre réel $\sup(A)$ est ainsi le plus petit des majorants de l'ensemble A lorsque A est non vide et majoré). Lorsque $\sup A$ appartient à A , on dit que $\sup A$ est le maximum de A et on note $\sup A = \max A$.

De même, si A est une partie de \mathbb{R} non vide et minorée, l'ensemble (non vide) de tous les minorants de A , c'est-à-dire l'ensemble

$$\text{minorant}(A) := \{m \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in A, m \leq x\}$$

contient un unique nombre réel (noté $\inf(A)$ et appelé borne inférieure de A) tel que

$$\forall y \in \text{minorant}(A), y \leq \inf(A).$$

Le nombre réel $\inf(A)$ est ainsi le plus grand des minorants de l'ensemble A (lorsque A est non vide et minoré). Lorsque $\inf A$ appartient à A , on dit que $\inf A$ est le minimum de A et on note $\inf A = \min A$.

DÉMONSTRATION. Considérons tous les DDI des éléments de A . L'ensemble de toutes les parties entières de tous ces DDI est un sous-ensemble de \mathbb{Z} majoré par la partie entière du DDI de n'importe quel élément de $\text{Majorant}(A)$; il admet donc un plus grand élément E . Notons maintenant A_1 l'ensemble des premières décimales des nombres réels appartenant à A et dont la partie entière est E (il en existe); comme sous-ensemble de $\{0, \dots, 9\}$, cet ensemble admet un plus grand élément d_1 . On note A_2 l'ensemble des secondes décimales des nombres réels appartenant à A et dont le DDI commence par $E + 0, d_1[\dots]$ (il en existe); comme sous-ensemble de $\{0, \dots, 9\}$, cet ensemble a un plus grand élément d_2 . On continue ainsi de suite pour construire une suite $(d_k)_{k \geq 1}$ de proche en proche. Le nombre dont le DDI¹ est donné par

$$E + 0, d_1 d_2 d_3 [\dots]$$

est un majorant de A , plus petit par construction même que tout autre majorant de A . Il convient comme candidat à être la borne supérieure de A , $\sup(A)$. On raisonne de la même manière pour prouver l'existence d'un plus grand minorant lorsque A est minoré. \square

REMARQUE 1.1 (Attention! les bornes supérieure ou inférieure d'un sous-ensemble A de \mathbb{R} , si elles existent, ne sont pas toujours dans l'ensemble A). Il convient de prendre garde au fait que la construction donnée dans la Proposition 1.1 ci-dessus ne fournit pas en règle générale un point de l'ensemble A . Au fur et à mesure des étapes (travail avec sous-ensembles de A successifs, A_1, A_2 , etc.), l'appartenance à A est certes bien préservée, mais le réel $\sup(A)$ ou $\inf(A)$ final, du fait qu'il implique toutes les décimales construites, n'est pas nécessairement un élément de A . On en verra des exemples plus loin.

1.2. Suites de nombres réels

DÉFINITION 1.4 (suite de nombres réels). Une suite de nombres réels est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} , qui à $n \in \mathbb{N}$, associe un nombre réel $u(n)$ (que l'on note aussi u_n). La suite est alors notée $(u_n)_{n \geq 0}$. Il peut arriver cependant que

1. Il se peut que la suite des décimales $(d_k)_{k \geq 1}$ ainsi obtenue stationne à 9, auquel cas le nombre réel obtenu comme borne supérieure de A est le nombre décimal de développement décimal déduit de celui obtenu en incrémentant de 1 la dernière décimale non nulle précédent la suite de 9 et en mettant à 0 les décimales suivantes.

l'application $n \mapsto u(n) = u_n$ ne soit définie que pour n assez grand ($n \geq n_0$). On note alors la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

EXEMPLE 1.2. On peut parler de $(1/(n+1))_{n \geq 0}$, mais seulement de la suite $(1/(n(n-2)))_{n \geq 3}$.

Les suites de nombres réels peuvent être définies de plusieurs manières.

- Exhaustivement par une formule du type $u_n = f(n)$, f désignant une fonction explicitement définie sur $\{n_0, n_0 + 1, \dots\}$, avec n_0 entier assez grand ; ou bien alors par le fait que u_n satisfasse une propriété $\mathcal{P}(n)$ qui le caractérise complètement (par exemple : u_n est le n -ième nombre premier).
- Par une relation de récurrence à un pas :

$$u_{n+1} = F(u_n) \quad \forall n \geq n_0,$$

F étant une fonction réelle explicitement définie au point u_n , ce pour chaque valeur de $n \geq n_0$, le calcul étant initié à partir d'une donnée initiale $u_{n_0} = \mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}$) ; la procédure algorithmique²

```
X=x;
for j=1, . . . , n
X= F(X, j);
end
```

fournit par exemple (avec X) le calcul de u_{n_0+n} pour $n \geq 0$, tandis que la procédure³

```
X=[x];
for j=1, . . . , n
X=[op(X), F(X[nops(X)], nops(X))];
end
```

(où $nops(X)$ désigne, étant donnée une liste ordonnée $X=[\dots]$, son nombre de termes, et $op(X)$ son contenu) fournit la liste $[u_{n_0}, \dots, u_{n_0+n}]$ des $n+1$ premiers termes de la suite.

- Par une relation de récurrence à p pas :

$$u_{n+p} = F(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1}), \quad n \geq n_0,$$

où la fonction F est une fonction réelle explicitement définie au point

$$(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1}),$$

ce pour chaque valeur de $n \geq n_0$ (il peut aussi y avoir une dépendance en n) le calcul étant initié à partir de p données initiales $u_{n_0} = x_0, \dots, u_{n_0+p-1} = x_{p-1}$, où x_0, \dots, x_{p-1} sont p nombres réels. Le calcul algorithmique des n premiers termes de la suite est alors plus complexe, car il faut disposer d'une

2. La syntaxe dans laquelle sont ici écrites toutes les procédures algorithmiques mentionnées dans ce cours est celle du logiciel de calcul scientifique **MATLAB** ou de son « clone » libre **Scilab** [**Scilab**]. Dans cette procédure, on a d'ailleurs intégré (ce qui sera utile) le fait que $F(u_n)$ dépende non seulement de u_n , mais aussi de n .

3. Même remarque que pour la procédure précédente ; on a intégré ici le fait que $F(u_n)$ dépende aussi de n .

« mémoire » (il faut à chaque cran avoir stocké en mémoire $p - 1$ valeurs).
Par exemple, si $p = 2$, la procédure

```
X=x;
Y=y;
for j=2,...,n
z = F(X,Y,j);
X = Y;
%avec cette instruction Y est conservée en mémoire pour la suite
Y = z;
end
```

permet (avec X, Y) de calculer u_{n_0+n} et u_{n_0+n+1} (pour $n \geq 0$) lorsque les valeurs initiales sont les réels $u_{n_0} = x$ et $u_{n_1} = y$.

EXEMPLE 1.3.

- Les suites $(1/n(n-3))_{n \geq 2}$ ou $(\ln(p_n)/n)_{n \geq 1}$, où p_n désigne le n -ième nombre premier, sont du premier type (définition exhaustive);
- les suites *algébrico-géométriques* (vues en MISMI, vous les reverrez en TD), générées par une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$, où a et b sont des réels donnés, et initiées à $u_{n_0} = x$ sont du second type (récurrence à un pas);
- la célèbre *suite de Fibonacci*, définie comme la suite d'entiers initiée avec $F_0 = F_1 = 1$ et générée ensuite par la relation inductive $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ est du troisième type (récurrence à p pas, donc avec mémoire, ici avec $p = 2$).

DÉFINITION 1.5 (suite convergente vers une limite finie, première approche).

On dit que la suite de nombres réels $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers un nombre réel l si et seulement si :

- la suite des parties réelles $E(u_n)$, $n \geq 0$, des nombres réels u_k stationne, pour k assez grand, à la partie entière $E(l)$ de l ;
- pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(d_k(u_n))_{n \geq 0}$ des k -ièmes décimales des nombres réels u_n , $n \geq 0$, stationne, pour k assez grand, à la k -ième décimale $d_k(l)$ du nombre réel l .

On écrit alors

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

DÉFINITION 1.6 (suites de nombres réels monotones au delà d'un certain rang).

Une suite de nombres réels $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite *croissante* (au delà du rang $N \geq n_0$) si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \geq N$. Elle est dite *décroissante* (au delà du rang $N \geq n_0$) si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq N$.

PROPOSITION 1.2 (suites croissantes majorées, suites décroissantes minorées).

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels croissante au delà du cran $N \geq n_0$, telle que $\{u_n; n \geq n_0\}$ soit majoré. La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers le nombre

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup\{u_n; n \geq N\}.$$

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels décroissante au delà du cran $N \geq n_0$, telle que $\{u_n; n \geq n_0\}$ soit minoré. La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers le nombre

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf\{u_n; n \geq N\}.$$

DÉMONSTRATION. La preuve de ce résultat important est, avec pareille présentation « concrète » des réels, tout à fait limpide, tout au moins heuristique. Cette vision soutend l'intuition de la notion de convergence en analyse numérique. Si $(u_n)_{n \geq N}$ est une suite de réels croissante majorée, la suite de leurs parties entières $(E(u_n))_{n \geq N}$ est une suite d'entiers croissante majorée, donc certainement stationnaire sur un entier E au bout d'un certain temps : ceci signifie que les $E(u_n)$ finissent, lorsque n dépasse un certain seuil $S_0 \geq N$, de toujours prendre la même valeur. Une fois que n a franchi ce seuil, la suite des premières décimales $(d_1(u_n))_{n \geq S_0}$ des u_n est une suite croissante majorée de nombres entre 0 et 9. Elle finit encore, au bout d'un certain temps ($n \geq S_1 \geq S_0$), par stationner sur une décimale d_1 ensuite « figée ». Pour $n \geq S_1$, on raisonne de manière identique pour la suite $(d_2(u_n))_{n \geq S_2}$ des secondes décimales des u_n , qui finit à la longue par se figer sur une décimale d_2 , etc. On voit ainsi les décimales des u_n , $n \geq n_0$ se « figer » les unes après les autres, en les approchant par en dessous, vers les décimales d'un certain nombre réel l (car le DDI $E + 0.d_1 d_2 \dots$ correspond à un tel réel l). Notons que l'on peut obtenir le DDI de ce réel « limite » l se terminant par une suite infinie de 9 ; il faut alors prendre en compte l'autre DDI d'un tel nombre l (celui se terminant par une suite infinie de zéros). La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge bien vers ce réel l au sens de la Définition 1.5. La limite est par construction le plus petit des majorants de l'ensemble $\{u_n ; n \geq 0\}$. Un raisonnement identique vaut lorsque $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante minorée, la limite étant bien dans ce cas le plus grand de tous les minorants de $\{u_n ; n \geq n_0\}$. \square

EXEMPLE 1.4 (approximations décimales (par défaut) d'un nombre réel). Si x est un nombre réel admettant le DDI

$$E + 0, d_1 d_2 d_3 [\dots] d_k [\dots],$$

la suite des nombres décimaux

$$x_n = E + \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{10^k}, \quad n \geq 1,$$

est une suite croissante de nombres rationnels convergent vers le nombre réel x . Tout nombre réel est donc limite de nombres rationnels (même en fait décimaux)⁴ Nous verrons que ce fait, essentiel si l'on pense à l'informatique (les seuls nombres possibles à encoder sont les fractions), est en un sens assez surprenant, car il y a très peu de nombres rationnels comparativement, on le verra, aux nombres réels : il est en effet possible, comme l'ont fait le mathématicien Stern et l'horloger de précision Brocot au XIX-ème siècle, de « ranger » les rationnels en une suite $\{x_0, x_1, \dots\}$ (sans répétitions) ; on dit que \mathbb{Q} est dénombrable, ce qui n'est pas, on le verra plus loin, le cas de \mathbb{R} (voir la Proposition 1.7 à venir).

EXEMPLE 1.5 (le paradoxe de Zénon). Le *paradoxe de Zénon d'Élée* illustre depuis l'antiquité le comportement des suites croissantes de nombres réels majorées : supposons qu'un archer positionné à l'origine de \mathbb{R} décoche sa flèche en direction des $x > 0$ et que cette flèche retombe à une distance l_1 . L'archer va ensuite se positionner au point d'impact et relance sa flèche, mais, fatigue oblige, il ne peut la

4. Il est aussi vrai que tout nombre réel est une limite de nombres irrationnels (*i.e.* non éléments de \mathbb{Q}) : il suffit pour cela de remarquer que l'on peut détruire la présence de motifs répétés périodiquement dans le DDI d'une fraction en modifiant, dans chaque « motif » répété, une des décimales de manière à exclure toute possibilité que le DDI ainsi « perturbé » soit encore de la forme (1.2).

lancer (depuis l'endroit où il se trouve) qu'à une distance $l_2 \leq \kappa l_1$, où $\kappa < 1$ désigne un facteur d'« amortissement » appartenant à $]0, 1[$. Il continue de la sorte, et, à chaque tir, $l_{k+1} \leq \kappa l_k$. Bien sûr, il continue ainsi à avancer suivant le demi-axe des $x > 0$, mais la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, où

$$u_n = l_1 + l_2 + \dots + l_n$$

est une suite croissante majorée, puisque

$$u_n \leq l_1 + \kappa l_1 + \kappa^2 l_1 + \dots + \kappa^{n-1} l_1 = l_1 \frac{1 - \kappa^n}{1 - \kappa} < \frac{l_1}{1 - \kappa}.$$

Cette suite converge donc vers une limite finie sur laquelle l'archer butera (et qu'il n'atteindra d'ailleurs jamais puisqu'il persiste à avancer!). Dans cette classe d'exemples, s'inscrivent aussi l'existence de limites très importantes : par exemple, si $x > 0$ et si la suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ est la suite définie inductivement par

$$u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1}(x) = u_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall n \geq 0,$$

alors, nous avons affaire encore à une suite croissante majorée puisque

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq C(x) \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \geq 0,$$

où $C(x)$ désigne une certaine constante positive (faire l'exercice). Cette suite converge vers un nombre que l'on convient d'appeler *exponentielle* de x et noter :

$$\exp(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Le nombre $e = \exp(1)$, constante positive d'importance capitale en mathématique car « base » des exponentielles et indicateur de l'échelle logarithmique⁵ ($\ln e = 1$), est en particulier obtenu comme une telle limite ($x = 1$). Son DDI commence par :

$$2 + 0,718281828459045235360287471352662409 \dots$$

Ce n'est pas un nombre rationnel car ce DDI (dont nous ne voyons là que les premiers termes) ne saurait être celui d'une fraction. Il est toutefois impossible justifier pareille assertion avec les outils dont nous disposons à ce stade.

1.3. Opérations sur \mathbb{R} et limites de suites de réels

On définit sur \mathbb{R} une addition et une multiplication interne telles que $(\mathbb{R}, +, \times)$ hérite d'une structure de corps commutatif.

L'*addition* $(x, y) \mapsto x + y$ est d'abord définie comme opération interne sur l'ensemble des nombres décimaux (il s'agit d'un cas particulier de l'addition des fractions). On introduit ensuite la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ des approximations décimales par défaut de x , puis la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ des approximations décimales par défaut de y . La suite $(x_n + y_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante majorée par $x + y$, donc convergente (d'après la Proposition 1.2) vers un nombre réel que l'on convient de noter $x + y$.

Pour définir la *multiplication* $(x, y) \mapsto xy$, on commence dans un premier temps à définir la multiplication de x par un nombre décimal w donné. La suite $(x_n w)_{n \geq 1}$ est soit une suite croissante majorée, soit une suite décroissante minorée (cela dépend

5. On privilégiera dans ce cours la notation \ln plutôt que \log pour la fonction logarithme népérien.

des signes de $E(x)$ et de $E(w)$), mais en tout cas toujours convergente (d'après la Proposition 1.2) vers une limite notée xw . On raisonne ensuite de manière identique avec la suite $(xy_n)_{n \geq 1}$, où $(y_n)_{n \geq 1}$ désigne la suite des approximations décimales par défaut de y . Étant donné un nombre réel x non nul, on peut sur le même principe définir son inverse : si par exemple x est un nombre réel strictement positif approché par une suite croissante de décimaux strictement positifs $(x_n)_{n \geq 0}$, la suite $(1/x_n)_{n \geq 0}$ (le quotient de deux éléments de \mathbb{Q} est, on le sait, bien défini) est une suite décroissante de nombres rationnels minorée par $E(x) + 1$, donc convergente d'après la Proposition 1.2 vers un nombre réel que l'on notera $1/x$. On constate dans tous ces procédés de construction approchée que le résultat ne dépend jamais des suites de décimaux choisies pour approcher les réels. L'ensemble \mathbb{R} , équipé de ces deux opérations que sont l'addition et la multiplication (avec les règles qui les accompagnent, vues dans le cours de MISMI au premier semestre) est un *corps commutatif* : il y a un élément neutre (0), un élément unité (1), tout élément a un opposé ($-x$) pour l'addition ($x + (-x) = 0$); tout élément non nul a un inverse ($1/x$) pour la multiplication ($x \times (1/x) = 1$); de plus on a $(x+y)+z = x+(y+z)$ et $x+y = y+x$ (*associativité* et *commutativité* de l'addition), $(xy)z = x(yz)$ et $xy = yx$ (*associativité* et *commutativité* de la multiplication) et enfin $x(y+z) = xy + xz$ (*distributivité* de la multiplication par rapport à l'addition).

Ces deux opérations sont compatibles avec l'ordre au sens suivant :

$$\begin{aligned} ((x \leq y) \text{ et } (u \leq v)) &\implies x + u \leq y + v \\ ((x \leq y) \text{ et } (w \geq 0)) &\implies xw \leq yw \\ ((x \leq y) \text{ et } (w \leq 0)) &\implies yw \leq xw. \end{aligned}$$

Ces deux opérations prolongent l'addition et la multiplication des fractions.

L'application

$$x \in \mathbb{R} \mapsto |x| := \sup\{-x, x\}$$

se plie à l'*inégalité triangulaire archimédienne* :

$$(1.5) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

et joue un rôle très important. La quantité $|x - y|$ figurera par la suite une notion de « distance » entre les deux nombres réels x et y .

Une propriété importante de \mathbb{R} est le fait d'être *archimédien*. Cette propriété permettra de traduire d'une autre manière (« quantifiée » cette fois) la notion de convergence d'une suite de nombres réels vers un nombre réel (Définition 1.5).

PROPOSITION 1.3 (\mathbb{R} est archimédien). *Soient $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. Il existe un nombre entier N tel que $Nx > y$.*

DÉMONSTRATION. Soit $b/10^n$ un nombre décimal strictement positif et strictement inférieur à x (une approximation décimale x_n judicieusement choisie). Soit $E(y)$ la partie entière de y . On a, par division euclidienne, $E(y) + 1 = bq + r$, avec $r \in \{0, \dots, b-1\}$. Si l'on pose $N = 10^n(q+1)$, on a $bN/10^n = b(q+1) \geq E(y) + 1 > y$ et donc $Nx \geq bN/10^n > y$. \square

Voici donc la seconde formulation annoncée (plus classique cette fois, et mieux manipulable du point de vue calculatoire car « quantifiée » par le critère (1.6)) de la Définition 1.5.

DÉFINITION 1.7 (suite convergente vers une limite finie, approche quantifiée). Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers le nombre réel l si et seulement si :

$$(1.6) \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N(\epsilon)) \implies (|u_n - l| \leq \epsilon).$$

Une suite de nombres réels $(u_n)_{n \geq 0}$ ne convergeant vers aucun nombre réel l est dite *divergente*.

DÉMONSTRATION. Pour chaque $\epsilon > 0$, il existe (puisque \mathbb{R} est archimédien, cf. la Proposition 1.3) un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $10^{-N} \leq \epsilon$. Si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers l , alors pour n assez grand (dépendant de N , donc de ϵ), u_n et l ont les mêmes décimales jusqu'à l'ordre N . La valeur absolue $|u_n - l|$ est donc majorée par 10^{-N} , donc par ϵ . On vient donc de vérifier que si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers l , la clause (1.6) est remplie. Réciproquement, si $|u_n - l| \leq 10^{-N-1}$, u_n et l ont les mêmes décimales au moins jusqu'à l'ordre N ; si la clause (1.6) est remplie, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge donc vers l . \square

Le critère (1.6) de la Définition (quantifiée) 1.7 fournit des règles opérationnelles pratiques (plus facilement que la définition intuitive et plus « informatique » 1.5) concernant le comportement de l'opération de « prise de limite » vis-à-vis des opérations usuelles. Voici un condensé de ces règles ou recettes (vues en Semestre 1) :

PROPOSITION 1.4 (convergence des suites de réels vers un réel et opérations usuelles : recettes pratiques). Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites de nombres réels respectivement convergentes vers les nombres réels l et l' . La suite $(|u_n|)_{n \geq 0}$ converge vers $|l|$, la suite $(u_n + v_n)_{n \geq 0}$ converge vers $l + l'$, et la suite $(u_n v_n)_{n \geq 0}$ converge vers ll' . De plus, si $l \neq 0$, alors $u_n \neq 0$ pour $n \geq n_0$ (assez grand) et la suite $(1/u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers $1/l$.

DÉMONSTRATION. Pour le premier point, on utilise l'inégalité (1.5) qui donne $||u_n| - l| \leq |u_n - l|$, puis le critère de convergence (1.6). Pour ce qui est de la somme, on remarque que

$$|u_n + v_n - l - l'| \leq |u_n - l| + |v_n - l'|$$

(toujours grâce à (1.5)). Si $\epsilon > 0$, il existe $N(\epsilon)$ tel que

$$n \geq N(\epsilon) \implies \left(|u_n - l| \leq \epsilon/2 \text{ et } |v_n - l'| \leq \epsilon/2 \right).$$

En additionnant, on trouve que pour $n \geq N(\epsilon)$, $|u_n + v_n - l - l'| \leq 2\epsilon/2 = \epsilon$. Pour ce qui est du produit, on remarque que si les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ convergent vers des limites réelles respectives l et l' , il existe M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M$ et, par passage à la limite, $|l| \leq M$, $|l'| \leq M$. On a aussi, toujours grâce à (1.5),

$$(1.7) \quad |u_n v_n - ll'| \leq |u_n v_n - u_n l'| + |u_n l' - ll'| \leq M(|v_n - l'| + |u_n - l|).$$

Or, si $\epsilon > 0$, il existe $N(\epsilon)$ tel que

$$n \geq N(\epsilon) \implies \left(|x_n - x| \leq \epsilon/2M \text{ et } |y_n - y| \leq \epsilon/2M \right).$$

En reportant dans (1.7), on trouve bien que pour $n \geq N(\epsilon)$, $|u_n v_n - ll'| \leq \epsilon$, ce que l'on voulait pour assurer la convergence de $(u_n v_n)_n$ vers ll' d'après le critère (1.6).

Pour ce qui est de l'inverse enfin, on remarque que pour n assez grand $|u_n| \geq |l|/2$ car $(|u_n|)_{n \geq 0}$ converge vers $|l|$. Ensuite, on remarque que

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|u_n - l|}{|u_n||l|} \leq \frac{2}{|l|^2} |u_n - l|,$$

quantité que l'on peut rendre inférieure ou égale à ϵ dès que $|u_n - l| \leq \epsilon|l|^2/2$. \square

1.4. Propriété des « segments emboîtés », critère des suites adjacentes

Outre la propriété de la borne supérieure (Proposition 1.1), \mathbb{R} vérifie une seconde propriété très importante, cette fois de nature ensembliste.

Avant de l'énoncer, il nous faut définir ce qu'est un *segment* (ou encore *pavé fermé*, ou bien *intervalle fermé borné*) de \mathbb{R} . Un segment de \mathbb{R} est un sous-ensemble de \mathbb{R} de la forme

$$[a, b] := \{t \in \mathbb{R}; a \leq t \leq b\},$$

où $a < b$ sont deux nombres réels. La *longueur* (ou encore le *diamètre*) de ce segment est par définition le nombre $l = b - a \geq 0$.

PROPOSITION 1.5 (propriété des segments emboîtés). *Soient $([a_n, b_n])_{n \geq 0}$ une suite de segments de \mathbb{R} , tous emboîtés les uns dans les autres (i.e. $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout $n \geq 0$). L'ensemble*

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n]$$

est non vide et l'on a

$$(1.8) \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \left[\sup\{a_n; n \geq 0\}, \inf\{b_n; n \geq 0\} \right].$$

Si de plus la suite des diamètres $(b_n - a_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0, on a

$$(1.9) \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \{l\},$$

où

$$l = \sup\{a_n; n \geq 0\} = \inf\{b_n; n \geq 0\}.$$

DÉMONSTRATION. La suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante majorée puisque $a_n \leq b_0$ et que $a_n \leq a_{n+1}$ pour tout n (puisque les segments sont emboîtés). La Proposition 1.2 assure donc que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ converge vers le nombre $\alpha := \sup\{a_n; n \geq 0\}$. De même, la suite $(b_n)_{n \geq 0}$ est décroissante minorée (car $b_n \geq a_0$ et $b_n \geq b_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$, toujours parce que les segments sont emboîtés) et converge donc (Proposition 1.2) vers $\beta := \inf\{b_n; n \geq 0\}$. Comme $a_n \leq b_n$ pour tout n , on a $\alpha \leq \beta$ en prenant les limites lorsque n tend vers $+\infty$. Le segment $[\alpha, \beta]$ est inclus dans tous les segments $[a_n, b_n]$ pour tout entier $n \geq 0$, donc dans l'intersection de tous ces segments. Si la suite $(b_n - a_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0, on a $\alpha = \beta$ du fait des règles de calcul des limites énoncées dans la Proposition 1.4. \square

REMARQUE 1.2 (le « lemme des gendarmes »). On attribue aussi à cette Proposition 1.5 le qualificatif imagé de *lemme des gendarmes* (la route est barrée à gauche par les a_n pour $n \geq 0$, à droite par les b_n pour $n \geq 0$).

La Proposition 1.5 peut aussi se formuler non plus sous l'angle ensembliste, mais sous l'angle des suites. Pour cela, on introduit le concept de *suites adjacentes* :

DÉFINITION 1.8 (suites adjacentes). Deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels sont dites *adjacentes* si et seulement si

$$(1.10) \quad \begin{aligned} & \exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N) \implies (u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n) \\ & \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0. \end{aligned}$$

PROPOSITION 1.6 (critère de convergence des suites adjacentes). Si $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont deux suites de nombres réels adjacentes, elles sont toutes les deux convergentes vers la même limite l . De plus, si les DDI de u_n et v_n (pour $n \geq N$ donné par (1.10)) coïncident jusqu'à l'ordre $M \in \mathbb{N}^*$, ce DDI tronqué à l'ordre M est aussi le DDI tronqué à l'ordre M de la limite commune l .

DÉMONSTRATION. On raisonne comme dans la preuve de la Proposition 1.5, en prenant $a_n = u_n$ et $b_n = v_n$ pour tout n assez grand ($n \geq N$ donné par (1.10)). La seconde assertion tient au fait que $u_n \leq l \leq v_n$ pour tout $n \geq N$. Si u_n et v_n ont donc même partie entière et mêmes décimales jusqu'à l'ordre M , cette partie entière et ces M premières décimales sont aussi celles de l (qui est coincé entre ces deux nombres). \square

EXEMPLE 1.6 (le principe des « ressorts »). Voici un modèle mathématique singeant celui des ressorts et de l'oscillation en mécanique. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels définie par une condition initiale u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} - u_n = (-1)^n a_n \quad \forall n \geq 0,$$

où $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombres strictement positifs tendant en décroissant vers 0 (on a ici un modèle de système oscillant aux oscillations amorties, le signe figurant les oscillations, la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ la « vitesse d'amortissement »). Les deux suites $(u_{2n})_{n \geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ sont alors adjacentes et le critère de la Proposition 1.6 s'applique. En effet :

$$\begin{aligned} u_{2(n+1)} - u_{2n} &= (u_{2n+2} - u_{2n+1}) + (u_{2n+1} - u_{2n}) = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0, \\ u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} &= (u_{2n+3} - u_{2n+2}) + (u_{2n+2} - u_{2n+1}) = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0, \\ u_{2n+1} &\geq u_{2n} \quad \forall n \geq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{2n+1} - u_{2n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = 0. \end{aligned}$$

Un exemple célèbre d'application de cette situation concerne l'exemple de la suite définie ainsi avec $u_0 = 4(4/5 - 1/239)$ et

$$a_n := 4 \left(\frac{4(1/5)^{2n+1} - (1/239)^{2n+1}}{2n+1} \right) \quad \forall n \geq 0$$

(cette suite de nombres positifs est décroissante au delà d'un certain cran). La formule de John Machin⁶ assure que le nombre π (autre nombre réel « phare »,

6. Pour le lecteur curieux, signalons que cette formule, due au mathématicien britannique John Machin (1680-1751), s'énonce sous la forme $\pi/4 = \arctan(1) = 4 \operatorname{artan}(1/5) - \operatorname{artan}(1/239)$, égalité entre arguments résultant de la simple formule algébrique $(5+i)^4 = 2(1+i)(239+i)$ (qui, elle, est aisée à vérifier à la main). Il faut ensuite se souvenir de ce que, pour tout x réel (en particulier pour tout $x \in]-1, 1[$), $\operatorname{artan}(x) = \int_0^x dt/(1+t^2)$, tandis que pour tout $t \in]-1, 1[$, $1/(1+t^2) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N (-1)^n t^{2n}$ (somme d'une série géométrique, cf. le cours de MISMI). On déduit de cela que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\operatorname{artan}(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N ((-1)^n x^{2n+1}/(2n+1))$, formule que l'on applique ensuite à $x = 1/5$, puis à $x = 1/239$, avant que de former la différence $\pi/4 := 4 \operatorname{arctan}(1/5) - \operatorname{artan}(1/239)$.

avec e , des mathématiques, algèbre, arithmétique, analyse et géométrie confondues) est la limite commune des deux suites adjacentes $(u_{2n})_{n \geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ dans ce cas. On peut ainsi, puisque la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fractions (dont les DDI se calculent *via* l'algorithme d'Euclide), obtenir M décimales de π (comme dans (1.4), avec M aussi grand que les possibilités de la machine et les contraintes de temps de calcul l'autorisent).

Une conséquence du fait que \mathbb{R} possède la propriété des segments emboîtés (Proposition 1.5) est que l'on ne peut « numérotter » les nombres réels (alors que l'on peut numérotter les nombres rationnels).

PROPOSITION 1.7 (non dénombrabilité de \mathbb{R}). *L'ensemble (infini) des nombres réels ne saurait être en bijection avec \mathbb{N} . On dit que \mathbb{R} n'est pas dénombrable.*

DÉMONSTRATION. Prouvons ceci par l'absurde, en utilisant le fait que \mathbb{R} vérifie la propriété des segments emboîtés (Proposition 1.5). Supposons que l'on puisse « numérotter » les nombres réels suivant une liste (sans répétitions)

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Soit $[a_0, b_0]$ un segment de \mathbb{R} , avec $b_0 - a_0 > 0$, ne contenant pas x_0 (il suffit de prendre $b_0 \in \mathbb{Z}$ avec $b_0 < E(x_0)$ ou $a_0 \in \mathbb{Z}$ avec $a_0 > E(x_0) + 1$). On peut construire un segment $[a_1, b_1]$ tel que $b_1 - a_1 > 0$, inclus dans $[a_0, b_0]$, et ne contenant pas le point x_1 (il convient de discuter suivant que x_1 est intérieur à $[a_0, b_0]$, est une borne de ce segment, ou est un point de $\mathbb{R} \setminus [a_0, b_0]$). Ces constructions se font en utilisant le fait que \mathbb{R} est archimédien (Proposition 1.3). En continuant ainsi de suite, on trouve une suite de segments emboîtés $[a_n, b_n]$ telle que l'intersection de tous ces segments ne contienne aucun des nombres x_k , $k \in \mathbb{N}$, donc aucun nombre réel, ce qui est en contradiction avec le fait que \mathbb{R} vérifie la propriété des segments emboîtés (et donc que l'intersection des $[a_n, b_n]$ pour $n \in \mathbb{N}$ soit non vide, *cf.* la Proposition 1.5). La proposition est ainsi démontrée par l'absurde. \square

1.5. Valeurs d'adhérence, notions de \limsup et \liminf

Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels convergente est nécessairement *bornée en valeur absolue*, c'est-à-dire à la fois majorée et minorée. En effet, si l'on utilise le critère (1.6) (pour une suite de nombres réels $(u_n)_{n \geq 0}$ convergeant vers une limite réelle finie l), alors on a, en prenant $\epsilon = 1$:

$$\exists N = N(1) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq 1.$$

Pour tout $n \geq N$, on a donc, d'après l'inégalité triangulaire (1.5), $|u_n| \leq |l| + 1$. Il en résulte que, tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq \max(\max_{k \leq N} |u_k|, |l| + 1)$.

En revanche, si une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels est bornée en valeur absolue, il n'y a aucune raison pour que cette suite soit convergente : la suite $((-1)^n)_{n \geq 0}$ est par exemple bornée, mais elle ne converge pas car oscille en prenant alternativement les valeurs 1 (lorsque n est pair) et -1 (lorsque n est impair).

Pour pallier à cette difficulté, on introduit la notion de *valeur d'adhérence* d'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels.

DÉFINITION 1.9 (valeur d'adhérence d'une suite de nombres réels et notion de suite extraite). Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels. On dit qu'un nombre réel l est *valeur d'adhérence* de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ si et seulement s'il existe une

application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers l . On appelle *suite extraite* de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ précisément toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$, où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Un nombre $l \in \mathbb{R}$ est donc valeur d'adhérence de la suite de nombres réels $(u_n)_{n \geq 0}$ si et seulement s'il existe une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ qui converge vers l .

REMARQUE 1.3. Si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombres réels convergeant vers une limite réelle l , toutes les suites extraites de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ convergent vers la même limite et l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est alors non vide et se réduit au singleton $\{l\}$.

Pour les suites réelles bornées en valeur absolue (c'est-à-dire à la fois majorées et minorées), nous avons les résultats suivants, avec les définitions (notions de *limite supérieure* et de *limite inférieure*) qui les accompagnent.

PROPOSITION 1.8 (limite supérieure d'une suite de nombres réels bornée en valeur absolue). *Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels bornée en valeur absolue (c'est-à-dire à la fois majorée et minorée). La suite*

$$\left(\sup\{u_k; k \geq n\} \right)_{n \geq 0} = \left(\sup_{k \geq n} u_k \right)_{n \geq 0}$$

*est une suite de nombres réels décroissante minorée, donc convergente d'après la Proposition 1.2. Sa limite est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, que l'on note*⁷

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} u_k,$$

ou aussi parfois $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$. De plus, si l' est une valeur d'adhérence quelconque de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, on a toujours

$$l' \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n,$$

autrement dit l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est non vide et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$ en est le plus grand élément (donc la borne supérieure, appartenant dans ce cas à l'ensemble).

PROPOSITION 1.9 (limite inférieure d'une suite de nombres réels bornée en valeur absolue). *Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels bornée en valeur absolue (c'est-à-dire à la fois majorée et minorée). La suite*

$$\left(\inf\{u_k; k \geq n\} \right)_{n \geq 0} = \left(\inf_{k \geq n} u_k \right)_{n \geq 0}$$

*est une suite de nombres réels croissante majorée, donc convergente d'après la Proposition 1.2. Sa limite est encore une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, que l'on note*⁸

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} u_k,$$

7. Ceci est facile à mémoriser : les notations parlent d'elles-même ; il s'agit bien d'une limite de sup. En revanche, ce qui est trompeur ici est qu'il s'agit de la limite d'une suite décroissante, non de celle d'une suite croissante !

8. Ceci est facile à mémoriser : les notations parlent encore d'elles-même ; il s'agit bien d'une limite d'inf. En revanche, ce qui est trompeur ici est qu'il s'agit de la limite d'une suite croissante, non de celle d'une suite décroissante !

ou aussi parfois $\varliminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$. De plus, si l' est une valeur d'adhérence quelconque de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, on a toujours

$$l' \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n,$$

autrement dit $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est le plus petit élément (donc la borne inférieure, appartenant dans ce cas à l'ensemble) de l'ensemble (non vide) des valeurs d'adhérence de la suite de nombres réels $(u_n)_{n \geq 0}$.

DÉMONSTRATION. On prouve ici la Proposition 1.8 (celle de la Proposition 1.9 s'y ramène en remplaçant la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par la suite $(-u_n)_{n \geq 0}$).

Comme les ensembles $A_n := \{u_k; k \geq n\}$ sont tous majorés (puisque la suite l'est), on peut bien définir pour chaque n le nombre $\sup(A_n)$ (d'après la Proposition 1.1). Comme de plus $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(\sup(A_n))_{n \geq 0}$ est bien décroissante. Comme la suite $(u_n)_{n \geq \mathbb{N}}$ est aussi minorée, la suite $(\sup(A_n))_{n \geq 0}$ est une suite décroissante minorée, donc convergente (cf. la Proposition 1.2) vers une limite l . Il existe un entier $\varphi(0)$ tel que

$$\sup_{k \geq 0} u_k - 1 = \sup(A_0) - 1 < u_{\varphi(0)} \leq \sup(A_0)$$

(puisque $\sup A_0 - 1$ n'est certainement plus un majorant de A_0 par définition de la borne supérieure d'un ensemble comme plus petit des majorants). Il existe un entier $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que

$$\sup_{k \geq \varphi(0)+1} u_k - \frac{1}{2} = \sup(A_{\varphi(0)+1}) - \frac{1}{2} < u_{\varphi(1)} \leq \sup(A_{\varphi(0)+1})$$

(pour les mêmes raisons). Par récurrence, on construit une suite strictement croissante d'entiers $(\varphi(n))_{n \geq 0}$ tels que

(1.11)

$$\sup_{k \geq \varphi(n-1)+1} u_k - \frac{1}{n} = \sup(A_{\varphi(n-1)+1}) - \frac{1}{n} < u_{\varphi(n)} \leq \sup(A_{\varphi(n-1)+1}) \quad \forall n \geq 1.$$

Les deux suites $(\sup(A_{\varphi(n-1)+1}) - 1/n)_{n \geq 1}$ et $(\sup(A_{\varphi(n-1)+1}))_{n \geq 1}$ encadrant la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ dans (1.11) tendent toutes les deux vers l . Il en est de même de la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ et nous avons ainsi trouvé une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ convergeant bien vers l . Le nombre l est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Soit l' une valeur d'adhérence quelconque de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$. Il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ convergeant vers l' . Or

$$(1.12) \quad u_{\varphi(n)} \leq \sup(A_{\varphi(n)}) \leq \sup(A_n) \quad \forall n \geq 0$$

puisque $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par croissance de φ . En prenant la limite dans (1.12) lorsque n tend vers l'infini, on trouve bien $l' \leq l$. La Proposition 1.8 est complètement démontrée. \square

REMARQUE 1.4. Si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est seulement majorée, mais possède au moins une valeur d'adhérence $l' = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)}$, on a

$$\sup_{k \geq n} u_k \geq u_{\varphi(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(puisque $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ vu que φ est strictement croissante), ce qui implique que la suite décroissante $(\sup_{k \geq n} u_k)_{n \geq 0}$ est minorée (puisque la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ l'est comme suite convergente). On peut donc dans ce cas encore définir

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} u_k.$$

Ce nombre est alors la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ (il en existe ici par hypothèses). Si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est seulement minorée, mais possède au moins une valeur d'adhérence $l' = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)}$, on a

$$\inf_{k \geq n} u_k \leq u_{\varphi(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(puisque $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ vu que φ est strictement croissante), ce qui implique que la suite croissante $(\inf_{k \geq n} u_k)_{n \geq 0}$ est majorée (puisque la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ l'est comme suite convergente). On peut donc dans ce cas encore définir

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} u_k.$$

Ce nombre est alors la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ (il en existe ici par hypothèses).

Nous pouvons énoncer le résultat suivant, synthétisant d'abord les deux propositions 1.8 et 1.9, puis précisant les choses lorsque l'ensemble $\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$ contient une infinité de valeurs distinctes.

THEORÈME 1.1 (théorème de Bolzano-Weierstraß⁹). *Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels bornée en valeur absolue (i.e. à la fois majorée et minorée). L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est non vide, et inclus dans le segment*

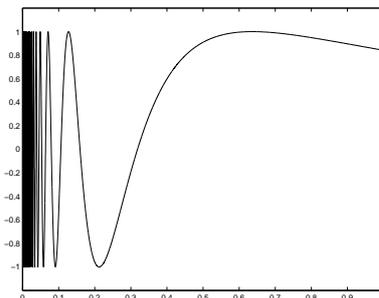
$$\left[\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n, \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n \right]$$

(dont les extrémités sont toutes deux des valeurs d'adhérence de la suite, en l'occurrence les valeurs d'adhérence « extrêmes » de cette suite). De plus, si l'ensemble $\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$ est *infini*, il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, convergeant vers une valeur d'adhérence l de cette suite, et telle que tous les $u_{\varphi(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, soient distincts¹⁰.

DÉMONSTRATION. La première partie de l'énoncé résulte des Propositions 1.8 et 1.9. Supposons que l'ensemble $\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$ soit infini est inclus dans un segment $I_0 = [m, M]$. Il existe donc une suite extraite $(u_{\varphi_0(n)})_{n \geq 0}$ ne prenant que des valeurs distinctes, toutes dans I_0 . Soient $I_{1,0}$ et $I_{1,1}$ les deux segments $[m, (m+M)/2]$ et $[(m+M)/2, M]$. D'après le principe des tiroirs, l'un au moins de ces deux segments (appelons le I_1) contient une infinité de termes de la forme $u_{\varphi_0(k)}$, $k \in \mathbb{N}$ (tous distincts, bien sûr). Il existe donc une suite $(u_{\varphi_1(n)})_{n \geq 0}$ (extraite de la sous-suite $(u_{\varphi_0(n)})_{n \geq 0}$), dont tous les termes se trouvent dans I_1 privé de $(m+M)/2$. On répète le même raisonnement avec I_1 (à la place de I_0) et cette nouvelle suite. On construit

9. On fait ici référence au mathématicien allemand Karl Weierstraß (1815-1897) et, avant lui, au mathématicien originaire de Bohême Bernard Bolzano (1781-1848).

10. On dit alors qu'une telle valeur d'adhérence l est un *point d'accumulation* de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$. Cette dernière assertion se formule donc aussi sous la forme suivante : « tout sous-ensemble infini borné (en valeur absolue) de \mathbb{R} admet au moins un point d'accumulation (appartenant ou non à l'ensemble) ».

FIGURE 1.1. Le graphe de $t \mapsto \sin(1/t)$ sur $]0, 1]$.

ainsi une suite de segments emboîtés $I_0 = [m, M], I_1, I_2, \dots, I_p, \dots$, (la longueur de I_p valant $(M - m)/2^p$) et, pour chaque entier $p \in \mathbb{N}$, une suite $(u_{\varphi_{p+1}(n)})_{n \geq 0}$, extraite de la suite $(u_{\varphi_p(n)})_{n \geq 0}$, et dont tous les termes appartiennent au segment I_{p+1} privé du milieu de I_p . D'après la Proposition 1.5, l'intersection de tous les segments I_p est non vide et consiste en un singleton $\{l\}$. La suite¹¹

$$(u_{\varphi_n(n)})_{n \geq 0}$$

est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$. Cette suite extraite converge vers l car

$$\forall n \in \mathbb{N}, |l - u_{\varphi_n(n)}| \leq \frac{M - m}{2^n}$$

puisque l et $u_{\varphi_n(n)}$ sont tous deux dans le segment I_n . Ceci conclut la preuve du Théorème de Bolzano-Weierstraß. \square

EXEMPLE 1.7. Pour une suite bornée, il se peut que les seules valeurs d'adhérence soient les valeurs extrêmes (c'est le cas par exemple pour la suite $((-1)^n)_{n \geq 0}$). Mais il se peut aussi que tout point du segment $[\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n, \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n]$ soit valeur d'adhérence. Pensez pour cela par exemple au graphe de la fonction

$$x \in]0, 1] \mapsto \sin(1/x)$$

que nous avons représenté sur la figure¹² 1.1. On constate que le graphe « noircit » le rectangle $]0, \epsilon] \times [-1, 1]$ lorsque $\epsilon > 0$ est assez petit. On peut ainsi conjecturer que, si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, la suite¹³ $(\sin(\alpha\pi n))_{n \geq 0}$ admet pour valeurs d'adhérence tous les points de $[-1, 1]$ (ceci vaut en particulier si $\alpha = 1/\pi$, la suite étant dans ce cas $(\sin n)_{n \geq 0}$).

1.6. Comportement des suites de nombres réels non bornées

Parmi les suites de nombres réels $(u_n)_{n \geq 0}$ qui ne sont pas majorées, on distingue celles qui tendent vers $+\infty$.

11. Le travail que l'on fait ici, partant d'un tableau à deux entrées (l'indice p comme indice de colonne, l'indice n comme indice de ligne), consistant au final à considérer la « diagonale » du tableau, est un procédé très utilisé en mathématiques (algèbre ou analyse) : on l'appelle le « procédé diagonal ». Georg Cantor (1845-1918) l'a beaucoup exploité dans ses travaux en mathématiques ou en logique.

12. Les graphiques illustrant ce polycopié (autres que ceux réalisés à la main avec le logiciel **Xfig**) ont été obtenus sous l'environnement graphique du logiciel de calcul scientifique **MATLAB**.

13. On pourra justifier cela en exercice.

DÉFINITION 1.10 (suites de réels tendant vers $+\infty$). Une suite de nombres réels $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall M > 0, \exists N = N(M) \in \mathbb{N}, (n \geq N(M)) \implies (u_n \geq M),$$

autrement dit, tous les termes de la suite deviennent arbitrairement grands au delà d'un seuil à déterminer.

EXEMPLE 1.8 (fonctions polynomiales discrètes). Si $u_n = P(n)$, où P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré strictement positif et de coefficient dominant strictement positif, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$.

Si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombres réels non majorée, il existe un cran $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $u_{\varphi(0)} \geq 0$. Il existe un cran entier $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(1)} \geq 1$, etc. On construit ainsi inductivement une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, telle que $u_{\varphi(n)} \geq n$ pour tout $n \geq 0$. On en conclut que, de toute suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels non majorée, on peut extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ convergeant vers $+\infty$. On dit alors que $+\infty$ est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ (c'est bien sûr dans ce cas la plus grande valeur d'adhérence de cette suite $(u_n)_{n \geq 0}$).

De même :

DÉFINITION 1.11 (suites de réels tendant vers $-\infty$). Une suite de nombres réels $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers $-\infty$ si et seulement si

$$\forall M > 0, \exists N = N(M) \in \mathbb{N}, (n \geq N(M)) \implies (u_n \leq -M),$$

autrement dit, tous les termes de la suite deviennent arbitrairement petits au delà d'un seuil à déterminer.

EXEMPLE 1.9 (fonctions polynomiales discrètes). Si $u_n = P(n)$, où P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré strictement positif et de coefficient dominant strictement négatif, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers $-\infty$.

Si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombres réels non minorée, il existe un cran $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $u_{\varphi(0)} \leq 0$. Il existe un cran entier $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(1)} \leq -1$, etc. On construit inductivement une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, telle que $u_{\varphi(n)} \leq -n$ pour tout $n \geq 0$. On en conclut que, de toute suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels non majorée, on peut extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ convergeant vers $-\infty$. On dit alors que $-\infty$ est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ (c'est bien sûr dans ce cas la plus petite valeur d'adhérence de cette suite $(u_n)_{n \geq 0}$).

REMARQUE 1.5. Si, pour une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels, on tolère $-\infty$ et $+\infty$ comme possibles valeurs d'adhérence de la suite, on peut affirmer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite de nombres réels (considéré cette fois comme sous-ensemble de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) est toujours non vide, ce qui complète la première partie de l'énoncé du théorème de Bolzano-Weierstraß (Théorème 1.1), en l'étendant au cadre des suites quelconques de nombres réels.

PROPOSITION 1.10. Si l'ensemble des valeurs d'adhérence (considéré cette fois dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) d'une suite de nombres réels $(u_n)_{n \geq 0}$ se réduit à un singleton $\{l\}$, où $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors on peut affirmer que cette suite converge vers l (que l soit fini ou vaille $\pm\infty$).

DÉMONSTRATION. Si l (seule valeur d'adhérence) est fini, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est nécessairement bornée en valeur absolue. Comme

$$\inf_{k \geq n} u_k \leq u_n \leq \sup_{k \geq n} u_k \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, coincée entre deux suites tendant toutes deux vers l , tend aussi vers l . Si $l = +\infty$ (seule valeur d'adhérence), la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est certainement minorée puisque $-\infty$ ne saurait être valeur d'adhérence ; la suite $(\inf_{k \geq n} u_k)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$, et par conséquent la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ aussi. On raisonne de manière analogue lorsque $l = -\infty$. \square

1.7. Des suites de nombres réels aux suites de nombres complexes

Le corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ des nombres complexes se présente comme un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2, une base étant la base $\{1, i\}$ ($i = \sqrt{-1}$). La différence majeure avec \mathbb{R} est que l'ensemble \mathbb{C} n'est pas naturellement ordonné. Les nombres complexes peuvent être repérés sous forme *cartésienne*

$$z = x + iy, \quad \text{où } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

ou *trigonométrique* (ou encore *polaire*)

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}, \quad \text{où } r \geq 0, \theta \in \mathbb{R} \text{ (modulo } 2\pi).$$

DÉFINITION 1.12 (suites de nombres complexes). Une *suite de nombres complexes*¹⁴ $(z_n)_{n \geq 0}$ est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{C} ($z_n = z(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Si la suite n'est définie que pour $n \geq n_0$, on la note $(z_n)_{n \geq n_0}$. La donnée d'une telle suite équivaut à la donnée simultanée de deux suites de nombres réels, à savoir les suites $(\operatorname{Re} z_n)_{n \geq 0}$ et $(\operatorname{Im} z_n)_{n \geq 0}$.

Du fait que la donnée d'une suite de nombres complexes équivaut à celle de deux suites de nombres réels (celle des parties réelles et celle des parties imaginaires), certaines notions se trouvent immédiatement étendues du cadre réel au cadre complexe. Par exemple :

DÉFINITION 1.13 (convergence d'une suite de nombres complexes vers un nombre complexe). Une suite de nombres complexes $(z_n)_{n \geq 0}$ *converge vers un nombre complexe* l si et seulement si les suites de nombres réels $(\operatorname{Re} z_n)_{n \geq 0}$ et $(\operatorname{Im} z_n)_{n \geq 0}$ convergent respectivement vers $\operatorname{Re} l$ et $\operatorname{Im} l$. Une suite $(z_n)_{n \geq 0}$ de nombres complexes qui ne converge pas vers un nombre complexe l est dite *divergente*.

DÉFINITION 1.14 (valeur d'adhérence d'une suite de nombres complexes). Un nombre complexe l est dit *valeur d'adhérence* d'une suite de nombres complexes $(z_n)_{n \geq 0}$ si et seulement si il existe une suite extraite $(z_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ convergeant vers l .

La fonction module $|\cdot|$ vérifie l'inégalité triangulaire :

$$(1.13) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \forall w \in \mathbb{C}, \quad ||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$$

(retenez bien les inégalités de gauche comme de droite). Elle fournit le critère suivant pour la convergence d'une suite de nombres complexes $(z_n)_{n \geq 0}$ vers une limite $l \in \mathbb{C}$.

14. Elle peut être donnée exhaustivement (par $z_n = f(n)$), mais on affine le plus souvent en informatique (comme dans le cas des suites réelles) à des suites données par $p \geq 1$ conditions initiales z_0, \dots, z_{p-1} et une relation de récurrence à p pas : $\ll z_{n+p} = F(z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+p-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N} \gg$.

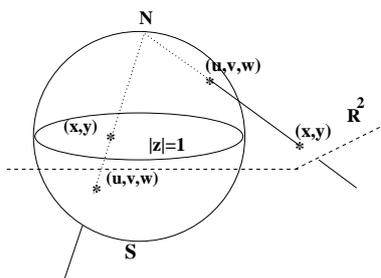


FIGURE 1.2. Projection stéréographique depuis le pôle Nord : le point ∞ dans \mathbb{C}

$$(1.14) \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N(\epsilon)) \implies (|z_n - l| \leq \epsilon).$$

Toutes les règles calculatoires de la Proposition 1.4 se transposent sans difficulté du cadre réel au cadre complexe.

Concernant la convergence vers l'infini, on ne peut, puisque \mathbb{C} n'est pas ordonné (au contraire de \mathbb{R}), conserver que la notion suivante.

DÉFINITION 1.15 (convergence d'une suite de nombres complexes vers l'infini). Une suite de nombres complexes $(z_n)_{n \geq 0}$ est dite converger vers l'infini (noté ∞) si et seulement si la suite $(|z_n|)_{n \geq 0}$ converge vers $+\infty$. On dit qu'une suite de nombres complexes admet ∞ pour valeur d'adhérence si et seulement si elle est non bornée en module.

Pour « visualiser » cette notion d'*infini* dans \mathbb{C} , on pensera à $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ comme le plan équatorial de la sphère terrestre (de rayon normalisé à 1). Les points (u, v, w) de cette sphère (distincts du pôle Nord) sont en correspondance bijective avec les nombres complexes *via* la transformation consistant à tirer depuis le pôle Nord la demi-droite passant par (u, v, w) et à prendre pour image de (u, v, w) le point (x, y) (d'affixe $z = x + iy$) d'intersection de cette demi-droite avec le plan équatorial. On appelle cette transformation¹⁵ *projection stéréographique* depuis le pôle Nord (voir la figure 1.2). C'est le pôle Nord qui peut dans ce cas être interprété comme le point ∞ de \mathbb{C} . Cette vision de l'infini est importante en graphisme 3D.

Le théorème de Bolzano-Weierstraß (Théorème 1.1) se transpose aussi dans le cadre complexe (on raisonne sur les suites des parties réelles et des parties imaginaires, auxquelles on applique le théorème de Bolzano-Weierstraß, version réelle, Théorème 1.1).

THEORÈME 1.2 (théorème de Bolzano-Weierstraß dans \mathbb{C}). *Soit $(z_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes bornée en module (il existe $R > 0$ tel que $|z_n| \leq R$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). L'ensemble des valeurs d'adhérence de cette suite est non vide, et inclus dans le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq R\}$. De plus, si l'ensemble $\{z_n; n \in \mathbb{N}\}$ est*

15. Parfois utilisée en cartographie, mais, attention, elle déforme considérablement les territoires trop proches du pôle Nord, par exemple le Groenland. On lui préfère pour ces raisons la *projection de Mercator*.

infini, il existe une suite extraite $(z_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ convergeant vers une valeur d'adhérence l de la suite $(z_n)_{n \geq 0}$, et telle que tous les $u_{\varphi(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, soient distincts¹⁶.

REMARQUE 1.6. Si l'on considère ∞ comme valeur d'adhérence possible pour une suite de nombres complexes $(z_n)_{n \geq 0}$, on peut affirmer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de cette suite (considéré cette fois dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) est toujours non vide : soit en effet la suite est bornée en module (et on utilise alors le théorème 1.2), soit elle ne l'est pas, et dans ce cas ∞ est valeur d'adhérence (du fait de la définition 1.15, second volet). On a aussi l'analogie de la Proposition 1.10 : si l'ensemble des valeurs d'adhérence (considéré dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) est réduit à un singleton $\{l\}$, où $l \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, alors la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ converge vers l , que l soit un nombre complexe ou vaille ∞ .

1.8. Suites et critère de Cauchy

Il est très important (du point de vue pratique) d'énoncer un critère de convergence pour les suites de nombres réels ou complexes qui n'utilise pas (comme c'est le cas pour les critères (1.6) ou (1.14)) la connaissance *a priori* de la limite l . Être à même de savoir « prédire » la valeur d'une limite avant que de savoir prouver son existence n'est en effet pas en général chose facile ! En guise de parade à cet obstacle, nous introduisons ici la notion de *suite de Cauchy*.

DÉFINITION 1.16 (suite de Cauchy¹⁷ de nombres complexes). Une suite de nombres complexes $(z_n)_{n \geq 0}$ est dite *suite de Cauchy* (de nombres complexes) si et seulement si elle vérifie le critère suivant, dit *critère de Cauchy* :

$$(1.15) \quad \forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}, (n \geq N \text{ et } p \geq N) \implies (|z_n - z_p| \leq \epsilon).$$

EXEMPLE 1.10 (toute suite convergente est de Cauchy). Toute suite $(z_n)_{n \geq 0}$ convergente vers une limite $l \in \mathbb{C}$ est de Cauchy. Il existe en effet, si tel est le cas, pour chaque $\epsilon > 0$, un entier $N = N(\epsilon/2)$ tel que $|z_n - l| \leq \epsilon/2$ pour $n \geq N$ (cf. le critère (1.14)). Si $n \geq N$ et $p \geq N$, on a donc (grâce à (1.5))

$$|z_n - z_p| \leq |z_n - l| + |l - z_p| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Le critère de Cauchy (1.15) est donc bien rempli si la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ converge vers une limite finie $l \in \mathbb{C}$.

EXEMPLE 1.11 (Zénon d'Elée encore). Reprenons, dans \mathbb{C} cette fois, le paradoxe de Zénon présenté dans l'exemple 1.5. Supposons que l'archer lance à l'instant $t = 0$ sa flèche depuis la position z_0 et que celle-ci retombe au point d'affixe z_1 , avec $|z_1 - z_0| = l_1$. L'archer va alors se positionner au point d'affixe z_1 et relance sa flèche depuis ce point ; celle-ci retombe au point d'affixe z_2 , mais, fatigue oblige, on a cette fois $l_2 = |z_2 - z_1| \leq \kappa l_1$, où $\kappa \in]0, 1[$. L'archer relance ensuite sa flèche depuis le point d'affixe z_2 et elle retombe en un point d'affixe z_3 telle que $l_3 = |z_3 - z_2| \leq \kappa l_2$, etc. La suite $(z_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy. En effet, on a $|z_{n+1} - z_n| = l_{n+1} \leq \kappa l_n = \kappa |z_n - z_{n-1}|$

16. On dit alors qu'une telle valeur d'adhérence l est un *point d'accumulation* de la suite $(z_n)_{n \geq 0}$. Cette dernière assertion se formule donc aussi sous la forme suivante : « tout sous-ensemble infini borné (en valeur absolue) de \mathbb{C} admet au moins un point d'accumulation (appartenant ou non à l'ensemble) ».

17. Augustin-Louis, baron Cauchy (1789-1857), analyste français. On lui doit, avec K. Weierstraß, les fondements de l'analyse moderne.

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit en utilisant (1.5) que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |z_{n+p} - z_n| &\leq |z_{n+p} - z_{n+p-1}| + \cdots + |z_{n+1} - z_n| = l_n + \cdots + l_{n+p} \\ &\leq l_n(1 + \kappa + \cdots + \kappa^{p-1}) = l_n \frac{1 - \kappa^p}{1 - \kappa} \leq \frac{l_n}{1 - \kappa} \leq \kappa^{n-1} \frac{l_1}{1 - \kappa}. \end{aligned}$$

Comme la suite $(\kappa^{n-1})_{n \geq 1}$ tend vers 0, le critère de Cauchy (1.15) est bien rempli par la suite $(z_n)_{n \geq 0}$.

Le théorème suivant répond au délicat problème mentionné en préambule de cette section : comment prouver qu'une suite converge sans être à même d'en « prédire » la valeur de la limite ? Il suffit de prouver qu'elle est de Cauchy. En effet, on a le :

THEORÈME 1.3 (critère : une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy). *Toute suite de Cauchy de nombres complexes est convergente vers une limite $l \in \mathbb{C}$. Toute suite de Cauchy $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels est convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}$. Les assertions réciproques sont aussi vraies (cf. l'exemple 1.10).*

DÉMONSTRATION. Qui peut le plus peut le moins ; on peut donc se contenter de prouver le résultat pour les suites $(z_n)_{n \geq 0}$ de nombres complexes¹⁸. Soit $(z_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy de nombres complexes. Cette suite est bornée : le critère de Cauchy (1.15) implique en effet que

$$|z_n| \leq \max \left(\max_{k \leq N(1)} |z_k|, |z_{N(1)}| + 1 \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La suite $(z_n)_{n \geq 0}$ admet donc (d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, Théorème 1.2) au moins une valeur d'adhérence $l \in \mathbb{C}$. Or, cette suite ne saurait posséder deux valeurs d'adhérence complexes distinctes l_1 et l_2 : si tel était le cas, on aurait en effet deux suites extraites $(z_{\varphi_1(n)})_{n \geq 0}$ et $(z_{\varphi_2(n)})_{n \geq 0}$ convergeant respectivement vers l_1 et l_2 . Mais le critère de Cauchy (1.15) impliquerait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_{\varphi_1(n)} - z_{\varphi_2(n)}| = 0.$$

On aurait donc, par passage à la limite lorsque n tend vers l'infini, $l_1 = l_2$. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ se réduit donc au singleton $\{l\}$. D'après la remarque 1.6, la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ converge donc vers son unique valeur d'adhérence complexe l . \square

EXEMPLE 1.12 (le théorème du point fixe dans \mathbb{C}). L'archer du paradoxe de Zénon (exemple 1.11) tend donc à se rapprocher au fil du temps d'un point limite dans le plan complexe. Il s'agit là d'un cas particulier d'une application très importante de la Proposition 1.3. Soit $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application contractant strictement les distances, ce qui signifie qu'il existe $\kappa \in]0, 1[$ tel que $|T(z) - T(w)| \leq \kappa|z - w|$ pour tout z, w dans \mathbb{C} . L'application T laisse invariant un point l et un seul dans le plan complexe ($T(l) = l$). Ce point « fixe » sous l'action de T s'obtient comme la limite de la suite initiée en un point z_0 arbitraire de \mathbb{C} et régie ensuite par la relation inductive $z_{n+1} = T(z_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette suite $(z_n)_{n \geq 0}$ est en effet de Cauchy ; elle converge donc dans \mathbb{C} vers une limite l . Cette limite vérifie nécessairement $l = T(l)$ et est donc « le » point fixe sous l'action de T . Le théorème du point fixe,

¹⁸. On a en effet $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. D'autre part, la convergence d'une suite de nombres réels $(u_n)_{n \geq 0}$ (considérée comme suite de nombres complexes) dans \mathbb{C} vers un nombre complexe $l \in \mathbb{R}$ équivaut à la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vers l dans \mathbb{R} .

que nous venons de formuler ici en dimension 2 (dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$) est, en dimension plus grande, voire énorme, la pierre d'angle de puissants algorithmes : le moteur de recherche **Google**, en dimension N (cet entier N figurant cette fois le nombre de pages **web** répertoriées, soit une trentaine de milliards), repose par exemple sur ce même principe, transcrit de la dimension 2 à la dimension N (c'est la brique de base du célèbre algorithme **Pagerank**¹⁹, inventé à Stanford par L. Page et S. Brin vers 1997).

19. Consultez, si vous êtes curieux, la jolie présentation « piétonne » faite par Michael Eisenmann dans [Eis].

Fonctions continues et fonctions dérivables

Ce chapitre reprend et approfondit les notions introduites en MIS101 (voir par exemple le Chapitre 3 de [Ymis]). La présentation des résultats se veut toutefois ici axée, autant que faire se peut, sur une démarche algorithmique, mon souci étant ici de m'adresser à un public de sensibilité autant mathématique qu'informatique. Le foisonnant traité de Lagrange (1797) [Lag], que je ne peux qu'inviter à consulter (édition de 1813), montre cependant que, bien avant que l'informatique ne trouve sa place, l'analyse infinitésimale était déjà solidement assise dès le tout début du XIX-ième siècle, à l'heure où la formalisation quantifiée moderne $\ll \forall \epsilon > 0, \exists \eta, \dots \gg$ n'avait pas encore été « cadrée » par A. Cauchy et K. Weierstraß. Je m'inspirerai parfois dans ce cours des idées déjà présentes (et autrement plus développées) dans ce traité [Lag] (en particulier les chapitres I à V).

2.1. Préliminaires : adhérence et notion de limite

Il s'agit là en principe de rappels du cours de MIS101. Dans cette section, nous introduisons la notion d'*adhérence* d'un sous-ensemble A de \mathbb{R} , puis celle de *limite* en ce point d'une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. L'ensemble A est ici le *domaine de définition* de la fonction f .

DÉFINITION 2.1 (adhérence d'un sous-ensemble de \mathbb{R}). Soit A un sous-ensemble non vide de \mathbb{R} . Un nombre réel a est dit *adhérent* à A si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de A convergeant vers a . L'adhérence de A sera notée¹ \bar{A} .

REMARQUE 2.1 (on a toujours $A \subset \bar{A}$). Si A est un sous-ensemble non vide de \mathbb{R} , tout point a de A est adhérent à A (puisque limite de la suite stationnaire donnée par $x_n = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). On a donc toujours l'inclusion $A \subset \bar{A}$. Cette inclusion par contre peut être stricte : par exemple $0 \in]0, 1]$, mais $0 \notin]0, 1]$; dans le cas particulier où $A = \bar{A}$, on dit que A est *fermé* (voir la Définition 2.2 ci-dessous). On note aussi que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ car tout nombre réel s'approche par une suite de nombres décimaux (cf. l'exemple 1.4), ce qui montre que le fossé entre un ensemble et son adhérence peut être énorme. On a d'ailleurs aussi, notons le, $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (cf. toujours le même exemple 1.4). Ni \mathbb{Q} , ni $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ne sont donc fermés !

DÉFINITION 2.2 (fermés, ouverts, compacts de \mathbb{R}). Un sous-ensemble *fermé* de \mathbb{R} est par définition un sous-ensemble A tel que $A = \bar{A}$. Le complémentaire $\mathbb{R} \setminus A$ d'un sous-ensemble fermé est appelé sous-ensemble *ouvert*. Un sous-ensemble de \mathbb{R} à la fois fermé et borné est dit *compact*².

1. Il convient ici d'oublier la notation utilisée au lycée pour noter le complémentaire d'un ensemble. Le complémentaire de A dans \mathbb{R} sera toujours noté $\mathbb{R} \setminus A$ pour éviter toute confusion avec la notation \bar{A} (qui désignera toujours d'adhérence de A).

2. Il existe des sous-ensembles de \mathbb{R} qui ne sont ni ouverts ni fermés (par exemple \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, cf. la remarque 2.1). Les ouverts de \mathbb{R} sont, intuitivement, de « gros » ensembles : ils ont vocation

EXEMPLE 2.1 (valeurs d'adhérence d'une suite). Si $(u_n)_{n \geq 0}$ désigne une suite de nombres réels et $A := \{u_k; k \in \mathbb{N}\}$ désigne l'ensemble des valeurs prises par la suite³, toute valeur d'adhérence $a \in \mathbb{R}$ de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ (s'il en existe) est un point adhérent à l'ensemble A .

Supposons maintenant que A soit le domaine de définition d'une fonction f à valeurs dans \mathbb{C} .

DÉFINITION 2.3 (limite d'une fonction en un point). Soit $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie dans un sous-ensemble A de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{C} . Soit $a \in \bar{A}$ et $l \in \mathbb{C}$. On dit que « la fonction f a pour limite l au point a », ou encore que « $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a », ce que l'on note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l,$$

si et seulement, pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de A convergeant vers a , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l.$$

Ceci s'exprime sous la forme quantifiée :

$$(2.1) \quad \forall (x_n)_{n \geq 0} \text{ telle que } (\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A), \\ \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l \right).$$

REMARQUE 2.2. Si a est un point du domaine de définition A d'une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, dire que f a pour limite $l \in \mathbb{C}$ au point a implique que $f(a) = l$ (on utilise comme suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans le critère (2.1) la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ qui stationne à a). Il faut donc faire avec cette règle⁴. Ainsi, la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -1$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ n'a de limite en aucun point de \mathbb{R} : aux points $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en effet, la limite devrait valoir -1 , ce qui est impossible car tout nombre réel (en particulier irrationnel) s'approche par une suite de nombres décimaux, donc rationnels (voir l'exemple 1.4) ; aux points $x \in \mathbb{Q}$, la limite devrait valoir 1 , ce qui est impossible encore car tout nombre rationnel s'approche par une suite de nombres irrationnels (voir encore l'exemple 1.4).

Le critère (2.1), dit *critère séquentiel*, est certes celui que retiendra l'informaticien qui n'a accès *via* la machine qu'au maniement des suites. On peut cependant formuler les choses de manière non séquentielle (donc moins lourde) ainsi que nous ont appris à le formaliser A. Cauchy et surtout K. Weierstraß et l'école allemande.

à s'« étaler » dans toute la place qui leur est allouée. Vous verrez plus tard que les ouverts de \mathbb{R} sont les unions dénombrables d'intervalles ouverts $]a_k, b_k[$ disjoints ($-\infty \leq a_k < b_k \leq +\infty$). Au contraire, les compacts de \mathbb{R} sont les sous-ensembles en un certain sens « confinés » ou « resserrés ». Il est important d'avoir dès maintenant cette vision heuristique de ce que sont, aux antipodes l'une de l'autre, d'une part la famille des ouverts de \mathbb{R} , d'autre part celle des compacts de \mathbb{R} .

3. Attention ! Ne pas confondre cet ensemble A , ensemble des valeurs prises par la suite, avec la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ qui, elle, n'est pas un ensemble, mais une application $n \in \mathbb{N} \mapsto u_n$.

4. De fait, cette règle est finalement assez naturelle si l'on songe au problème de l'« évaluation exacte » d'une fonction en un réel donné (du point de vue informatique), voir par exemple la remarque 2.4 plus loin.

PROPOSITION 2.1 (critère pour la limite en un point). Soit $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $a \in \overline{A}$, et $l \in \mathbb{C}$. On a le critère suivant :

$$(2.2) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \forall \epsilon > 0, \exists \eta = \eta(\epsilon) > 0, (x \in A \cap]a - \eta, a + \eta[) \implies (|f(x) - l| < \epsilon).$$

DÉMONSTRATION. Le critère (2.2) implique que pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de A tendant vers a , la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ tend vers l : en effet, pour $N = N(\epsilon)$ assez grand, on a $|x_n - a| < \eta(\epsilon)$, donc $|f(x_n) - l| < \epsilon$ d'après le critère (2.2).

On prouve la réciproque par l'absurde. Si le critère (2.2) est en défaut :

$$(2.3) \quad \exists \epsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in A \cap]a - \eta, a + \eta[\text{ tel que } |f(x) - l| \geq \epsilon.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve donc, en prenant dans (2.3) $\eta = 1/n$, un nombre x_n tel que $x_n \in]a - 1/n, a + 1/n[$ et $|f(x_n) - l| \geq \epsilon$. La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge bien vers a , mais la suite $(f(x_n))_{n \geq 1}$ ne converge pas vers l . Le critère séquentiel (2.1) est donc en défaut aussi. \square

Nous avons aussi les notions plus précises de *limite à droite* et *limite à gauche* d'une fonction en un point a adhérent au domaine de définition.

DÉFINITION 2.4 (limites à gauche ou à droite). Soit $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ et a un point adhérent au domaine de définition A de la fonction f .

- On dit que *la fonction f a une limite (finie) à droite* $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si a est adhérent à $A \cap]a, +\infty[$ et si la restriction de f à $A \cap]a, +\infty[$ (c'est-à-dire la fonction qui à $x \in A \cap]a, +\infty[$ associe $f(x)$) a pour limite l lorsque x dans vers a , mais cette fois dans $A \cap]a, +\infty[$.
- On dit que *la fonction f a une limite (finie) à gauche* $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si a est adhérent à $A \cap]-\infty, a[$ et si la restriction de f à $A \cap]-\infty, a[$ (c'est-à-dire la fonction qui à $x \in A \cap]-\infty, a[$ associe $f(x)$) a pour limite l lorsque x dans vers a , mais cette fois dans $A \cap]-\infty, a[$.

REMARQUE 2.3. Lorsque a est adhérent à la fois à $A \cap]a, +\infty[$ et à $A \cap]-\infty, a[$, on peut donc dire que $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ a une limite (finie) en a si et seulement si f a des limites finies à droite et à gauche en a et si ces deux limites sont égales; de plus, si $a \in A$, cette limite commune doit nécessairement valoir $f(a)$ (compte-tenu des règles imposées pour la définition de la limite d'une fonction en un point), précaution qui évite que f ne prenne des valeurs « pathologiques » en des points isolés.

EXEMPLE 2.2. Soit f la fonction de \mathbb{R} dans $[0, 1]$ qui à un nombre réel x associe le nombre $x - E(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x . En tout point x de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la fonction f admet une limite égale à $f(x)$ (on vérifiera ce fait en utilisant les développements décimaux). En revanche, en tout point de \mathbb{Z} , la fonction f a pour limite à droite $l = 0$ et pour limite à gauche $l = 1$. Ces deux limites sont distinctes, f n'a donc pas de limite en un tel point.

2.2. Continuité d'une fonction en un point

Nous formalisons dans cette section les notions de continuité (locale ou globale) vues heuristiquement en Terminale et en MIS101.

DÉFINITION 2.5 (continuité d'une fonction en un point). Soit A un sous-ensemble de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de A dans \mathbb{C} et $x_0 \in A$. On dit que la fonction f est *continue au point* x_0 si et seulement f admet une limite finie au point x_0 , auquel cas cette limite vaut nécessairement $f(x_0)$.

Au vu de cette définition, on peut donc utiliser soit le critère séquentiel (2.1), soit le critère (2.2), pour tester la continuité d'une fonction en un point x_0 de son domaine de définition A . Il convient chaque fois de prendre lorsque l'on souhaite utiliser l'un ou l'autre de ces critères $a = x_0$ et $l = f(x_0)$.

REMARQUE 2.4 (Attention! Il faut s'être bien entendu sur le domaine de définition A de f dès le départ). La fonction f définie par exemple sur $[\sqrt{2}, 2]$ par $f(\sqrt{2}) = 1$ et $f(x) = \exp(-1/(x - \sqrt{2}))$ si $x \in]\sqrt{2}, 2]$ n'est pas continue en $x_0 = \sqrt{2}$ (qui est bien dans le domaine de définition de f tel qu'on se l'est donné). En effet la fonction $g : x \in]\sqrt{2}, 2] \mapsto \exp(-1/(x - \sqrt{2}))$ admet bien une limite au point $\sqrt{2} \in]\sqrt{2}, 2]$, mais cette limite vaut $l = 0 \neq 1$. Si l'on souhaite « prolonger » la fonction $g :]\sqrt{2}, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ en une fonction $\tilde{f} : [\sqrt{2}, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit cette fois continue au point $x_0 = \sqrt{2}$, on n'a pas d'autre choix que de poser $\tilde{f}(\sqrt{2}) = 0$. Cette nouvelle fonction \tilde{f} a beaucoup plus de sens que la fonction initiale f (pour laquelle la valeur 1 en $x_0 = \sqrt{2}$ était manifestement « pathologique⁵ »). On dit que \tilde{f} réalise un prolongement par continuité à $[\sqrt{2}, 2]$ de la restriction de f à $] \sqrt{2}, 2]$.

2.3. Continuité d'une fonction sur intervalle de \mathbb{R}

2.3.1. Les divers types d'intervalles de \mathbb{R} .

DÉFINITION 2.6 (intervalle de \mathbb{R}). On appelle *intervalle* de \mathbb{R} tout sous-ensemble non vide I de \mathbb{R} tel que

$$(2.4) \quad \forall x, y \in I, \quad (x \leq y) \implies ([x, y] \subset I).$$

On dit aussi que les intervalles de \mathbb{R} sont les sous-ensembles *convexes* de \mathbb{R} car la condition (2.4) correspond à la condition géométrique de *convexité*.

On distingue deux classes d'intervalles I de \mathbb{R} : celle des *intervalles bornés* et celle des *intervalles non bornés*.

Il y a dans \mathbb{R} quatre types d'intervalles bornés :

- les *segments* $[a, b]$, où $a \leq b$, (aussi appelés *intervalles fermés bornés* $[a, b]$, ou encore *pavés*), contenant à la fois leur borne inférieure a et leur borne supérieure b ;
- les *intervalles bornés semi-ouverts à gauche* $]a, b]$, contenant leur borne supérieure b , mais pas leur borne inférieure a ;
- les *intervalles bornés semi-ouverts à droite* $[a, b[$, contenant leur borne inférieure a , mais pas leur borne supérieure b ;
- les *intervalles bornés ouverts* $]a, b[$, ne contenant ni leur borne inférieure a , ni leur borne supérieure b .

Il y a dans \mathbb{R} cinq types d'intervalles non bornés :

5. Il faut avoir en tête que, du point de vue informatique, assigner une valeur à un nombre réel x_0 fixé (qui a le malheur de ne pas être une fraction p/q , par exemple $x_0 = \sqrt{2}$) s'avère une opération matériellement impossible car aucune machine ne permet d'accéder au nombre x_0 par le biais de son DDI (illimité).

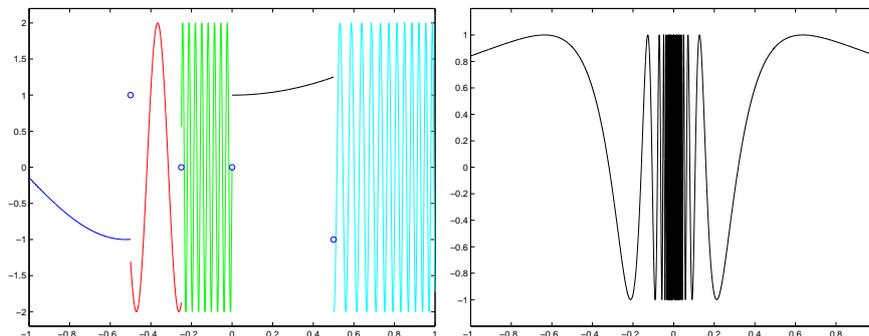


FIGURE 2.1. Discontinuités de première et seconde espèce

- les intervalles non bornés, minorés, ouverts $]a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$ (borne inférieure a excluse) ;
- les intervalles non bornés, minorés, fermés $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$ (borne inférieure a incluse) ;
- les intervalles non bornés, majorés, ouverts $]-\infty, b[$, $b \in \mathbb{R}$ (borne supérieure b excluse) ;
- les intervalles non bornés, majorés, fermés $]-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$ (borne supérieure b incluse) ;
- l'intervalle ouvert $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$.

Si I est un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un seul point, on appelle *intérieur* de I l'intervalle ouvert (borné ou non borné) obtenu en retirant à I ses bornes inférieure et supérieure (lorsqu'elles existent).

2.3.2. Continuité sur un intervalle ; points de discontinuité. Si A est un sous-ensemble de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de A dans \mathbb{C} (donc de domaine de définition contenant A), on dit que f est continue sur A si et seulement si f est continue en tout point de A . Ceci s'applique en particulier au cas où A est un intervalle I de \mathbb{R} (de tout type).

DÉFINITION 2.7 (continuité d'une fonction sur un intervalle). Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie⁶ sur I et à valeurs dans \mathbb{C} . On dit que f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I .

Le fait qu'une fonction f ne soit pas continue sur un intervalle I non réduit à un point signifie l'une ou l'autre des deux choses suivantes :

- ou bien la fonction f n'est pas continue en l'une des bornes (éventuelles) de I appartenant à I ;
- ou bien il existe un point x_0 de l'intérieur de I en lequel f n'est pas continue : on dit alors que f présente une *discontinuité* en un point intérieur à I . Si f admet malgré tout des limites finies (mais distinctes) à gauche et à droite en ce point, on dit que f présente en x_0 une *discontinuité de première espèce* (voir la figure 2.1, figure de gauche) ; dans le cas contraire, on dit que f présente en x_0 une *discontinuité de seconde espèce*.

6. Si le domaine de définition de f s'avère de fait strictement plus grand que I , ce qui se passe hors de I est ignoré ici. Le domaine d'étude de la fonction se restreint à I .

EXEMPLE 2.3 (un exemple de discontinuité de seconde espèce). La fonction f définie sur $[-1, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/|x|) & \text{si } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

présente une discontinuité de seconde espèce au point $x = 0$ (cf. le graphe représenté sur la figure 2.1, figure de droite, voir aussi l'exemple 1.7). Tous les nombres l de $[-1, 1]$ sont en effet ici limites potentielles de suites $(f(x_n))_{n \geq 0}$, où $(x_n)_{n \geq 0}$ est une certaine suite tendant vers 0 par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures (la fonction f est paire). Ceci explique le graphe « noirci » sur un intervalle $] -\epsilon, \epsilon[$ autour de 0.

2.3.3. Discontinuités des fonctions monotones. Les fonctions à valeurs réelles monotones (croissantes ou décroissantes) sur un intervalle I de \mathbb{R} jouent un rôle important. Leurs discontinuités sont en effet « gérables », car toujours de première espèce, quand bien même ces fonctions ne sont évidemment pas en général continues. Rappelons que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est *monotone croissante* sur un intervalle I si et seulement si

$$\forall x, y \in I, (x \leq y) \implies (f(x) \leq f(y))$$

et *monotone décroissante* sur I si et seulement si

$$\forall x, y \in I, (x \leq y) \implies (f(x) \geq f(y)).$$

Lorsque l'on peut préciser ces conditions en remplaçant partout les inégalités larges \leq ou \geq par des inégalités strictes $<$ ou $>$, on dit que f est *strictement monotone* sur I : *strictement croissante* ou *strictement décroissante*.

PROPOSITION 2.2 (fonctions monotones réelles sur un intervalle). *Soit f une fonction monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle I . Tous les points de discontinuité éventuels de f dans l'intérieur de I sont de première espèce. De plus, si I est un segment $[a, b]$ avec $a < b$, l'ensemble des points de discontinuité (tous de première espèce) de f dans $]a, b[$ est un ensemble fini ou dénombrable.*

DÉMONSTRATION. Pour fixer les idées, on suppose f croissante sur I , i.e

$$\forall x, y \in I, (x \leq y) \implies (f(x) \leq f(y)).$$

Soit x un point intérieur à I . Si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de points de $I \cap] -\infty, x[$ convergeant vers x , cette suite est minorée et la suite $(\inf_{k \geq n} x_k)_{n \geq 0}$ est une suite croissante convergeant aussi vers x . Du fait que f est croissante, la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ est minorée (au delà d'un seuil N_0) par la suite $(f(\inf_{k \geq n} x_k))_{n \geq N_0}$, qui, elle, est une suite croissante convergeant vers $f(x_-) := \sup\{f(\xi) ; \xi \in I \cap] -\infty, x[\}$; comme la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ est aussi majorée par $f(x_-)$, elle converge vers ce nombre.

Si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de points de $I \cap]x, +\infty[$ convergeant vers x , cette suite est majorée et la suite $(\sup_{k \geq n} x_k)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante convergeant aussi vers x . Du fait que f est croissante, la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ est majorée (au delà d'un seuil N_0) par la suite $(f(\sup_{k \geq n} x_k))_{n \geq N_0}$, qui, elle, est une suite décroissante convergeant vers $f(x_+) := \inf\{f(\xi) ; \xi \in I \cap]x, +\infty[\}$; comme la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ est aussi minorée par $f(x_+)$, elle converge vers ce nombre.

Les limites à gauche et à droite en x existent donc bien et valent respectivement $f(x_-) := \sup\{f(\xi) ; \xi \in I \cap] -\infty, x[\}$ et $f(x_+) := \inf\{f(\xi) ; \xi \in I \cap]x, +\infty[\}$. Le point x est un point de discontinuité de première espèce.

Si f est croissante sur $[a, b]$, appelons, pour chaque discontinuité (forcément de première espèce) x de f dans $]a, b[$, la quantité

$$|f(x_+) - f(x_-)| = f(x_+) - f(x_-) > 0$$

saut de discontinuité $s(f, x)$ de f au point x . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si x_1, \dots, x_p sont p points de $]a, b[$ en lesquels le saut de discontinuité de f dépasse $1/n$, on a, du fait de la croissance de f :

$$f(b) - f(a) \geq \sum_{j=1}^p s(f, x_j) \geq \frac{p}{n},$$

donc $p \leq n(f(b) - f(a))$. Il n'y a donc au plus que $E(n(f(b) - f(a)))$ (c'est-à-dire en tout cas au plus un nombre fini) de points de discontinuité de f en lesquels le saut de discontinuité est au moins égal à $1/n$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il n'y a bien qu'un ensemble au plus dénombrable de points de discontinuité pour la fonction croissante f sur $]a, b[$. Le même raisonnement s'applique lorsque f est décroissante sur le segment $[a, b]$. \square

2.3.4. Algorithme de dichotomie et théorème des valeurs intermédiaires. Si f est une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs réelles, vous avez observé heuristiquement au lycée qu'il est possible de tracer son graphe d'un seul trait de plume, sans avoir à relever le stylo. Il en est par conséquent de même pour le tracé de la trajectoire

$$t \in I \mapsto x(t) + iy(t) = z(t) \in \mathbb{C},$$

lorsque $t \in I \mapsto x(t)$ et $t \in I \mapsto y(t)$ sont deux fonctions continues sur I . C'est sous cette forme que vous avez formulé en Terminale, puis en MIS101, le très important *Théorème des Valeurs Intermédiaires* (TVI). On pourrait le décliner suivant bien d'autres formulations, par exemple : si l'on souhaite se rendre par voie terrestre de Paris à Berlin, d'un point du territoire français en un point du territoire allemand, en ne traversant qu'au plus une frontière, il faudra inévitablement franchir un jour ou l'autre un poste frontière franco-allemand.

Voici l'énoncé du théorème :

THEOREME 2.1 (Théorème des Valeurs Intermédiaires). *Soit I un intervalle de \mathbb{R} (non réduit à un point) et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I . Alors, si $a < b$ sont deux points quelconques distincts de I , le segment d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$ reste entièrement dans $f(I)$.*

Mieux : pour tout nombre réel c (s'il en existe) tel que l'on ait

$$(2.5) \quad (f(a) - c)(f(b) - c) < 0$$

(ce qui signifie que c est dans l'intervalle ouvert d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$ si toutefois cet intervalle est non vide, i.e. si $f(a) \neq f(b)$), il existe au moins une solution $\xi \in]a, b[$ de l'équation $f(\xi) - c = 0$.

Un théorème mathématique ne présente qu'un intérêt fort limité s'il ne se double pas d'une preuve « algorithmique ». Ce qui fait la force de certains grands résultats en mathématiques est que leur preuve se fonde sur une démarche algorithmique. C'est précisément le cas pour le TVI, dont la preuve repose sur le célèbre (élémentaire, mais puissant) *algorithme de dichotomie*. Le théorème du point fixe (cf. l'exemple

1.12 dans \mathbb{C}) fournit un autre exemple de tel théorème mathématique (« il existe un unique point fixe ») assorti d'une preuve algorithmique.

DÉMONSTRATION. On peut supposer que $f(a)$ et $f(b)$ sont différents ; sinon en effet le segment joignant $f(a)$ et $f(b)$ se réduirait au singleton $\{f(a)\} \subset f(I)$ et la conclusion⁷ du TVI serait dans ce cas assurée. Soit donc un nombre c (il en existe bien) à l'intérieur du segment d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$. On introduit ensuite la fonction $F = F_c : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) := f(x) - c$ pour tout $x \in I$. On a par hypothèses $F(a)F(b) < 0$ puisque c se trouve strictement entre $f(a)$ et $f(b)$. Voici le synopsis de l'algorithme que l'on lance, initié en a et b , itéré ici N fois.

```

fonction x=dichot(a,b,N);
x1= a ;
x2= b;
for i=1:N
  y=(x1+x2)/2;
  u=F(x1)*F(y);
  if u <= 0
    x1=x1;
    x2=y;
  else
    x1=y;
    x2=x2;
  end
end
x=x2

```

Expliquons les premières itérations. On calcule la valeur de F au milieu $y = (a+b)/2$ du segment $[a, b]$, puis on calcule ensuite $F(a)F(y)$. On a l'alternative (**if** ... **else**) suivante.

- Si ce nombre $F(a)F(y)$ est négatif ou nul⁸, alors on recommence l'opération avec a et y en place de a et b car on pense qu'il est plus judicieux de chercher ξ entre a et y qu'entre y et b , puisque ce sont $F(a)$ et $F(y)$ qui sont de signes opposés (alors que $F(y)$ et $F(b)$ sont, eux, de même signe).
- Si ce nombre $F(a)F(y)$ est strictement positif, alors on recommence l'opération avec y et b en place de a et b car on pense qu'il est plus judicieux de chercher ξ entre y et b qu'entre a et y , puisque ce sont cette fois $F(y)$ et $F(b)$ qui sont de signes opposés (alors que $F(a)$ et $F(y)$ sont, eux, de même signe).

On poursuit de la sorte (N fois). On dispose ainsi d'une suite de segments emboîtés : $[a, b]$, $[a, y]$ ou $[y, b]$, etc. Le diamètre de ces segments tend vers 0 puisque la longueur du p -ième segment vaut $(b - a)/2^p$. D'après la propriété des segments emboîtés (Proposition 1.5), l'intersection de tous ces segments emboîtés successifs $[a_p, b_p]$, $p \geq 0$, contient un unique point ξ . Ce point ξ est, notons le, la limite de la suite

7. La première assertion, puisque dans ce cas la seconde assertion est vide de sens, vu qu'il ne saurait exister si $f(a) = f(b) = c$ tel que l'on puisse avoir (2.5).

8. Le trouver nul tiendrait en fait du miracle du point de vue informatique, car il y a toujours une imprécision numérique due à l'erreur machine. Mais, si ce miracle se produisait, on aurait gagné car $y = (a+b)/2$ vérifierait alors $F(y) = 0$, i.e. $f(y) = c$. Inutile dans ce cas de faire tourner l'algorithme plus longtemps.

$(x_N)_{N \geq 1}$ de nombres fournis par l'algorithme lorsque le nombre d'itérations N tend vers $+\infty$. Les signes de F aux extrémités a_p et b_p du p -ième segment sont opposés par construction. Quitte à permuter a_p et b_p , on peut supposer que $F(a_p) \geq 0$ et $F(b_p) \leq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Or les suites $(a_p)_{p \geq 0}$ et $(b_p)_{p \geq 0}$ convergent toutes deux vers ξ (puisque ξ, a_p, b_p sont dans le même segment d'extrémités a_p et b_p de longueur $(b - a)/2^p$). Comme F est (comme f) continue en ξ , on a

$$F(\xi) = \lim_{p \rightarrow +\infty} F(a_p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} F(b_p) \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \end{pmatrix} = 0.$$

On a bien trouvé $\xi \in]a, b[$ tel que $f(\xi) = c$. On a même réalisé, cerise sur le gâteau, une approche asymptotique de ξ comme limite d'une suite construite algorithmiquement. La preuve du TVI se double donc bien d'une démarche algorithmique tout-à-fait constructive. \square

COROLLAIRE 2.1. *Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue sur un intervalle I de \mathbb{R} , l'image $f(I)$ est aussi un intervalle.*

DÉMONSTRATION. Si u et v sont deux points de $f(I)$ et que x et y sont des antécédents respectifs de u et v ($u = f(x)$, $v = f(y)$), le segment d'extrémités $f(x) = u$ et $f(y) = v$ est, d'après le TVI, inclus dans $f(I)$. L'image $f(I)$ est donc bien un intervalle de \mathbb{R} . \square

EXEMPLE 2.4 (monotonie et continuité). *Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone sur I . La fonction f est continue si et seulement si l'image $f(I)$ est un intervalle.* En effet, si f est continue, $f(I)$ est un intervalle (d'après le corollaire 2.1). D'autre part, la présence d'une discontinuité (automatiquement de première espèce d'après la Proposition 2.2) pour f en un point x de I implique que l'intervalle ouvert d'extrémités $f(x_-)$, $f(x_+)$ ne contient aucun point de $f(I)$; or cet intervalle ouvert est contenu dans tout segment d'extrémités $f(x')$ et $f(x'')$, où $x' \in I \cap]-\infty, x[$ et $x'' \in I \cap]x, +\infty[$; $f(I)$ n'est donc jamais un intervalle lorsque la fonction monotone f n'est pas continue.

EXEMPLE 2.5 (point fixe d'une fonction continue d'un segment dans lui-même). Si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une fonction continue, il existe toujours au moins un point $\xi \in [0, 1]$ invariant sous l'action de f , *i.e.* tel que $f(\xi) = \xi$. En effet, regardons la fonction continue $x \in [0, 1] \mapsto F(x) = f(x) - x$. On a $F(0) = f(0) \in [0, 1]$, donc $F(0) \geq 0$. D'autre part $F(1) = f(1) - 1 \leq 0$ puisque $f(1) \in [0, 1]$. Deux cas sont à envisager :

- si $F(0)F(1) = 0$, alors soit $F(0) = 0$, auquel cas $\xi = 0$ convient, soit $F(1) = 0$, auquel cas $\xi = 1$ convient ;
- si $F(0)F(1) \neq 0$, on a nécessairement $F(0)F(1) < 0$; 0 est alors strictement entre $F(0)$ et $F(1)$ et le TVI assure qu'il existe alors $\xi \in]0, 1[$ tel que $F(\xi) = 0$, *i.e.* $f(\xi) = \xi$.

Quelque soit donc le cas envisagé, on a bien exhibé un réel ξ invariant sous l'action de f .

2.3.5. Extréma d'une fonction continue réelle sur un segment $[a, b]$.

Lorsque I est un segment $[a, b]$, le Corollaire 2.1 du TVI peut être précisé ainsi :

THEOREME 2.2 (réalisation des extréma pour une fonction continue réelle sur un segment). *Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue*

sur ce segment. La fonction f est majorée et minorée sur $[a, b]$. De plus, si l'on pose $m := \inf\{f(x); x \in [a, b]\}$ et $M := \sup\{f(x); x \in [a, b]\}$, on a $f([a, b]) = [m, M]$.

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que l'ensemble

$$B := \{f(x); x \in [a, b]\}$$

est un sous-ensemble de \mathbb{R} à la fois majoré et minoré, c'est-à-dire un sous-ensemble de \mathbb{R} borné en valeur absolue. On prouve ceci par l'absurde. Si ce n'était pas le cas, on pourrait, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, trouver un point $x_n \in [a, b]$ tel que $|f(x_n)| \geq n$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß dans \mathbb{R} (Théorème 1.1), la suite (bornée en valeur absolue car constituée de nombres tous « piégés » dans $[a, b]$) $(x_n)_{n \geq 0}$ admettrait au moins une valeur d'adhérence $l \in \mathbb{R}$. Il existerait donc une suite extraire $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ de cette suite convergeant vers l . Le point l serait donc un point adhérent à $[a, b]$; comme $[a, b]$ est fermé, on aurait $l \in [a, b]$. Comme la fonction f est continue en l , on devrait avoir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l) \in \mathbb{R}.$$

Or, par construction même de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$, on a

$$|f(x_{\varphi(n)})| \geq \varphi(n) \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La suite $(|f(x_{\varphi(n)})|)_{n \geq 0}$ ne saurait à la fois tendre vers $|l| \in \mathbb{R}$ et vers $+\infty$. L'hypothèse faite était donc absurde et l'ensemble B est donc à la fois minoré et majoré. Il admet donc une borne inférieure m et une borne supérieure M .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M - 1/n$ n'est plus un majorant de B , $m + 1/n$ n'est plus un minorant de B (du fait des définitions de M et m respectivement comme plus petit majorant de B et plus grand minorant de B). Il existe donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, deux nombres x_n et y_n dans $[a, b]$ tels que

$$(2.6) \quad M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M \quad \text{et} \quad m \leq f(y_n) < m + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß réel (Théorème 1.1 encore) on peut extraire des sous-suites $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ et $(y_{\psi(n)})_{n \geq 1}$ respectivement convergentes vers des nombres ξ et η de $\overline{[a, b]} = [a, b]$. Comme f est continue en ξ et η , on a

$$(2.7) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(\xi) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_{\psi(n)}) = f(\eta).$$

Mais l'on a aussi, d'après (2.6) et le principe des « gendarmes » :

$$(2.8) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = M \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_{\psi(n)}) = m.$$

On a donc, grâce à (2.7) et (2.8), $M = f(\xi)$ et $m = f(\eta)$. On avait déjà l'inclusion $f([a, b]) \subset [m, M]$ puisque m et M sont les bornes de B . Le fait que l'on ait égalité entre ces deux ensembles $f([a, b])$ et $[m, M]$ résulte maintenant du TVI (Théorème 2.1 avec les points ξ et η en place de x et y). \square

DÉFINITION 2.8 (extréma d'une fonction réelle continue sur un segment). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment de \mathbb{R} . On dit que f admet (ou réalise) un extrémum en un point $\xi \in [a, b]$ si $f(\xi) \in \{m, M\}$, où $M := \sup_{[a, b]} f$ et $m := \inf_{[a, b]} f$. Si $f(\xi) = M$, alors on dit que f réalise un *maximum* au point ξ (M étant alors la *valeur de ce maximum*); si $f(\xi) = m$, on dit que f réalise un *minimum* au point ξ (m étant alors la *valeur de ce minimum*).

REMARQUE 2.5. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée en valeur absolue, mais non continue sur $[a, b]$, il n'y a aucune raison que les bornes $M := \sup_{[a,b]} f$ et $m := \inf_{[a,b]} f$ soient atteintes en des points de $[a, b]$. Par exemple, si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \forall x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ et } x = 1, \end{cases}$$

on a $M = 1$ et $m = -1$, mais aucune de ces deux bornes n'est atteinte sur $[0, 1]$ par la fonction f .

REMARQUE 2.6 (fonctions continues sur un segment de \mathbb{R} , à valeurs complexes). Toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} est bornée en module sur ce segment. De plus, l'ensemble des points $\xi \in [a, b]$ tels que l'on ait $|f(\xi)| = \sup_{[a,b]} |f|$ est non vide (il suffit de raisonner avec la fonction continue positive $x \mapsto |f(x)|$ et d'appliquer à cette fonction le Théorème 2.2). Si de plus f ne s'annule pas sur $[a, b]$, on a $\min_{[a,b]} |f| > 0$ et l'ensemble des points $\eta \in [a, b]$ tels que $|f(\eta)| = \min_{[a,b]} |f|$ est non vide.

2.3.6. Continuité, injectivité et monotonie. On rappelle qu'une application $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est *injective* si et seulement si

$$\forall x \in A, \forall y \in A, (f(x) = f(y)) \implies (x = y).$$

Le TVI (Théorème 2.1) implique le résultat suivant.

PROPOSITION 2.3 (continuité et injectivité). *Si I est un intervalle de \mathbb{R} (non réduit à un point), toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui est à la fois continue sur I et injective est nécessairement strictement monotone (strictement croissante ou strictement décroissante) et réalise donc une application bijective entre I et l'intervalle $f(I)$; la fonction inverse⁹ $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ est alors également continue sur $f(I)$.*

DÉMONSTRATION. Soient $a < b$ deux points distincts de I . Comme f est injective, on a soit $f(a) < f(b)$, soit $f(a) > f(b)$. Supposons pour fixer les idées que l'on soit dans le premier cas et montrons alors que f est nécessairement strictement croissante sur $[a, b]$. Si ce n'était pas le cas, il existerait x et y dans $[a, b]$ tels que $a \leq x < y \leq b$ et $f(x) > f(y)$. Si $f(x) < f(a)$, la fonction $f - f(a)$, continue sur $[x, b]$, serait strictement négative en x et strictement positive en b ; elle devrait d'après le TVI s'annuler en un point $\xi \in]x, b[$, ce qui est impossible puisque le fait que $f(a) = f(\xi)$ et que $\xi \neq a$ contredirait l'injectivité de f ; on a donc nécessairement $f(x) \geq f(a)$. Si $f(y) > f(b)$, la fonction $f - f(b)$, continue sur $[a, y]$, serait strictement négative en a et strictement positive en y ; elle devrait d'après le TVI s'annuler en un point $\eta \in]a, y[$, ce qui est impossible puisque le fait que $f(b) = f(\eta)$ et que $\eta \neq b$ contredirait l'injectivité de f ; on a donc nécessairement $f(y) \leq f(b)$. On aurait donc $f(x) \geq f(a)$, $f(y) \leq f(b)$ et $f(x) > f(y)$. Les segments $[f(a), f(x)]$ et $[f(y), f(b)]$ auraient donc une intersection non vide, contenant un nombre réel u . D'après le TVI, il existerait $v \in [a, x]$ et $w \in [y, b]$ tels que $f(v) = f(w) = u$, ce qui contredirait encore l'injectivité de f puisque $a \leq v \leq x < y \leq w \leq b$. La fonction f est donc strictement croissante sur le segment $[a, b]$. Ainsi, la fonction f est strictement monotone sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I . Le sens de stricte monotonie (croissance ou décroissance) est le

9. Définie par : $((x \in I) \text{ et } (f(x) = y)) \iff ((y \in f(I)) \text{ et } (x = f^{-1}(y)))$, cf. le cours de MIS101 [Ymis].

même sur deux segments $[a, b]$ et $[a', b']$ inclus l'un dans l'autre. En conséquence f est strictement monotone (strictement croissante ou décroissante) sur tout l'intervalle I .

L'application f^{-1} est aussi strictement monotone sur $f(I)$ puisque l'assertion (ici dans le cas de stricte croissance)

$$\forall x, y \in I, \quad (x < y) \iff (f(x) < f(y))$$

se lit aussi

$$\forall u, v \in f(I), \quad (f^{-1}(u) < f^{-1}(v)) \iff (u < v).$$

On en déduit (*cf.* l'exemple 2.4) que f^{-1} est continue sur l'intérieur de l'intervalle $f(I)$ puisque l'image par f^{-1} de cet intervalle ouvert est l'intérieur de I (qui est aussi un intervalle). La fonction f^{-1} est aussi continue aux bornes de $f(I)$ appartenant à $f(I)$: une telle borne est en effet l'image par f d'une borne a de I appartenant à I . Dire qu'une suite de points $(x_n)_{n \geq 0}$ de I converge de manière monotone vers a équivaut alors à dire que la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ converge de manière monotone vers $f(a)$ d'après la stricte monotonie de f et le lemme des gendarmes. La fonction f^{-1} est donc bien continue en tout point de l'intervalle complet $f(I)$. \square

REMARQUE 2.7 (Attention ! surtout ne pas confondre les notions de « bijection entre deux intervalles » et de « fonction continue d'un intervalle dans un autre »). La formulation du TVI en Terminale incite certes parfois à une confusion entre les deux notions de nature tout-à-fait différentes que sont la notion de « bijection entre deux intervalles » d'une part (notion ensembliste) et celle de « fonction continue d'un intervalle sur son image » d'autre part (notion plus proprement « fonctionnelle »). Une fonction continue sur un intervalle de \mathbb{R} ne réalise en général en aucune manière une bijection entre I et son image $f(I)$ (elle est surjective bien sûr, mais en général non injective) : si tel est le cas, f se doit d'être strictement monotone (*cf.* la Proposition 2.3). Ceci ne se produit donc que dans le cas très particulier des fonctions strictement monotones.

REMARQUE 2.8 (Attention ! encore un autre piège). On a aussi parfois tendance à penser¹⁰ que, si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un intervalle de \mathbb{R} , alors le fait que $f(I)$ soit un intervalle (*i.e.* que f satisfasse au TVI) implique la continuité de f . Ici encore, il n'en est rien (ce n'est vrai, encore une fois, que si f est monotone, *cf.* l'exemple 2.4). Par exemple, la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \sin(1/|x|) \quad \text{si} \quad x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$$

(voir le graphe sur la figure 2.1, figure de droite) est bien telle que $f(I) = [-1, 1]$ soit un intervalle, mais elle présente pourtant une discontinuité (de seconde espèce) en $x = 0$. Vous verrez même plus tard que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} , la fonction dérivée $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie toujours le TVI, qu'elle soit continue ou non (c'est un célèbre résultat du à Gaston Darboux, voir l'exercice A.65 dans l'annexe A).

¹⁰. C'est d'ailleurs sans doute là l'une des raisons de la confusion mentionnée plus haut dans la Remarque 2.7.

2.3.7. Continuité uniforme et théorème de Heine. Si $A \subset \mathbb{R}$ et f est une fonction de A dans \mathbb{C} , dire que f est continue sur A équivaut à dire, on l'a vu au tout début de la section 2.3.2, que f est continue en tout point de A . Ceci s'exprime, en utilisant le critère (2.2) :

$$(2.9) \quad \forall a \in A, \forall \epsilon > 0, \exists \eta = \eta(a, \epsilon) > 0, \text{ tel que} \\ (x \in A \text{ et } |x - a| < \eta) \implies (|f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

L'ordre des quantificateurs logiques est ici très important à respecter. On peut toutefois naturellement se demander s'il est possible de permuter dans (2.9) les quantificateurs $\forall a \in A$ et $\exists \eta = \eta(a, \epsilon) > 0$, ce qui donnerait

$$(2.10) \quad \forall \epsilon > 0, \exists \eta = \eta(\epsilon) \text{ tel que} \\ \forall a \in A, (x \in A \text{ et } |x - a| < \eta) \implies (|f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

On voit immédiatement que l'assertion (2.10) implique l'assertion (2.9). Mais ces deux assertions ne sont pas en général équivalentes : considérons par exemple le cas où $A = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = n + 1/n$ et $a_n = n$. On a $|x_n - a_n| = 1/n$ et $|f(x_n) - f(a_n)| = (n + 1/n)^2 - n^2 = 2 + 1/n^2 \geq 2$. Ceci met en défaut le critère (2.10), alors que le critère (2.9) est rempli puisque la fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur \mathbb{R} . Le critère (2.10) est donc plus fort que le critère (2.9). Ceci nous conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 2.9 (continuité uniforme d'une fonction sur un sous-ensemble de \mathbb{R}). Soit A un sous-ensemble de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur A . On dit que f est *uniformément continue sur A* si et seulement si f satisfait au critère (2.10), autrement dit, en utilisant les notations plus symétriques x, y plutôt que a, x ,

$$(2.11) \quad \forall \epsilon > 0, \exists \eta = \eta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in A, (|x - y| < \eta) \implies (|f(x) - f(y)| < \epsilon).$$

EXEMPLE 2.6 (module de continuité uniforme pour une fonction de A dans \mathbb{C}). S'il existe $0 < \epsilon_0 \leq +\infty$ et une fonction $\omega : [0, \epsilon_0[\rightarrow [0, +\infty[$, nulle en 0 et continue en ce point, telle que de plus

$$(2.12) \quad \forall x \in A, \forall y \in A, (|x - y| < \epsilon_0) \implies (|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)),$$

alors f est uniformément continue sur A . Une telle fonction ω est dite *module de continuité uniforme* pour f sur A . Par exemple, toute fonction $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ telle qu'il existe des constantes $0 < \epsilon_0 \leq +\infty$, $C > 0$ et $\alpha > 0$ de manière à ce que

$$\forall x \in A, \forall y \in A, (|x - y| < \epsilon_0) \implies (|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha)$$

est uniformément continue sur A . Le module de continuité uniforme à choisir dans ce cas est la fonction $h \in [0, \epsilon_0[\mapsto Ch^\alpha$. La fonction $x \mapsto \sin x$ est uniformément continue sur \mathbb{R} puisque

$$\sin(x + h) - \sin x = 2 \sin(h/2) \cos(x + h/2) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R},$$

et que par conséquent

$$|\sin(x + h) - \sin x| \leq 2 |\sin(h/2)| \leq |h|.$$

puisque $|\sin u| \leq |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. La fonction $h \in [0, +\infty[\mapsto h$ est dans ce cas un module de continuité uniforme pour la fonction \sin sur \mathbb{R} .

Dans le cas particulier où A est un sous-ensemble fermé et borné (*i.e.* compact) de \mathbb{R} (par exemple un segment $[a, b]$), continuité et continuité uniforme sont deux notions équivalentes pour une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. On a en effet le théorème suivant, dû à l'analyste allemand Eduard Heine (1821-1881).

THEORÈME 2.3 (théorème de Heine). *Si A est un sous-ensemble fermé et borné (*i.e.* compact) de \mathbb{R} (par exemple un segment $[a, b]$), toute fonction $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur A est automatiquement uniformément continue sur ce même ensemble.*

DÉMONSTRATION. Supposons que f soit continue sur A et nions le fait qu'elle soit uniformément continue sur cet ensemble. La négation de l'assertion (2.11) s'écrit :

$$\exists \epsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x, y \in A \text{ tels que } (|x - y| < \eta) \text{ et } (|f(x) - f(y)| \geq \epsilon).$$

On utilise ici le fait que :

$$\begin{aligned} & \neg \left[\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \forall y \in A, [(P) \implies (Q)] \right] \\ & \iff \left[\exists \epsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in A, \exists y \in A, [(P) \wedge (\neg Q)] \right] \end{aligned}$$

(voir le cours de MIS101, *cf.* [Ymis], section 1.2). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut donc trouver des nombres x_n, y_n dans A , tels que l'on ait $|x_n - y_n| < 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. La suite $(x_n + iy_n)_{n \geq 1}$ admet, comme suite bornée de nombres complexes, une valeur d'adhérence $l = l_1 + il_2 \in \mathbb{C}$ (d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, Théorème 1.2). Il existe donc des suites extraites $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ et $(y_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ (respectivement des suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$), convergeant toutes deux dans \mathbb{R} , la première vers $l_1 = \operatorname{Re} l$, la seconde vers $l_2 = \operatorname{Im} l$. Les nombres réels l_1 et l_2 sont donc dans \overline{A} , donc dans A puisque A est fermé ($A = \overline{A}$). Comme $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| < 1/\varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $l_1 = l_2$ en faisant tendre n vers $+\infty$ et en passant à la limite. Mais alors, on devrait avoir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_{\varphi(n)}) = f(l_1) = f(l_2)$$

puisque f est par hypothèses continue en tout point de A , donc en particulier en $l_1 = l_2$. Ceci est contradictoire avec le fait que

$$|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(le membre de gauche devrait tendre vers 0 lorsque n tend vers l'infini). L'hypothèse faite ici (non continuité uniforme de f sur A) conduit donc à une contradiction avec l'hypothèse de continuité portant sur f en tout point de A , et le théorème de Heine est ainsi prouvé par l'absurde. \square

REMARQUE 2.9. Le théorème de Heine a un rôle clef en analyse. Vous le retrouverez très souvent par la suite (voir les exercices de TD). Son rôle très important aussi en informatique est moins évident à percevoir : on se convainc cependant facilement qu'il est difficile, voire impossible, pour un informaticien de vérifier une assertion logique commençant par « $\forall a \in A, \dots$ », alors que rechercher un module de continuité uniforme $\omega : [0, \epsilon_0[\rightarrow [0, \infty[$ de manière à ce que soit satisfaite (2.12) semble à première vue plus envisageable du point de vue pratique.

2.4. Dérivabilité

Si f est une fonction à valeurs réelles ou complexes définie dans un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant un point x_0 , il est très important du point de vue pratique de pouvoir « approcher » le graphe de la fonction f près de x_0 par celui d'une application affine L_{f,x_0} que l'on qualifiera alors d'« approximante ». Ceci permettra par exemple de calculer de manière approchée $f(x_0 \pm th)$ lorsque $t \in [0, 1]$ et que h sera suffisamment petit (pourvu que cette application affine L_{f,x_0} approximante soit connue), par exemple par

$$\begin{aligned} f(x_0 \pm th) \simeq L_{f,x_0}(x_0 \pm th) &= tL_{f,x_0}(x_0 \pm h) + (1-t)L_{f,x_0}(x_0) \\ &\simeq (1-t)f(x_0 \pm h) + tf(x_0) \quad \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

C'est sur la base de ce principe (dit « *interpolation* ») que sont construites les tables de fonctions numériques. Ceci n'est bien sûr pas toujours possible, même si la fonction f est continue : par exemple, la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$(2.13) \quad x \mapsto \begin{cases} x \sin(1/|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(cf. la figure 2.1, figure de droite) est continue en 0, mais de plus en plus rapidement oscillante lorsque x se rapproche de 0. Le graphe de cette fonction ne saurait être approché par celui d'une application affine $L_{f,0}$ près de $x = 0$, car on est incapable de préciser quelle serait une « pente » pour le graphe de pareille application affine. C'est donc une notion de *régularité* que nous allons introduire dans cette section, notion qui va nous permettre d'éviter de considérer des fonctions aussi pathologiques que celle définie en (2.13).

2.4.1. Dérivabilité (ou différentiabilité) en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.

DÉFINITION 2.10 (dérivabilité d'une fonction f en un point et nombre dérivé de la fonction en ce point). Soit f une fonction à valeurs complexes définie dans un intervalle ouvert I de \mathbb{R} contenant un nombre réel x_0 . On dit que f est *dérivable au point* x_0 si et seulement si la fonction

$$x \in I \setminus \{x_0\} \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{C}$$

(définie dans $I \setminus \{x_0\}$) admet une limite finie $l \in \mathbb{C}$ au point x_0 (qui est bien adhérent à son domaine de définition). Cette limite, si elle existe, est appelée *nombre dérivé*¹¹ de f au point x_0 et notée $f'(x_0)$.

Nous allons formuler différemment cette définition 2.10. Rappelons d'abord qu'une application *affine* $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une application de la forme

$$L = L^{a,b} : x \in \mathbb{R} \mapsto L(x) = ax + b,$$

où a et b sont deux nombres complexes. Lorsque $b = 0$, on dit que $L = L^{a,0}$ est une application *\mathbb{R} -linéaire* de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . Les applications affines de \mathbb{R} dans \mathbb{C} héritent de la propriété suivante (qui d'ailleurs les caractérise) :

$$(2.14) \quad \forall x, y, x_0, y_0 \in \mathbb{R}, \quad (y_0 - x_0)(L(y) - L(x)) = (y - x)(L(y_0) - L(x_0)).$$

¹¹. Le terme originel proposé par Newton, qui avait en ligne de mire les calculs de « vitesse », était celui de *fluxion*. On parlait alors des *fluxions* des quantités (pour parler de dérivées) et de *calcul fluxionnel*.

Les applications \mathbb{R} -linéaires de \mathbb{R} dans \mathbb{C} sont les applications affines de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telles que $L(0) = 0$. Dire que L est une application affine de \mathbb{R} dans \mathbb{R} équivaut à dire que son graphe est une droite, dont le nombre réel a représente alors la *pen*t.

PROPOSITION 2.4 (application affine tangente, différentielle en un point $x_0 \in \mathbb{R}$). *Soit f une fonction à valeurs complexes définie dans un intervalle ouvert I de \mathbb{R} contenant un nombre réel x_0 . La fonction f est dérivable au point x_0 si et seulement si il existe une (nécessairement unique) application affine $L_{f,x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et une (nécessairement unique) fonction $\epsilon_{f,x_0} : I \rightarrow \mathbb{C}$, continue en x_0 , telles que*

$$(2.15) \quad \forall x \in I, f(x) = L_{f,x_0}(x) + (x - x_0)\epsilon_{f,x_0}(x) \quad \text{et} \quad \epsilon_{f,x_0}(x_0) = 0.$$

Lorsque f est dérivable en x_0 , l'application L_{f,x_0} ainsi définie est appelée *application affine tangente* à f au point x_0 , tandis que l'application \mathbb{R} -linéaire $df_{x_0} : h \rightarrow L_{f,x_0}(x_0 + h) - L_{f,x_0}(x_0)$ est appelée *différentielle* de f en x_0 .

DÉMONSTRATION. Si f est dérivable au point x_0 , la fonction

$$\tau_{f,x_0} : x \in I \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est une fonction continue en x_0 , dite *taux de variation de f autour de x_0* . On pose alors :

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \epsilon_{f,x_0}(x) &:= \tau_{f,x_0}(x) - f'(x_0) \quad \forall x \in I \\ L_{f,x_0}(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On constate qu'avec ce choix, on a bien (2.15), c'est-à-dire :

$$(2.17) \quad \forall x \in I, f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon_{f,x_0}(x).$$

Ce choix est d'ailleurs l'unique choix possible si l'on veut que ϵ_{f,x_0} et L_{f,x_0} réalisent (2.15).

Réciproquement, s'il existe une fonction $\epsilon_{f,x_0} : I \rightarrow \mathbb{C}$, continue en x_0 , et une application affine $L_{f,x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que l'on ait (2.15), on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_{f,x_0},$$

si $L_{f,x_0}(x) = a_{f,x_0}x + b_{f,x_0}$. La fonction f est donc bien dans ce cas dérivable en x_0 et l'on a en fait $a_{f,x_0} = f'(x_0)$ et $b_{f,x_0} = f(x_0)$. \square

REMARQUE 2.10 (dérivable en x_0 ou différentiable en x_0 ?). Plutôt que de dire : « une fonction à valeurs complexes f est *dérivable* en un point x_0 au voisinage duquel elle est définie », on préfère, au vu de la Proposition 2.4, dire : « f est *différentiable* au point x_0 ». Sa différentielle

$$df_{x_0} : h \in \mathbb{R} \mapsto f'(x_0)h$$

présentera en effet plus d'intérêt du point de vue pratique que le nombre dérivé $f'(x_0)$ lui-même (même s'il s'agit en fait de la même chose !). L'application qui est couplée avec la différentielle df_{x_0} est l'application affine tangente

$$h \in \mathbb{R} \mapsto f(x_0) + hf'(x_0).$$

On peut reformuler alors (2.15) (si f est différentiable en x_0 , de différentielle df_{x_0}) en disant que, pour h dans l'intervalle ouvert $I_{x_0} = -x_0 + I$ (I translaté de $-x_0$) contenant cette fois 0 dans son intérieur,

$$(2.18) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\tilde{\epsilon}_{x_0}(h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + h\tilde{\epsilon}_{x_0}(h),$$

où $\tilde{\epsilon}_{x_0}$ est une fonction $I_{x_0} \rightarrow \mathbb{C}$, nulle en 0 et continue en ce point. Cette formulation (2.18) s'avère dans la pratique la plus utile.

On remarque que la différentiabilité en un point implique la continuité en ce point :

PROPOSITION 2.5 (la différentiabilité en un point implique la continuité en ce point). *Soit f une fonction à valeurs complexes définie dans un intervalle ouvert I de \mathbb{R} contenant un nombre réel x_0 . Si f est différentiable en x_0 , f est continue en x_0 . Si f est différentiable en x_0 et continue sur I tout entier, la fonction $\tilde{\epsilon}_{x_0} : I_{x_0} = -x_0 + I \rightarrow \mathbb{C}$ impliquée dans (2.18) est continue sur I_{x_0} .*

REMARQUE 2.11 (Attention!). Si une fonction f à valeurs complexes est définie au voisinage (ouvert) d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, la continuité de f en x_0 n'implique nullement sa différentiabilité en x_0 (comme le montre l'exemple 2.13).

DÉMONSTRATION. Pour la première assertion, on utilise la formulation (2.18) de la différentiabilité de f en x_0 . Par définition même, la fonction $h \rightarrow \tilde{\epsilon}_{x_0}(h)$ est continue en $h = 0$. La fonction $h \rightarrow h\tilde{\epsilon}_{x_0}(h)$ est donc continue en 0 en étant de plus nulle en ce point comme produit de fonctions continues en 0. Comme la fonction \mathbb{R} -linéaire df_{x_0} est continue sur \mathbb{R} tout entier, la fonction

$$h \mapsto f(x_0 + h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + h\tilde{\epsilon}_{x_0}(h)$$

est continue en 0, ce qui signifie que f est continue en x_0 . Pour ce qui est de la seconde assertion, il suffit d'observer que la fonction

$$h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \tilde{\epsilon}_{x_0}(h)$$

est continue sur $I_{x_0} \setminus \{0\}$ (comme quotient de fonctions continues) et d'ajouter à cette information le fait qu'elle soit aussi continue en 0. \square

2.4.2. Interprétation géométrique de la différentiabilité en un point.

Il est important aussi de donner (en distinguant le cas où f est à valeurs dans \mathbb{R} de celui où f est à valeurs dans \mathbb{C}) une *interprétation géométrique* de la différentiabilité en un point.

Plaçons nous d'abord dans le cas où f est à valeurs réelles. La situation est illustrée dans ce cas par la figure 2.2.

PROPOSITION 2.6 (différentiabilité en un point et tangente géométrique ; le cas réel). *Soit f une fonction à valeurs réelles définie dans un intervalle ouvert I de \mathbb{R} contenant un nombre réel x_0 . Pour $x \in I \setminus \{x_0\}$, le nombre*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

représente la pente de la droite $D_{x_0, x}$ du plan \mathbb{R}^2 (rapporté aux coordonnées (X, Y)) joignant les deux points distincts $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ du graphe

$$\Gamma(f) := \{(X, Y) \in I \times \mathbb{R}; Y = f(X)\}$$

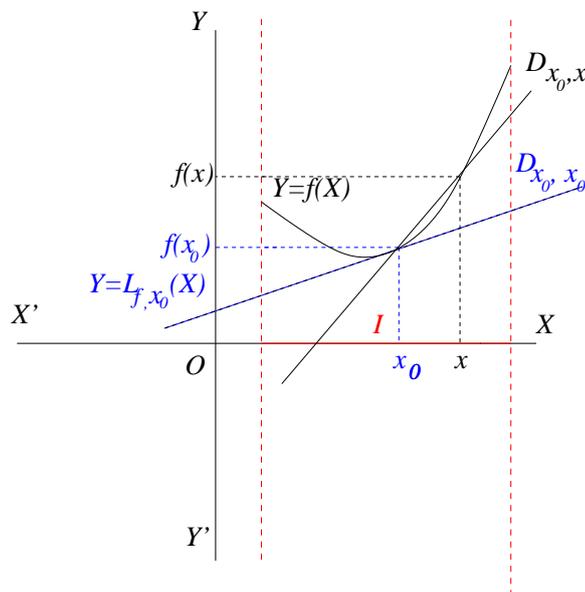


FIGURE 2.2. Interprétation géométrique de la tangente (cas réel)

de l'application f . Si f est différentiable en x_0 , le graphe de l'application linéaire tangente

$$L_{f,x_0} : X \mapsto f(x_0) + df_{x_0}(X - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(X - x_0)$$

(qui est une droite D_{x_0,x_0}) correspond à la position limite de la droite $D_{x_0,x}$ lorsque x tend vers x_0 dans $I \setminus \{x_0\}$. Cette droite D_{x_0,x_0} est appelée tangente géométrique en $(x_0, f(x_0))$ au graphe de f .

DÉMONSTRATION. L'équation de la droite $D_{x_0,x}$ dans le plan \mathbb{R}^2 rapporté au repère orthonormé $((0, 0); \vec{i}, \vec{j})$ est en effet (exprimée en les coordonnées cartésiennes X et Y) :

$$Y = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (X - x_0).$$

Lorsque x tend vers x_0 dans $I \setminus \{x_0\}$, cette droite passe toujours par le point $(x_0, f(x_0))$ et sa pente tend vers $f'(x_0)$, qui est précisément la pente du graphe de l'application affine tangente L_{f,x_0} . \square

Dans le cas complexe, les choses se présentent différemment. La situation est illustrée dans ce cas par la figure 2.3.

PROPOSITION 2.7 (différentiabilité en un point et tangente géométrique ; le cas complexe). Soit f une fonction à valeurs réelles définie dans un intervalle ouvert I de \mathbb{C} contenant un nombre réel x_0 , dérivable en x_0 et de nombre dérivé $f'(x_0) \in \mathbb{C}$ non nul¹². Il existe alors $\eta_{x_0} > 0$ tel que

$$(2.19) \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}, \quad |x - x_0| < \eta_{x_0} \implies f(x) \neq f(x_0).$$

12. On dit que la courbe paramétrée présente alors un point régulier lorsque le paramètre x prend la valeur x_0 . On reviendra dans la sous-section 2.7.1 sur cette notion.

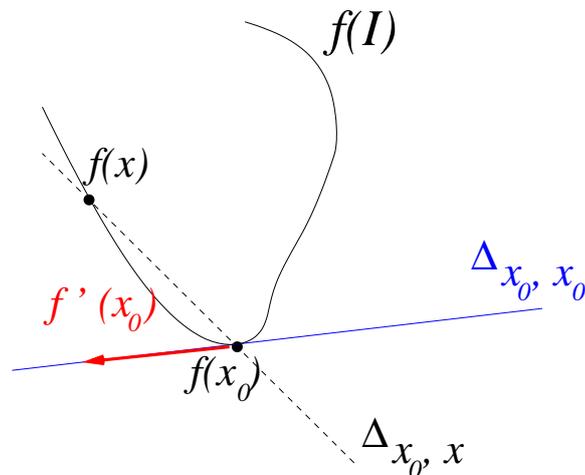


FIGURE 2.3. Interprétation géométrique de la tangente (cas complexe)

De plus, pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \eta_{x_0}$ et $x \neq x_0$, le vecteur $\vec{V}_{x_0, x}$ de \mathbb{R}^2 ayant pour affixe le nombre complexe

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

représente le vecteur directeur de la droite $\Delta_{x_0, x}$ du plan \mathbb{R}^2 passant par les points d'affixe $f(x_0)$ et $f(x)$. Lorsque x tend vers x_0 dans $I \setminus \{x_0\}$, cette droite $\Delta_{x_0, x}$ a comme position limite la droite Δ_{x_0, x_0} passant par le point d'affixe $f(x_0)$ et de vecteur directeur le vecteur d'affixe $f'(x_0)$. La droite Δ_{x_0, x_0} est appelée alors tangente géométrique au point d'affixe $f(x_0)$ à la courbe paramétrée $x \in I \mapsto f(x)$.

DÉMONSTRATION. Il résulte de (2.18) que

$$\forall h \in I_{x_0}, f(x_0 + h) - f(x_0) = h(f'(x_0) + \tilde{\epsilon}_{x_0}(h)).$$

Comme la fonction $\tilde{\epsilon}_{x_0}$ est nulle en $h = 0$ et continue en ce point, il existe $\eta_{x_0} > 0$ tel que

$$|h| \leq \eta_{x_0} \implies |f'(x_0) + \tilde{\epsilon}_{x_0}(h)| \geq |f'(x_0)|/2 > 0.$$

Si $x \in I \setminus \{0\}$ et $|x - x_0| < \eta_{x_0}$, on a donc

$$|f(x) - f(x_0)| \geq |x - x_0| \times |f'(x_0)|/2 > 0,$$

ce qui prouve (2.19). Le vecteur de \mathbb{R}^2 d'affixe $f(x) - f(x_0)$ est bien un vecteur directeur de la droite passant par les points (nécessairement distincts si $x \neq x_0$ et $|x - x_0| < \eta_{x_0}$) d'affixes respectives $f(x_0)$ et $f(x)$. Il en est de même du vecteur de \mathbb{R}^2 d'affixe

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Lorsque x tend vers x_0 en restant distinct de x_0 , ce vecteur tend, puisque f est supposée dérivable en x_0 , vers le vecteur d'affixe $f'(x_0)$. La droite $\Delta_{x_0, x}$ tend donc bien vers une position limite, à savoir la droite Δ_{x_0, x_0} passant par le point d'affixe $f(x_0)$ et dirigée par le vecteur (non nul) d'affixe $f'(x_0)$. \square

2.4.3. Dérivées à gauche et à droite en un point.

DÉFINITION 2.11 (dérivée à droite ou à gauche d'une fonction en un point). Soit f une fonction à valeurs réelles définie dans un intervalle ouvert I de \mathbb{R} contenant un nombre réel x_0 . On dit que f est dérivable à droite en x_0 si la fonction

$$x \in I \setminus \{x_0\} \longmapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite $l_+ \in \mathbb{C}$ à droite¹³ en x_0 . Cette limite, si elle existe, est appelée *nombre dérivé à droite* de f en x_0 et notée $f'_d(x_0)$ ou $f'_+(x_0)$. Dire que f est dérivable à droite en x_0 équivaut à dire que, pour tout $h \in I_{x_0} \cap [0, \infty[$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'_d(x_0)h + h\tilde{\epsilon}_{x_0}^+(h),$$

où la fonction $\tilde{\epsilon}_{x_0}^+ : I_{x_0} \cap [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ est continue et nulle en $h = 0$. De la même manière, on dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la fonction

$$x \in I \setminus \{x_0\} \longmapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite $l_- \in \mathbb{C}$ à gauche en x_0 . Cette limite, si elle existe, est appelée *nombre dérivé à gauche* de f en x_0 et notée $f'_g(x_0)$ ou $f'_-(x_0)$. Dire que f est dérivable à gauche en x_0 équivaut à dire que, pour tout $h \in I_{x_0} \cap]-\infty, 0]$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'_g(x_0)h + h\tilde{\epsilon}_{x_0}^-(h),$$

où la fonction $\tilde{\epsilon}_{x_0}^- :]-\infty, 0] \cap I_{x_0} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et nulle en $h = 0$.

REMARQUE 2.12. Une fonction à valeurs complexes définie dans un intervalle ouvert contenant un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et admettant une dérivée à droite ou à gauche en ce point est nécessairement continue en ce point (suivant le même argument que celui utilisé pour prouver la première assertion de la Proposition 2.5). La fonction f est différentiable en ce point x_0 si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0 , avec de plus $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Lorsqu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet une dérivée à droite en un point x_0 de I , alors, dans le plan XOY , la demi-droite

$$\{(X, Y); Y = f(x_0) + (X - x_0)f'_d(x_0) \text{ et } X \geq x_0\}$$

représente la *demi-tangente à droite* au graphe de f au dessus de I au point $(x_0, f(x_0))$. Cette demi-tangente est la position limite de la demi-droite $D_{x_0, x}^+$ issue de $(x_0, f(x_0))$ et passant par $(x, f(x))$ lorsque x tend vers x_0 dans $I \cap]x_0, +\infty[$.

De même, lorsqu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet une dérivée à gauche en un point x_0 de I , alors, dans le plan XOY , la demi-droite

$$\{(X, Y); Y = f(x_0) + (X - x_0)f'_g(x_0) \text{ et } X \leq x_0\}$$

représente la *demi-tangente à gauche* au graphe de f au dessus de I au point $(x_0, f(x_0))$. Cette demi-tangente est la position limite de la demi-droite $D_{x_0, x}^-$ issue de $(x_0, f(x_0))$ et passant par $(x, f(x))$ lorsque x tend vers x_0 dans $I \cap]-\infty, x_0[$.

Ces notions de dérivabilité à droite (*resp.* à gauche) peuvent aussi être introduites en un point x_0 qui se trouve cette fois être une extrémité gauche (*resp.* droite) d'un intervalle I de \mathbb{R} qui ne serait dans ce cas plus ouvert. Si par exemple $I = [x_0, b[$

13. Voir la définition 2.4.

et que f est une fonction de I dans \mathbb{C} , on dit que f admet une dérivée à droite au point x_0 s'il existe un nombre complexe $f'_d(x_0)$ tel que

$$\forall h \in I_{x_0} \cap [0, \infty[, f(x_0 + h) = f(x_0) + f'_d(x_0)h + h\tilde{\epsilon}_{x_0}^+(h),$$

où la fonction $\tilde{\epsilon}_{x_0}^+ : I_{x_0} \cap [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ est continue et nulle en $h = 0$.

2.4.4. Fonctions convexes réelles sur un intervalle ouvert. Nous profitons de cette section dédiée à la dérivabilité et à la dérivabilité unilatérale en un point x_0 de \mathbb{R} (pour une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant ce point) pour introduire une classe très importante (en informatique, en ingénierie) de fonctions à valeurs réelles qui se trouvent être dérivables à droite et à gauche en tout point d'un intervalle ouvert I ouvert lequel elles sont définies.

DÉFINITION 2.12 (fonction convexe réelle sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R}). Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *convexe* sur I si et seulement si l'ensemble

$$(2.20) \quad \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2; X \in I \text{ et } Y \geq f(X)\}$$

est convexe au sens suivant : si M et N sont deux points de cet ensemble, le segment $[M, N]$ qui les joint reste dans cet ensemble.

EXEMPLE 2.7. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$, les fonctions puissances $x \mapsto |x|^\alpha$ lorsque $\alpha \in [1, \infty[$, sont convexes. La fonction $x \in]0, \infty[\mapsto -\ln x$ aussi, mais pas par contre la fonction $x \in]0, \infty[\mapsto \ln x$, ni les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|^\alpha$ lorsque $\alpha \in]0, 1[$. L'opposée $-f$ d'une fonction convexe f sur un intervalle ouvert est dite *concave*.

PROPOSITION 2.8 (les fonctions convexes réelles sur un intervalle ouvert sont dérivables à droite et à gauche en tout point). Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur I . La fonction f est alors dérivable à gauche et à droite en tout point de I , avec, quelque soient x_1, x_2, x_3 dans I :

$$(2.21) \quad x_1 < x_2 < x_3 \implies \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq f'_g(x_2) \leq f'_d(x_2) \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

DÉMONSTRATION. On suivra pas-à-pas la preuve sur la figure 2.4. Si x_2 et y sont deux points de I tels que $x_2 < y$, les points $M_2 = (x_2, f(x_2))$ et $M = (y, f(y))$ appartiennent à l'ensemble convexe (2.20). Le segment qui les joint est donc inclus dans cet ensemble, *i.e.* demeure « au dessus » du graphe

$$\{(X, Y) \in \mathbb{R}^2; X \in [x_2, y] \text{ et } Y = f(X)\}$$

de f au dessus du segment $[x_2, y]$. On en déduit

$$\forall x \in [x_2, y], f(x) \leq f(x_2) + \frac{f(y) - f(x_2)}{y - x_2}(x - x_2),$$

soit encore

$$\frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \leq \frac{f(y) - f(x_2)}{y - x_2}.$$

La fonction

$$(2.22) \quad x \in I \cap]x_2, +\infty[\mapsto \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

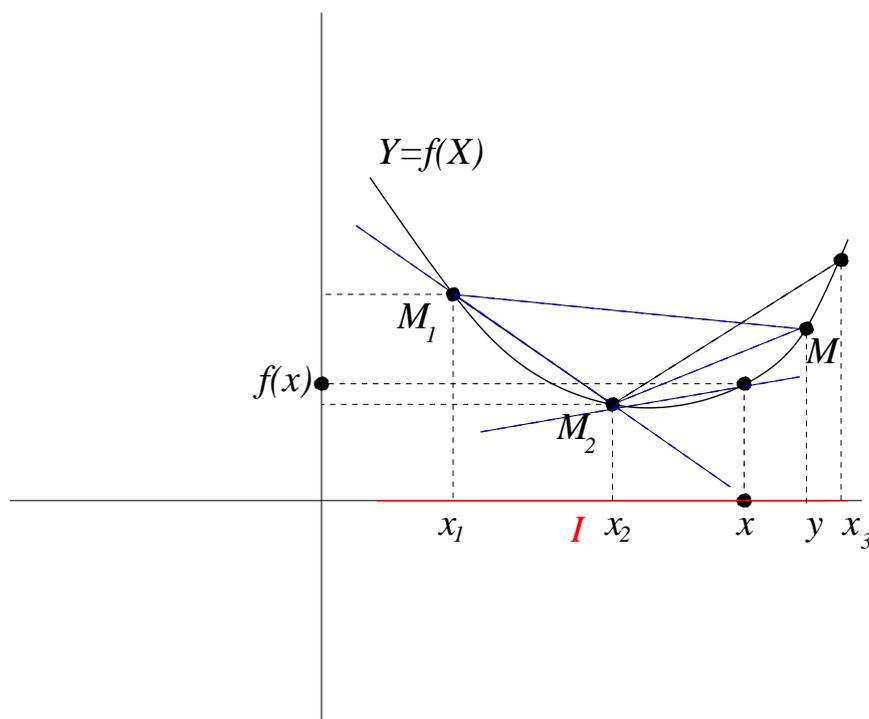


FIGURE 2.4. Dérivabilité bilatérale des fonctions convexes (preuve de la Proposition 2.8)

est donc monotone croissante. Si $x_1 < x_2 < x$, le point $M_2 = (x_2, f(x_2))$ est, pour les mêmes raisons, sous le segment d'extrémités M_1 et $(x, f(x))$: la pente de la droite passant par M_1 et M_2 est donc inférieure ou égale à celle de la droite joignant M_2 au point $(x, f(x))$, ce qui se traduit par

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

La fonction (1.5) est donc monotone croissante et minorée sur $]x_2, +\infty[$, donc admet une limite à droite $f'_d(x_2)$ en x_2 vérifiant

$$(2.23) \quad f'_d(x_2) \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Un raisonnement similaire montre que la fonction

$$x \in]-\infty, x_2[\cap I \mapsto \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

est monotone croissante et majorée par $\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$. Elle admet donc une limite à gauche $f'_g(x_2)$ en x_2 , telle que

$$(2.24) \quad f'_g(x_2) \geq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

et

$$f'_g(x) \leq \frac{f(y) - f(x_2)}{y - x_2} \quad \forall y \in]x_2, +\infty[\cap I.$$

En passant à la limite lorsque y tend vers x_2 dans $]x_2, +\infty[$, on en déduit

$$f'_g(x_2) \leq f'_d(x_2).$$

En combinant cette inégalité avec (2.23) et (2.24), on obtient bien le résultat (2.21) voulu. \square

2.4.5. Dérivabilité des fonctions réelles sur un intervalle et extréma ; le théorème de Rolle et la formule des accroissements finis.

DÉFINITION 2.13 (dérivabilité sur un intervalle ouvert de \mathbb{R}). Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point x de I . La fonction $x \in I \mapsto f'(x)$ s'appelle alors *fonction dérivée* de f sur I et on la note f' .

On peut également étendre la notion de « dérivabilité sur un intervalle ouvert de \mathbb{R} » à celle de « dérivabilité sur un intervalle non réduit à un point » de \mathbb{R} . On utilise pour cela les concepts de *dérivée à droite* et de *dérivée à gauche* introduits précédemment (cf. la Définition 2.11).

DÉFINITION 2.14 (dérivabilité sur un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point). Soit I un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} non réduit à un point si et seulement si f est dérivable en tout point x_0 de l'intérieur de I et si de plus :

- si I contient sa borne inférieure $a \in \mathbb{R}$, alors f admet une dérivée à droite en a , *i.e.* il existe un nombre complexe $f'_d(a)$ (que l'on note alors aussi $f'(a)$) tel que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I \cap]a, +\infty[}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a) ;$$

- si I contient sa borne supérieure $b \in \mathbb{R}$, alors f admet une dérivée à gauche en b , *i.e.* il existe un nombre complexe $f'_g(b)$ (que l'on note alors aussi $f'(b)$) tel que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x \in I \cap]-\infty, b[}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'_g(b).$$

REMARQUE 2.13 (la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle non réduit à un point implique la continuité sur cet intervalle). Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point est continue sur cet intervalle I , car continue en tout point x_0 de I . Cela résulte de la Proposition 2.5 (pour ce qui concerne les points intérieurs de I) et de la Remarque 2.12 (pour ce qui concerne le cas où x_0 est une borne de I incluse éventuellement dans I).

REMARQUE 2.14 (prolongement de fonctions dérivables sur un intervalle contenant une de ses bornes). Si une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable (au sens de la Définition 2.14) sur un intervalle I de \mathbb{R} non réduit à un point mais non ouvert, il est toujours possible de la prolonger en une fonction définie et dérivable dans un intervalle ouvert \tilde{I} contenant I : par exemple si I contient sa borne inférieure $a \in \mathbb{R}$, on prolonge la fonction f à l'intervalle $] - \infty, a[\cup I$ en posant :

$$\forall x \in] - \infty, a[, \quad f(x) = f(a) + f'_d(a)(x - a) = f(a) + f'(a)(x - a) ;$$

si I contient sa borne supérieure $b \in \mathbb{R}$, on prolonge la fonction f à l'intervalle $I \cup]b, +\infty[$ en posant :

$$\forall x \in]b, +\infty[, \quad f(x) = f(b) + f'_g(b)(x - b) = f(b) + f'(b)(x - b).$$

Ceci nous permet de prolonger dans tous les cas toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ définie et dérivable dans I (au sens de la Définition 2.14) en une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert \tilde{I} contenant I (et nous ramène ainsi à la situation envisagée dans la Définition 2.13).

On ne reviendra pas dans ce cours sur les résultats de base concernant les opérations sur les fonctions dérivables. Ce matériel a fait déjà l'objet du cours de MISMI (voire de Terminale) ; on pourra par exemple se reporter au chapitre 3 du polycopié *Mathématiques de base* ([**Ymis**], pages 71–73) : si f et g sont dérivables sur I , $f + g$ et fg le sont et on a

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

pour tout point x_0 de I (la notion de dérivabilité devant être pensée à gauche ou à droite si x_0 est une borne de I appartenant à I). Si g est de plus telle que g soit non nulle en x_0 , alors $g \neq 0$ au voisinage de x_0 (puisque g est continue) et f/g est aussi dérivable en x_0 de dérivée

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

La règle la plus importante reste la règle de composition (dite « *chain rule* » dans la terminologie anglo-saxonne) de Leibniz¹⁴ : si $f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 et que g est une fonction à valeurs dans \mathbb{C} définie dans un intervalle ouvert I_2 contenant $y_0 = f(x_0)$ et dérivable en y_0 , la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0).$$

Il faut cependant savoir¹⁵ que le calcul des dérivées successives des fonctions composées se trouve être un calcul algorithmiquement très coûteux qu'il convient d'éviter autant que faire se peut ! Il convient donc de savoir trouver des parades, comme on le verra lors de l'écriture de formules de Taylor.

Le premier résultat majeur concernant les fonctions dérivables sur un intervalle ouvert de \mathbb{R} est le célèbre *théorème de Rolle*¹⁶.

THEORÈME 2.4 (théorème de Rolle). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue réelle définie sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} non réduit à un point. On suppose f dérivable sur l'intervalle ouvert non vide $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$. Il existe alors toujours au moins un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. D'autre part, si f atteint son maximum ou minimum (sur $[a, b]$) en un point c qui appartient à $]a, b[$, alors nécessairement $f'(c) = 0$.*

14. On doit au mathématicien et philosophe prussien Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) les fondements du calcul différentiel moderne.

15. Cette remarque s'adresse plutôt aux étudiants de sensibilité informatique, mais elle est importante.

16. Ce théorème remonte à 1691 ! On l'attribue au mathématicien français Michel Rolle (1652-1719), l'un des pionniers de ce qui allait devenir la méthode du « pivot de Gauß » pour la résolution des systèmes linéaires d'équations. Comme quoi Analyse et Algèbre n'ont cessé de se croiser !

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 2.2, on sait, puisque f est continue sur $[a, b]$, que $f([a, b]) = [\inf_{[a,b]}(f), \sup_{[a,b]}(f)]$. De deux choses l'une :

- ou bien $\inf_{[a,b]} f = \sup_{[a,b]} f$, auquel cas f est constante sur $[a, b]$, auquel cas $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$ et le théorème est donc prouvé ;
- ou bien $\inf_{[a,b]} f < \sup_{[a,b]} f$, auquel cas l'un de ces deux nombres est différent de $f(a) = f(b)$, ce qui implique (puisque une fonction continue sur $[a, b]$ réalise son minimum et son maximum sur ce segment, cf. le Théorème 2.2) qu'il existe au moins un $c \in]a, b[$ où la fonction f présente un extrémum (minimum ou maximum).

Il reste à montrer que, si f présente un extrémum c en un point de $]a, b[$, alors nécessairement $f'(c) = 0$. Supposons par exemple $f'(c) > 0$ et utilisons (2.18) au point $x_0 = c$. On a

$$\forall h \in I_c = -c + I, f(c+h) - f(c) = h(f'(c) + \tilde{\epsilon}_c(h)).$$

Comme $\tilde{\epsilon}_c$ est continue en $h = 0$ et nulle en ce point, il existe $\eta_c > 0$ tel que

$$|h| < \eta_c \implies f'(c) + \tilde{\epsilon}_c(h) \geq f'(c)/2 > 0$$

(on reprend en fait ici l'argument utilisé dans la preuve de la Proposition 2.7). Il en résulte que, si $0 < h < \eta_c$, on aurait $f(c+h) - f(c) > 0$, ce qui contredirait le fait que f réalise son maximum sur $[a, b]$ en c . De même, on aurait, pour $0 < h < \eta_c$, $f(c-h) - f(c) < 0$, ce qui contredirait le fait que f réalise son minimum sur $[a, b]$ au point c . Le même raisonnement vaut si $f'(c) < 0$. Si f réalise un extrémum en $c \in]a, b[$, on a donc nécessairement $f'(c) = 0$. Cela règle la situation correspondant au second volet de notre alternative et clôt donc la preuve du théorème de Rolle. \square

REMARQUE 2.15 (Attention!). Le fait que f' s'annule en un point c de $]a, b[$ n'implique pas cependant que f réalise un extrémum (maximum ou minimum) sur $[a, b]$ au point c . Soit l'on peut affirmer dans ce cas qu'il existe $\eta < 0$ tel que $[c - \eta, c + \eta] \subset]a, b[$ et que la restriction de f à $[c - \eta, c + \eta]$ réalise un extrémum (maximum ou minimum) sur $[c - \eta, c + \eta]$ au point c ; on dit alors que f réalise un *extrémum local* au point c . Soit (et cela peut fort bien se produire), la fonction présente un minimum (*resp.* maximum) local en c , mais seulement sur $[c - \eta, 0]$, tandis qu'elle présente un maximum (*resp.* minimum) local en c , mais seulement sur $[c, c + \eta]$: on dit alors que la fonction présente un *point selle* en c . Soit même la situation peut s'avérer plus complexe, comme en témoigne l'exemple de $c = 0$ pour la fonction $f : t \mapsto t^3 \sin(1/t)$, avec $f(0) = 0$ (présentant des oscillations amorties de part et d'autre de l'origine).

EXEMPLE 2.8 (polynômes de Legendre¹⁷). Les fonctions polynomiales de Legendre (ici non normalisées) sont définies comme les fonctions polynomiales

$$L_n : x \mapsto (d/dx)^n [(1-x^2)^n], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

La fonction L_n est une fonction polynomiale de degré n car on dérive n fois une fonction polynomiale de degré $2n$. Comme $x \mapsto (1-x^2)^n$ s'annule à l'ordre n aux points -1 et 1 , on peut montrer en utilisant de manière répétée le théorème de Rolle (voir l'exercice A68) que L_n a au moins n racines réelles distinctes, autrement dit que toutes les racines complexes de L_n sont réelles. De telles fonctions polynomiales

17. Ainsi nommés en l'honneur du mathématicien et astronome français Adrien-Marie Legendre (1752-1833) qui les introduisit et exploita dans ses travaux, comme solutions des équations différentielles qui portent aussi son nom.

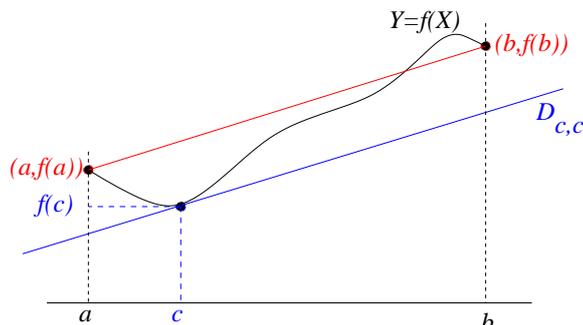


FIGURE 2.5. Interprétation géométrique de la formule des accroissements finis

s'avèrent fort utile en graphisme 2D car elles permettent de modéliser avec suffisamment de flexibilité des tracés de courbes. Ceci pour convaincre les sceptiques de l'utilité, au même titre que l'algèbre, de l'analyse en informatique !

COROLLAIRE 2.2 (formule des accroissements finis (FAF)). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} non réduit à un point. On suppose f dérivable sur l'intervalle ouvert non vide $]a, b[$. Alors, il existe toujours au moins un nombre $c \in]a, b[$ tel que

$$(2.25) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

DÉMONSTRATION. On applique le théorème de Rolle (Théorème 2.4) à la fonction

$$g : x \in [a, b] \mapsto f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right)$$

On a $g(a) = g(b) = 0$. De plus g est dérivable dans $]a, b[$ et l'on a

$$\forall x \in]a, b[, \quad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Le théorème de Rolle assure qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire (2.25). \square

REMARQUE 2.16 (interprétation géométrique de la formule des accroissements finis (FAF)). La formule des accroissements finis écrite pour une fonction réelle $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$) s'interprète géométriquement ainsi : le nombre

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

représente la pente de la droite joignant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ dans \mathbb{R}^2 . Ce que dit la formule des accroissements finis est qu'il existe au moins un nombre $c \in]a, b[$ tel que la tangente géométrique $D_{c,c}$ en $(c, f(c))$ au graphe de f au dessus de $[a, b]$ (cf. la Proposition 2.6) soit parallèle à la droite joignant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ (voir la figure 2.5).

COROLLAIRE 2.3 (formule des accroissements finis généralisée (FAFG)). Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} non réduit à un point. On suppose f et g toutes deux dérivables sur l'intervalle ouvert non vide $]a, b[$. Alors, il existe toujours au moins un nombre $c \in]a, b[$ tel que

$$(2.26) \quad \begin{vmatrix} f'(c) & f(b) - f(a) \\ g'(c) & g(b) - g(a) \end{vmatrix} = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0.$$

Ou encore, si de plus g' ne s'annule pas sur $]a, b[$:

$$(2.27) \quad \exists c \in]a, b[\quad \text{tel que} \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

DÉMONSTRATION. On applique le théorème de Rolle (Théorème 2.4) à la fonction réelle

$$h : t \in [a, b] \mapsto f(t)(g(b) - g(a)) - g(t)(f(b) - f(a)).$$

Cette fonction h est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ puisque les fonctions f et g ont toutes deux ces propriétés. D'autre part, on constate que

$$h(a) = f(a)g(b) - f(b)g(a) = h(b).$$

Il existe donc au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$, ce qui est bien le résultat (2.26) voulu. \square

REMARQUE 2.17 (interprétation géométrique de la formule des accroissements finis généralisée (FAFG)). Si f et g sont deux fonctions réelles continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, on peut considérer la fonction $F := f + ig$ comme une fonction de $[a, b]$ dans \mathbb{C} , continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si F' ne s'annule pas sur $]a, b[$ (c'est-à-dire : f' et g' ne s'annulent pas simultanément sur $]a, b[$), alors, pour tout $x_0 \in]a, b[$, la droite Δ_{x_0, x_0} passant par $F(x_0)$ et de vecteur directeur le vecteur d'affixe $F'(x_0)$ représente la tangente géométrique au point d'affixe $F(x_0)$ à la courbe plane paramétrée $x \in]a, b[\rightarrow F(x)$ (cf. la Proposition 2.7). Ce que dit alors la formule des accroissements finis généralisée est que, si F' ne s'annule pas sur $]a, b[$ et que de plus $F(b) - F(a) \neq 0$, il existe au moins un $c \in]a, b[$ tel que la tangente géométrique $\Delta_{c, c}$ à la courbe paramétrée $x \in]a, b[\rightarrow F(x)$ au point $F(c)$ (lorsque le passage en ce point de la courbe paramétrée se fait¹⁸ pour la valeur $x = c$ du paramètre) soit parallèle à la droite du plan complexe joignant les points (distincts) d'affixe $F(a)$ et $F(b)$. Voir la figure 2.6.

2.4.6. Le cas des fonctions complexes : l'inégalité des accroissements finis. Attention ! Ni le théorème de Rolle (Théorème 2.4), ni la formule des accroissements finis (Proposition 2.2) ne subsistent lorsque f est une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{C} au lieu d'être une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Par exemple, la fonction

$$\theta \in [0, 2\pi] \mapsto e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

est une fonction continue de $[0, 2\pi]$ dans \mathbb{C} . Elle est dérivable sur $]0, 2\pi[$, de fonction dérivée

$$(e^{i(\cdot)})' : \theta \in]0, 2\pi[\mapsto -\sin \theta + i \cos \theta = i e^{i\theta}$$

18. Cette précision est nécessaire car la courbe paramétrée $x \in [a, b] \mapsto F(x) = f(x) + ig(x)$ peut fort bien passer plusieurs fois par le même point, ce en présentant des tangentes géométriques différentes lors de ces divers passages successifs, voir la figure 2.6.

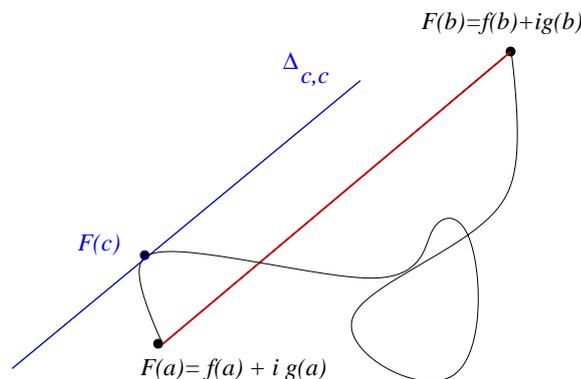


FIGURE 2.6. Interprétation géométrique de la formule des accroissements finis généralisée

(voir le cours de MIS101 [Ymis]). On constate que, bien que

$$[e^{i\theta}]_{\theta=0} = [e^{i\theta}]_{\theta=2\pi},$$

il n'existe aucun nombre $c \in]0, 2\pi[$ tel que $i e^{ic} = 0$. Le théorème de Rolle est donc faux pour cette fonction $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{C}$. Ce n'est pas mieux en ce qui concerne la formule des accroissements finis puisque le théorème de Rolle en est un corollaire (prendre f telle que $f(a) = f(b)$). Pour une fonction à valeurs complexes, la formule des accroissements finis est donc tout aussi fautive que l'est le théorème de Rolle pour une telle fonction. On « *sauve* » néanmoins les meubles avec le résultat suivant :

THEORÈME 2.5 (inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} non réduit à un point. On suppose f dérivable sur l'intervalle ouvert non vide $]a, b[$. On a alors l'inégalité*

$$(2.28) \quad |f(b) - f(a)| \leq |b - a| \times \sup_{x \in]a, b[} |f'(x)|.$$

DÉMONSTRATION. Soit \vec{V} le vecteur du plan d'affixe $f(b) - f(a)$. Si ce vecteur est nul, on a $|f(b) - f(a)| = 0$ et l'inégalité (2.28) est bien sûr vraie. Si $\vec{V} \neq \vec{0}$, notons $\vec{v} = \vec{V} / \|\vec{V}\| = (\nu_1, \nu_2)$. Posons $f(x) = u(x) + iv(x)$ et introduisons la fonction réelle :

$$F : x \in [0, 1] \mapsto \nu_1 u((1-x)a + xb) + \nu_2 v((1-x)a + xb) \in \mathbb{R}.$$

On a

$$F(1) - F(0) = \nu_1 (u(b) - u(a)) + \nu_2 (v(b) - v(a)) = \|\vec{V}\|^2 / \|\vec{V}\| = \|\vec{V}\| = |f(b) - f(a)|.$$

Comme $u = \operatorname{Re} f$ et $v = \operatorname{Im} f$ sont dérivables sur $]a, b[$, F est dérivable sur $]0, 1[$ et l'on a (cf. la règle de dérivation des fonctions composées vue en MIS101, [Ymis], section 3.7.4) :

$$\forall x \in]0, 1[, F'(x) = (b - a) (\nu_1 u'((1-x)a + xb) + \nu_2 v'(1-x)a + xb)).$$

Or

$$\nu_1 u'((1-x)a + xb) + \nu_2 v'(1-x)a + xb)$$

est le produit scalaire du vecteur \vec{v} avec le vecteur $(u'((1-x)a+xb), v'((1-x)a+xb))$. Ce produit scalaire est majoré en valeur absolue par le produit des normes des deux vecteurs en jeu (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le plan vue en Terminale), ce qui donne

$$\forall x \in]0, 1[, |F'(x)| \leq |b-a| |f'(x)|.$$

Comme la formule des accroissements finis (Corollaire 2.2) nous assure qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$F(1) - F(0) = F'(c),$$

on a

$$|F(1) - F(0)| = |f(b) - f(a)| \leq |b-a| \times |f'(c)| \leq |b-a| \times \sup_{x \in]a, b[} |f'(x)|.$$

C'est bien l'inégalité (2.28) requise. \square

2.4.7. Quelques applications de la formule des accroissements finis.

Nous donnons ici quelques applications de la formule des accroissements finis ((2.25), corollaire 2.2) pour les fonctions à valeurs réelles.

PROPOSITION 2.9 (fonction réelles dérivables dont la dérivée présente une limite en un point). *Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point, $x_0 \in]a, b[$, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur les intervalles ouverts $]a, x_0[$ et $]x_0, b[$, telle que la restriction de f' à $]a, b[\setminus \{x_0\}$ admette une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en x_0 . Alors f est nécessairement dérivable aussi en x_0 , et l'on a $f'(x_0) = l$.*

DÉMONSTRATION. Pour tout x tel que $a < x < x_0$, on déduit de la formule des accroissement finis ((2.25), Corollaire 2.2), puisque f est continue sur $[x, x_0]$ et dérivable sur $]x, x_0[$, que

$$\exists c_x \in]x, x_0[, \quad f(x_0) - f(x) = (x_0 - x)f'(c_x).$$

Si $(x_k)_{k \geq 1}$ est une suite de points de $]a, x_0[$ convergeant vers x_0 , la suite $(c_{x_k})_{k \geq 1}$ ainsi couplée avec la suite $(x_k)_{k \geq 1}$ converge aussi vers x_0 du fait du lemme des gendarmes (en effet $x_k < c_{x_k} < x_0$ pour tout $k \geq 1$). Comme par hypothèses

$$\lim_{\substack{c \rightarrow x_0 \\ c \in]a, x_0[}} f'(c) = l,$$

on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0) - f(x_k)}{x_0 - x_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (f'(c_{x_k})) = l.$$

Ceci est vrai pour toute suite de points $(x_k)_{k \geq 1}$ de $]a, x_0[$ tendant vers x_0 . De même, pour tout x tel que $x_0 < x < b$, il existe (toujours d'après la formule des accroissements finis), $c_x \in]x_0, x[$ tel que $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c_x)$. Si $(x_k)_{k \geq 1}$ est une suite de points de $]x_0, b[$ convergeant vers x_0 , la suite $(c_{x_k})_{k \geq 1}$ ainsi couplée à la suite $(x_k)_{k \geq 1}$ converge aussi vers x_0 du fait du lemme des gendarmes (en effet, cette fois, on a $x_0 < c_{x_k} < x_k$ pour tout $k \geq 1$). Comme par hypothèses

$$\lim_{\substack{c \rightarrow x_0 \\ c \in]x_0, b[}} f'(c) = l,$$

on a encore :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (f'(c_{x_k})) = l.$$

La fonction

$$x \in]a, b[\setminus \{x_0\} \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet donc pour limite $l \in \mathbb{R}$, ce qui prouve (cf. la Définition 2.10) que f est dérivable en x_0 , avec $f'(x_0) = l$. \square

La formule des accroissements finis permet aussi de lever (parfois) les indéterminations du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ dans les calculs de limites de fonctions réelles en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ ou bien en $\pm\infty$.

PROPOSITION 2.10 (Règle de l'Hôpital¹⁹, ou aussi de Bernoulli). *Soient $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point, $x_0 \in]a, b[$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , toutes deux dérivables dans $]a, b[\setminus \{x_0\}$, avec $g'(x) \neq 0$ pour tout x dans $]a, b[\setminus \{x_0\}$. On suppose*

$$(2.29) \quad f(x_0) = g(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{c \rightarrow x_0 \\ c \in]a, b[\setminus \{x_0\}}} \frac{f'(c)}{g'(c)} = l \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$(2.30) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in]a, b[\setminus \{x_0\}}} \frac{f(x)}{g(x)} = l = \lim_{\substack{c \rightarrow x_0 \\ c \in]a, b[\setminus \{x_0\}}} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in]a, x_0[$, il existe (d'après la formule des accroissements finis généralisée (2.27), Corollaire 2.3, applicable ici car f et g sont toutes deux des fonctions réelles, continues sur $[x, x_0] \subset [a, b]$ et dérivables sur $]x_0, x[$, et que g' ne s'annule pas sur $]x_0, x[$) un nombre réel $c_x \in]x, x_0[$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

(on note que la formule de accroissements finis (2.25) et le fait que g' ne s'annule pas sur $]a, b[\setminus \{x_0\}$ impliquent bien que $g(x) = g(x) - g(x_0) = g'(\tilde{c}_x)(x - x_0) \neq 0$ pour un certain \tilde{c}_x de $]x, x_0[$ si $x \in]a, x_0[$). Comme

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in]a, x_0[}} c_x = x_0$$

et que

$$\lim_{\substack{c \rightarrow x_0 \\ c \in]a, x_0[}} \frac{f'(c)}{g'(c)} = l,$$

on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in]a, x_0[}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in]a, x_0[}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = l.$$

On raisonne de la même manière lorsque x tend vers x_0 en restant dans $]x_0, b[$. \square

19. Guillaume-François de l'Hôpital, marquis de Saint Mesme, est un mathématicien français (1661-1704), l'un des premiers à poser les jalons du calcul différentiel en Analyse. Cette règle avait été en fait énoncée dans les cours de calcul différentiel dispensés à l'Université de Groningen par le mathématicien, physicien (et même horloger) suisse Johann Bernoulli (1667-1748), élève lui-même de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), philosophe et mathématicien allemand à qui l'on doit, avec Newton, les bases du calcul différentiel et intégral. C'est l'analyse français Edouard Goursat (1858-1936) qui baptisa ainsi, deux siècles plus tard, cette règle classique en l'honneur de Guillaume de l'Hôpital.

REMARQUE 2.18. On peut affaiblir légèrement les hypothèses en supposant simplement que f et g sont des fonctions réelles définies et continues sur $[a, b] \setminus \{x_0\}$, dérivables toutes les deux sur $]a, b[\setminus \{x_0\}$, telles que g' ne s'annule pas sur $]a, b[\setminus \{x_0\}$, et que l'on ait :

$$(2.31) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in [a, b] \setminus \{x_0\}}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in [a, b] \setminus \{x_0\}}} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{c \rightarrow x_0 \\ c \in]a, b[\setminus \{x_0\}}} \frac{f'(c)}{g'(c)} = l \in \mathbb{R}$$

à la place de (2.29). La conclusion (2.30) reste alors encore valable. Il suffit en effet de remarquer que, sous la première des deux hypothèses (2.31), les fonctions continues $f : [a, b] \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ se prolongent en des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} en posant $f(x_0) = g(x_0) = 0$. On est ramené ainsi au jeu d'hypothèses (2.29) et la Proposition 2.10 s'applique.

EXEMPLE 2.9. Il est aussi possible, compte-tenu de la Remarque 2.18, de considérer le cas où f et g sont deux fonctions continues sur $[R, +\infty[$ (avec $R > 0$), dérivables sur $]R, +\infty[$, telles que $g' \neq 0$ sur $]R, +\infty[$ et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{c \rightarrow +\infty \\ c \in]R, +\infty[}} \frac{f'(c)}{g'(c)} = l \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x > R}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{v \rightarrow 0 \\ 0 < v < 1/R}} \frac{f(1/v)}{g(1/v)} = \lim_{\substack{v \rightarrow 0 \\ 0 < v < 1/R}} \frac{(-1/v^2) f'(1/v)}{(-1/v^2) g'(1/v)} = \lim_{\substack{c \rightarrow +\infty \\ c \in]R, +\infty[}} \frac{f'(c)}{g'(c)} = l.$$

Voici une autre version de la règle de l'Hôpital, permettant cette fois de lever (dans certains cas) l'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$ et non plus $\frac{0}{0}$.

PROPOSITION 2.11 (autre version de la règle de l'Hôpital). *Soient f et g deux fonctions réelles continues et dérivables sur $]a, b[$ ($-\infty < a < b \leq +\infty$), telles que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$ et que*

$$(2.32) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in]a, b[}} |f(x)| = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in]a, b[}} |g(x)| = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{c \rightarrow a \\ c \in]a, b[}} \frac{f'(c)}{g'(c)} = l \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$(2.33) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in]a, b[}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{c \rightarrow a \\ c \in]a, b[}} \frac{f'(c)}{g'(c)} = l.$$

DÉMONSTRATION. Pour $a < x < y < b$, on peut affirmer, en utilisant la formule des accroissements finis généralisés (Corollaire 2.3), qu'il existe $c_{x,y} \in]x, y[$ tel que

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})},$$

ce que l'on écrit sous la forme :

$$(2.34) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} + \left(\frac{f(y)}{g(x)} - \frac{g(y)}{g(x)} \frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} \right).$$

Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèses (deuxième condition dans (2.32)), il existe $\eta_\epsilon > 0$ tel que

$$0 < y - a < \eta_\epsilon \implies \left(\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - l \right| < \epsilon/2 \quad \forall c \in]a, y[\right).$$

Si l'on fixe un tel $y = y_\epsilon \in]a, a + \eta_\epsilon[$, on observe, en faisant tendre x vers a dans (2.34) (où $y = y_\epsilon$) et en utilisant le fait que $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$ (première condition dans (2.32)) tandis que $f(y_\epsilon)$ et $g(y_\epsilon)$ restent, eux, fixés, que, pour x assez proche de a à droite, on a $|f(x)/g(x) - l| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Ceci achève la preuve de la Proposition 2.11. \square

EXEMPLE 2.10 (applications faciles de la règle de l'Hôpital). Voici quelques exemples simples d'application des diverses versions de cette règle de l'Hôpital :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\cos c}{c} = 1 & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1} &= \lim_{c \rightarrow 1} \frac{(-1) \frac{1}{2-c}}{1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \tan(1/x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan(1/x)}{1/x} = \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{(-1/c^2) \frac{1}{\cos^2(1/t)}}{-1/c^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Arctan}(1/x)}{1/x} &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{(-1/c^2) \frac{1}{1+1/c^2}}{-1/c^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0_+} \left(\frac{1}{x} + \ln(x) \right) &= \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{(1+x \ln(x))}{x} = \lim_{c \rightarrow 0_+} \frac{\ln(c)}{1} = +\infty. \end{aligned}$$

Notons que pour la plupart de ces exemples, on peut raisonner de fait différemment en reconnaissant tout de suite une limite de taux de variations et donc un nombre dérivé comme valeur de la limite demandée.

L'autre application importante de la formule des accroissements finis complète les résultats présentés dans la sous-section 2.3.6 (en particulier la Proposition 2.3) en y injectant le concept de dérivabilité des fonctions.

PROPOSITION 2.12. Soit I un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I (au sens de la Définition 2.14). On suppose que $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sur I . Alors f réalise une application bijective strictement croissante (resp. strictement décroissante) entre I et son image, l'intervalle $J = f(I)$. De plus, l'application inverse f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $J = f(I)$ et l'on a :

$$(2.35) \quad \forall y \in f(I), (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

DÉMONSTRATION. Soient $x < y$ deux points de I . La fonction f est continue sur $[x, y]$ (puisque continue, car dérivable, sur I , cf. la Remarque 2.13); elle est d'autre part dérivable par hypothèses sur $]x, y[$ car dérivable sur I . On peut donc appliquer la formule des accroissements finis ((2.25), Corollaire 2.2) et affirmer qu'il existe $c_{x,y} \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = (y-x) f'(c)$. Le nombre $f(y) - f(x)$ est donc non nul et du signe de f' sur I . Si $f' > 0$ sur I , f est alors strictement croissante sur I tandis que, si $f' < 0$ sur I , f est strictement décroissante sur cet intervalle. L'application $f : I \rightarrow J = f(I)$ est donc à la fois injective et surjective, donc bijective. L'application inverse f^{-1} est, on le rappelle, définie par

$$\left(x \in I \text{ et } y = f(x) \right) \iff \left(y \in J \text{ et } x = f^{-1}(y) \right).$$

Si $y_0 = f(x_0) \in J$, on a, pour tout $y = f(x) \in J \setminus \{y_0\}$:

$$(2.36) \quad \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Comme on sait déjà que $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue (cf. la Proposition 2.3), on sait que si $y = f(x)$ tend vers $y_0 = f(x_0)$ dans $J \setminus \{y_0\}$, alors nécessairement $x = f^{-1}(y)$ tend vers $x_0 = f^{-1}(y_0)$ dans $I \setminus \{x_0\}$. On déduit donc de (2.36) :

$$\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ y \in J \setminus \{y_0\}}} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I \setminus \{x_0\}}} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

□

REMARQUE 2.19. Un moyen mnémotechnique de retenir la formule (2.35) consiste à supposer que $f^{-1} : J \rightarrow I$ est dérivable, puis à écrire

$$(2.37) \quad \forall y \in J, f(f^{-1}(y)) = y,$$

enfin à dériver (comme vous avez appris à le faire en MIS101 [Ymis], section 3.5, c'est-à-dire en utilisant la *règle de Leibniz*) cette égalité (2.37) entre deux fonctions sur J , ce qui donne bien :

$$\forall y \in J, (f^{-1})'(y) \times f'(f^{-1}(y)) = 1.$$

En fait, vu avez probablement vu dans le cours de MIS101 une preuve partielle de la Proposition 2.12 (il y manquait alors la possibilité d'invoquer la formule des accroissements finis dont vous ne disposiez pas).

EXEMPLE 2.11. Il faut ici reprendre les exemples des fonctions classiques, par exemple $\sin :]-\pi/2, \pi/2[\mapsto \sin x$ (de dérivée $\text{Arcsin} :]-1, 1[\mapsto]-\pi/2, \pi/2[$), $\cos :]0, \pi[\mapsto \cos x$ (de dérivée $\text{Arccos} :]-1, 1[\mapsto]0, \pi[$), etc. C'est l'occasion de revoir ici toutes les fonctions inverses introduites en MIS101 ([Ymis], section 3.6).

2.4.8. Les notations de Landau. Cette sous-section constitue une parenthèse dans ce cours, avant de poursuivre l'étude de la différentiabilité avec l'introduction du concept de *dérivée d'ordre supérieur*.

Le mathématicien allemand Edmund Landau (1877-1938) popularisa des notations commodes (en fait introduites, semble-t-il, par son compatriote Paul Backmann). Il est utile d'introduire ces notations, dites *notations de Landau*, ici, avant d'aller plus loin dans ce cours, puisque nous allons les faire intervenir explicitement dans la formulation (2.18) exprimant la différentiabilité d'une fonction en un point x_0 d'un intervalle ouvert.

DÉFINITION 2.15 (fonction négligeable devant une autre au voisinage d'un point, notation o). Soit $x_0 \in]-\infty, +\infty[$ et f et g deux fonctions à valeurs complexes, toutes deux définies dans un voisinage²⁰ V de x_0 . On dit que f est *négligeable devant* g (au voisinage de x_0 , dans V), et on écrit alors

$$(2.38) \quad f = o(g) \text{ au voisinage de } x_0 \quad (\text{dans } V)$$

si et seulement si il existe une fonction ϵ , à valeurs complexes, définie dans un voisinage $V(x_0) \subset V$ de x_0 contenant tous les points de V assez proches de x_0 , telle que

$$\left(\forall x \in V(x_0), f(x) = g(x) \times \epsilon(x) \right) \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in V}} \epsilon(x) = 0.$$

20. Si $x_0 \in \mathbb{R}$, ceci signifie soit « dans un intervalle $V =]x_0 - \epsilon_0, x_0 + \epsilon_0[$ privé ou non de $\{x_0\}$ », soit « dans un demi-intervalle à droite $V =]x_0, x_0 + \epsilon_0[$ ou $V = [x_0, x_0 + \epsilon_0[$ », soit « dans un demi-intervalle à gauche $V =]x_0 - \epsilon_0, x_0[$ ou $V =]x_0 - \epsilon_0, x_0]$ » (toujours avec $\epsilon_0 > 0$ assez petit) ; si $x_0 = -\infty$, ceci signifie « dans un intervalle $V =]-\infty, -R_0[$ avec $R_0 > 0$ assez grand » ; si $x_0 = +\infty$, ceci signifie « dans un intervalle $V =]R_0, +\infty[$ avec $R_0 > 0$ assez grand ».

Ainsi

$$(2.39) \quad \left(f = o(g) \text{ au voisinage de } x_0 \text{ (dans } V) \right) \\ \iff \left(f \equiv g \times \epsilon \text{ près de } x_0 \text{ dans } V, \text{ avec } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in V}} \epsilon(x) = 0 \right).$$

REMARQUE 2.20. Si g ne s'annule pas dans un voisinage $V(x_0) \subset V$ contenant tous les points de V assez proches de x_0 , il est équivalent de dire que $f = o(g)$ au voisinage de x_0 (dans V) ou de dire que $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in V} f(x)/g(x) = 0$.

EXEMPLE 2.12 (expression de la différentiabilité en un point). Avec ces notations, on peut exprimer le fait qu'une fonction f à valeurs complexes, définie dans un intervalle I non réduit à un point et contenant x_0 , soit dérivable en x_0 . La formulation (2.18) se lit en effet :

$$(2.40) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \text{ au voisinage de } h = 0 \text{ (dans } I_{x_0} = -x_0 + I, \\ \text{comme fonctions de } h).$$

EXEMPLE 2.13 (comparaisons entre fonctions logarithme, puissances, exponentielle). On peut reformuler en ces termes les résultats connus (et, oh combien utiles!) concernant la comparaison des fonctions logarithme, puissances, et exponentielle (cf. le cours de MIS101 [**Ymis**], chapitre 3) :

$$\forall \alpha, \beta > 0, (\ln |t|)^\alpha = o(|t|^{-\beta}) \text{ au voisinage de } t = 0 \text{ (dans } \mathbb{R}^*); \\ \forall \alpha, \beta > 0, t^\alpha = o(e^{\beta t}) \text{ au voisinage de } +\infty; \\ \forall \alpha, \beta > 0, (\ln t)^\alpha = o(t^\beta) \text{ au voisinage de } t = +\infty.$$

Attention! Si $\alpha < \beta$ sont deux nombres réels distincts, on a $|t|^\beta = o(|t|^\alpha)$ au voisinage de 0, mais $|t|^\beta = o(|t|^\alpha)$ au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$. Notons aussi que l'on conviendra toujours d'utiliser la terminologie (préconisée par l'AFNOR) \ln pour désigner la fonction *logarithme népérien*. Il faut noter toutefois que la syntaxe des logiciels de calcul symbolique et surtout scientifique utilise tout autant la terminologie anglosaxonne \log .

DÉFINITION 2.16 (fonction bornée devant une autre au voisinage d'un point et notation O). Soit $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ et f et g deux fonctions à valeurs complexes, toutes deux définies dans un voisinage²¹ V de x_0 . On dit que f est bornée devant g (au voisinage de x_0 , dans V), et on écrit alors

$$(2.41) \quad f = O(g) \text{ au voisinage de } x_0 \text{ (dans } V),$$

si et seulement si il existe une fonction B , à valeurs complexes, définie dans un voisinage $V(x_0) \subset V$ de x_0 contenant tous les points de V assez proches de x_0 , et telle que

$$\left(\forall x \in V(x_0), f(x) = g(x) \times B(x) \right) \text{ et } \limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in V}} |B(x)| < +\infty.$$

21. Voir la note en bas de page 2.15 plus haut.

Ainsi

$$(2.42) \quad \left(f = O(g) \text{ au voisinage de } x_0 \text{ (dans } V) \right) \\ \iff \left(f \equiv g \times B \text{ près de } x_0 \text{ dans } V, \text{ avec } \limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in V}} |B(x)| < +\infty \right).$$

REMARQUE 2.21. Si g ne s'annule pas dans un voisinage $V(x_0) \subset V$ contenant tous les points de V assez proches de x_0 , il est équivalent de dire que $f = O(g)$ au voisinage de x_0 (dans V) ou de dire que $\limsup_{x \rightarrow x_0, x \in V} |f(x)/g(x)| < +\infty$.

DÉFINITION 2.17 (fonctions équivalentes au voisinage d'un point, notation \sim). Soit $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ et f et g deux fonctions à valeurs complexes, toutes deux définies dans un voisinage²² V de x_0 . On dit que f est équivalente à g (au voisinage de x_0 , dans V), et on écrit alors

$$(2.43) \quad f \underset{x_0}{\sim} g \text{ dans } V,$$

si et seulement si il existe une fonction φ , à valeurs complexes, définie dans un voisinage $V(x_0) \subset V$ de x_0 contenant tous les points de V assez proches de x_0 , et telle que

$$\left(\forall x \in V(x_0), f(x) = g(x) \times \varphi(x) \right) \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in V}} \varphi(x) = 1.$$

Ainsi

$$(2.44) \quad \left(f \underset{x_0}{\sim} g \text{ dans } V \right) \\ \iff \left(f \equiv g \times \varphi \text{ près de } x_0 \text{ dans } V, \text{ avec } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in V}} \varphi(x) = 1 \right).$$

EXEMPLE 2.14. On a par exemple

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \text{ dans }]0, +\infty[; \sin x \underset{0}{\sim} x \text{ dans } \mathbb{R}.$$

ou encore (un peu plus compliqué²³) :

$$\frac{x^4 + \ln^5 x}{(x^2 - \cos x)(\exp x - \sin^3 x)} \underset{+\infty}{\sim} x^2 \exp(-x) \text{ dans }]1, +\infty[.$$

Signalons pour clôre cette parenthèse à propos des notations de Landau que les trois concepts ($f = o(g)$, $f = O(g)$, $f \sim g$, au voisinage de $x_0 \in [-\infty, +\infty]$) que nous venons d'introduire dans cette sous-section dans le cadre des mathématiques « continues²⁴ » peuvent être tout aussi bien définis dans le cadre des mathématiques discrètes, *i.e* lorsque des suites, et non plus des fonctions, sont en jeu : lorsque n tend vers $+\infty$, on a, pour deux suites de nombres complexes $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$,

22. Voir encore la note en bas de page 2.15 plus haut.

23. Vérifier le en exercice.

24. L'ensemble des nombres réels se présente en effet comme un *continuum*, au contraire de ses sous-ensembles \mathbb{N} et \mathbb{Z} , par exemple, qui se présentent, eux, comme des ensembles « discrets », sur lesquels l'informaticien peut cette fois vraiment travailler.

les définitions suivantes :

$$(2.45) \quad \begin{aligned} u_n = o(v_n) &\iff u_n = v_n \times \epsilon_n \text{ pour } n \geq N_0, \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = 0 ; \\ u_n = O(v_n) &\iff u_n = v_n \times B_n \text{ pour } n \geq N_0, \text{ avec } \limsup_{n \rightarrow +\infty} |B_n| < +\infty ; \\ u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n &\iff u_n = v_n \times \varphi_n \text{ pour } n \geq N_0, \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1. \end{aligned}$$

2.5. Dérivations d'ordre supérieur et formules de Taylor

2.5.1. Différentiabilité à l'ordre p d'une fonction complexe en un point. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I , c'est-à-dire en tout point de I . On dispose alors, on l'a vu précédemment (cf. la Définition 2.10), d'une nouvelle fonction $f' : I \rightarrow \mathbb{C}$, la fonction dérivée. On dit que f est deux fois dérivable (ou deux fois différentiable) au point x_0 si cette fonction dérivée f' est dérivable au point x_0 . On note alors son nombre dérivé en ce point $f''(x_0)$. On dit que f est deux fois dérivable sur I si f est deux fois dérivable en tout point x_0 de I . On peut alors envisager à nouveau la question de savoir si la fonction f'' (notée aussi $f^{(2)}$ pour pouvoir continuer) est dérivable au point x_0 , etc. Cette première approche nous conduit naturellement à proposer la démarche inductive suivante pour introduire la notion de *dérivée à l'ordre p en un point*.

DÉFINITION 2.18 (fonction p -fois dérivable en un point lorsque $p \geq 2$). Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$. Soit f une fonction à valeurs complexes définie dans un intervalle ouvert I de \mathbb{R} contenant un point x_0 . On dit que f est p -fois dérivable au point x_0 (ou encore, ce qui est mieux, p -fois différentiable en x_0) s'il existe un intervalle ouvert $V(x_0) \subset I$, contenant x_0 , tel que :

- la fonction $f = f^{(0)}$ est dérivable en tout point de $V(x_0)$, de fonction dérivée la fonction $f' = f^{(1)} : V(x_0) \rightarrow \mathbb{C}$ [**cran 1**];
- la fonction $f' = f^{(1)} : V(x_0) \rightarrow \mathbb{C}$ est encore dérivable en tout point de $V(x_0)$, de fonction dérivée la fonction $f'' = f^{(2)} : V(x_0) \rightarrow \mathbb{C}$ [**cran 2**];
- il en est encore de même pour la fonction $f^{(2)} : V(x_0) \rightarrow \mathbb{C}$ dans ce même voisinage [**cran 3**];
- [...]
- la fonction $f^{(p-2)}$ est dérivable en tout point de $V(x_0)$, de fonction dérivée la fonction $f^{(p-1)} : V(x_0) \rightarrow \mathbb{C}$ [**cran $p-1$**];
- la fonction $f^{(p-1)} : V(x_0) \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable au point x_0 [**cran final p**].

Les nombres $f^{(k)}(x_0)$, $k = 0, \dots, p$, sont alors appelés *nombre dérivés successifs* de f au point x_0 .

REMARQUE 2.22 (1-dérivabilité, 0-dérivabilité en un point). On convient de dire qu'une fonction (à valeurs complexes) est *1-dérivable en un point x_0* de \mathbb{R} si elle est définie dans un voisinage ouvert de ce point et dérivable en ce point. Une fonction (à valeurs complexes) est, par convention, *0-dérivable en un point x_0* de \mathbb{R} si elle est définie au voisinage de ce point et continue en ce point.

REMARQUE 2.23. Notons que, dans la démarche inductive proposée dans la Définition 2.18, seul le dernier cran diffère des $p-1$ précédents. Pour les $p-1$ premiers crans, il faut en effet s'assurer que la fonction $f^{(k)}$ en jeu ($k = 0, \dots, p-2$) est dérivable sur tout l'intervalle ouvert $V(x_0)$ (qui peut être strictement inclus dans I , pourvu qu'il contienne x_0). Ce n'est que pour le dernier que l'on vérifie une propriété de dérivabilité ponctuelle, au point x_0 . Toutes les fonctions dérivées

$f = f^{(0)}, f' = f^{(1)}, f'' = f^{(2)}, \dots, f^{(p-1)}$, sont bien définies dans tout l'intervalle $V(x_0)$. Les fonctions $f = f^{(0)}, f' = f^{(1)}, \dots, f^{(p-2)}$ sont en particulier toutes dérivables, donc continues d'après la Proposition 2.5, sur tout cet intervalle. Concernant la dernière de la liste (à savoir $f^{(p-1)}$), la seule information dont on dispose est qu'elle est dérivable (donc continue) au point x_0 et, *a priori*, sauf information supplémentaire, uniquement en ce point.

DÉFINITION 2.19 (fonctions de classe C^k sur un intervalle ouvert de \mathbb{R}). Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable à l'ordre $k \geq 1$ en tout point de I et que la fonction $f^{(k)} : I \rightarrow \mathbb{C}$ est continue sur I (f et ses k premières dérivées $f', \dots, f^{(k)}$ le sont alors du fait de la Proposition 2.5), on dit que f est de classe C^k sur I (à valeurs complexes). Les fonctions (à valeurs complexes) de classe C^0 sur I sont par définition les fonctions continues $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. Si I est un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point (mais non nécessairement ouvert), on dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^k sur I si et seulement si elle est restriction à I d'une fonction de classe C^k sur un intervalle ouvert \tilde{I} contenant I .

2.5.2. Formule de Taylor-Young. C'est au mathématicien anglais Brook Taylor (1685-1731) que l'on doit l'idée du développement en série d'infinésimaux (dans la « gamme » des fonctions puissance $h \mapsto h^k$, $k = 0, 1, \dots$) des fonctions réelles au voisinage d'un point. L'introduction et les chapitres I à VI du passionnant traité de Lagrange [**Lag**] mettent bien en lumière la genèse des idées qui ont conduit à de tels résultats.

THEORÈME 2.6 (formule de Taylor-Young²⁵). Soit f une fonction à valeurs complexes définie dans un intervalle ouvert $V =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ ($x_0 \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$) et dérivable $p + 1$ fois au point x_0 . On peut écrire, avec les notations de Landau (cf. (2.39), Définition 2.15) :

$$(2.46) \quad \forall h \in] - \epsilon, \epsilon[, f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{p+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(|h|^{p+1}).$$

La fonction polynomiale :

$$(2.47) \quad T_{p+1}[f; x_0] : h \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=0}^{p+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k$$

est appelée partie principale de la série de Taylor de f en x_0 à l'ordre $p + 1$, tandis que la fonction différence :

$$R_{p+1}[f; x_0] : h \in] - \epsilon, \epsilon[\mapsto f(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{p+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k = o(|h|^{k+1})$$

est appelée reste de la série de Taylor de f en x_0 à l'ordre $p + 1$.

REMARQUE 2.24 (le cas $p = 0$). On observe que, pour $p = 0$ (f différentiable en x_0), la formule (2.46) n'est rien d'autre que la formule (2.18). La partie principale

$$h \in \mathbb{R} \mapsto f(x_0) + hf'(x_0)$$

25. Au nom de Brook Taylor, est ici attaché celui du mathématicien anglais bien plus proche, William Henry Young (1863-1942), qui posa les jalons du calcul différentiel moderne. La formule de Taylor-Young est celle, de toutes les formules de Taylor, qui se prête le moins au calcul, car elle n'est pas explicite. En revanche, c'est celle qui fait appel au jeu d'hypothèses le plus restreint possible, d'où son grand intérêt du point de vue théorique.

correspond alors à l'application affine tangente (si l'on pose $h = x - x_0$).

REMARQUE 2.25 (notion d'ordre du développement de Taylor-Young). Le degré (comme fonction polynomiale) de la partie principale $T_{p+1}[f; x_0]$ de la série de Taylor impliquée dans la formule (2.46) est $p+1$. On constate que le reste $R_{p+1}[f; x_0]$ impliqué dans cette même formule (2.46) se trouve être un $o(|h|^{p+1})$ au voisinage de $h = 0$, donc *a fortiori* un $O(|h|^{p+1})$ au voisinage de $h = 0$, seule information que l'on retienne sur le reste pour définir l'ordre. L'entier $p + 1$ est appelé *ordre du développement de Taylor-Young* (2.46), lorsque celui-ci est possible (donc sous les hypothèses du Théorème 2.6). Si par exemple f est seulement différentiable au point x_0 ($p = 0$), f admet juste un développement de Taylor-Young à l'ordre 1.

DÉMONSTRATION. Il n'y a pas de restriction à supposer que f soit une fonction réelle (on raisonne sinon avec les fonctions réelles $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$, puis l'on ajoute, après avoir pris soin de multiplier la seconde par i , les formules (2.46) écrites pour ces deux fonctions réelles).

On suppose donc que $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ admet une dérivée à l'ordre $p + 1$ en x_0 . Les dérivées jusqu'à l'ordre p de $h \mapsto f(x_0 + h)$ existent et sont continues sur un segment $[-\eta, \eta]$ avec $0 < \eta \leq \epsilon$ (cf. la Définition 2.18). La fonction polynomiale

$$T_p[f; x_0] : h \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k$$

admet des dérivées à tout ordre en tout point de \mathbb{R} : la fonction dérivée de $h \mapsto h^k$ est en effet $h \mapsto kh^{k-1}$ si $k \in \mathbb{N}^*$, et est la fonction identiquement nulle si $k = 0$. On constate ainsi que :

$$\left[\frac{d^k}{dh^k} T_p[f; x_0] \right]_{h=0} = f^{(k)}(x_0) = \left[\frac{d^k}{dh^k} f(x_0 + h) \right]_{h=0} \quad \forall k = 0, \dots, p.$$

Considérons les deux fonctions :

$$\begin{aligned} \psi : h \in]-\epsilon, \epsilon[&\mapsto f(x_0 + h) - T_p[f; x_0](h) = \frac{f^{(p+1)}(x_0)}{(p+1)!} h^{p+1} + R_{p+1}[f; x_0](h) \\ \varphi : h \in \mathbb{R} &\mapsto h^{p+1}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-\eta, \eta] \setminus \{0\}, \\ \frac{\psi^{(p)}(h) - \psi^{(p)}(0)}{\varphi^{(p)}(h) - \varphi^{(p)}(0)} &= \frac{1}{(p+1)!} \frac{f^{(p)}(x_0 + h) - f^{(p)}(x_0)}{h} = \frac{f^{(p+1)}(x_0)}{(p+1)!} + o(1) \end{aligned}$$

Or la règle de l'Hôpital (Proposition 2.10, appliquée ici avec $a = -\eta$, $b = \eta$, $x_0 = 0$), appliquée ici p fois de suite, assure que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in]-\eta, \eta[\setminus \{0\}}} \frac{\psi(h)}{\varphi(h)} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in]-\eta, \eta[\setminus \{0\}}} \frac{\psi'(h)}{\varphi'(h)} = \dots = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in]-\eta, \eta[\setminus \{0\}}} \frac{\psi^{(p)}(h)}{\varphi^{(p)}(h)} = \frac{f^{(p+1)}(x_0)}{(p+1)!}.$$

En effet, l'application de la règle peut être itérée p fois car les dérivées successives de φ jusqu'à l'ordre p inclus ne s'annulent qu'en $h = 0$ sur \mathbb{R} , tandis que les dérivées successives de ψ jusqu'à l'ordre $p - 1$ inclus s'annulent aussi en $h = 0$. On trouve

ainsi :

$$(2.48) \quad \begin{aligned} \forall h \in]-\eta, \eta[, f(x_0 + h) &= T_p[f; x_0](h) + \left(\frac{f^{(p+1)}(x_0)}{(p+1)!} + o(1) \right) h^{p+1} \\ &= T_{p+1}[f; x_0](h) + o(|h|^{p+1}). \end{aligned}$$

Comme la fonction $h \mapsto f(x_0 + h) - T_{p+1}[f; x_0](h)$ est définie dans $]-\epsilon, \epsilon[$, on peut bien remplacer (2.48) par (2.46). \square

2.5.3. La formule de Taylor-Lagrange. Le défaut dont est entaché la formule de Taylor-Young, si l'on entend en faire un outil opérationnel (par exemple de calcul numérique), est qu'aucune information quantitative précise (autre que le fait qu'il s'agisse d'un $o(|h|^{p+1})$) n'est donnée concernant le reste

$$h \in]-\epsilon, \epsilon[\mapsto R_{p+1}[f; x_0](h)$$

dans la formule (2.46). Comment en particulier ce reste peut-il être estimé dans un segment $[-\eta, \eta]$, lorsque $0 < \eta < \epsilon$ est précisé? Les mathématiciens tels Lagrange, pour qui la formule de Taylor se devait d'être, à une époque où les moyens de calcul puissants n'existaient pas, un outil avant tout de calcul numérique, l'avaient bien compris. Il est intéressant de suivre la présentation de la formule de Taylor-Lagrange directement aux sources, c'est-à-dire en se mettant dans les pas de Lagrange lui-même [**Lag**] (chapitre VI), ce que nous ne ferons pas ici dans cette présentation moderne. Les hypothèses sont certes plus contraignantes qu'elles ne l'étaient dans la formule de Taylor-Young (Théorème 2.6), mais le prix à payer en vaut la chandelle, car cette fois, le résultat (maintenant presque explicite) est utilisable dans la pratique autrement que théoriquement. Contrairement à la formule de Taylor-Young (qui est avant tout une formule « locale »), la formule de Taylor-Lagrange est une formule « globale ». Comme la formule des accroissements finis (Corollaire 2.2) et le théorème de Rolle (Théorème 2.4) dont d'ailleurs elle dérive, elle ne concerne cependant que les fonctions à valeurs réelles.

THEORÈME 2.7 (formule de Taylor-Lagrange²⁶). *Soit I un intervalle non réduit à un point de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p sur I (cf. Définition 2.19). Soient $a < b$ deux points de I , tels que la fonction continue $f^{(p)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ soit dérivable sur $]a, b[$. Alors :*

$$(2.49) \quad \begin{aligned} \exists c \in]a, b[, f(b) &= T_p[f; a](b-a) + \frac{f^{(p+1)}(c)}{(p+1)!} (b-a)^{p+1} \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(p+1)}(c)}{(p+1)!} (b-a)^{p+1}. \end{aligned}$$

REMARQUE 2.26. Lorsque $p = 0$, il s'agit de la formule des accroissements finis (formule (2.25), Corollaire 2.2). Lorsqu'on écrit la formule (2.49) avec une fonction f de classe C^{p+1} et non plus de classe C^p , on en déduit la formule de Taylor-Young (2.46) en tout point x_0 intérieur à I . En effet, la continuité en x_0 de $f^{(p+1)}$ donne,

26. Mathématicien d'origine italienne (il est né à Turin, de parents italiens), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) a introduit le calcul variationnel en mécanique, a développé la mécanique analytique, s'est intéressé bien sûr au calcul infinitésimal, mais aussi à l'astronomie. Ses traités de cours, professés à l'Ecole Polytechnique et à l'Ecole Normale, comme celui republié en 1813 [**Lag**], ont incontestablement façonné l'analyse moderne.

si on écrit la formule (2.49) entre $a = 0$ et $b = 1$ pour la fonction $x \mapsto f(x_0 \pm xh)$ avec $h > 0$ assez petit :

$$\begin{aligned} f(x_0 \pm h) &= T_p[f; x_0](\pm h) + \frac{f^{(p+1)}(x_0 \pm c_h)}{(p+1)!} (\pm h)^{p+1} \text{ pour un } c_h \in]0, h[\\ &= T_p[f; x_0](\pm h) + \left(\frac{f^{(p+1)}(x_0)}{(p+1)!} + o(1) \right) (\pm h)^{p+1} \\ &= T_{p+1}[f; x_0](\pm h) + o(h^{p+1}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0_+. \end{aligned}$$

REMARQUE 2.27 (notion d'ordre du développement de Taylor-Lagrange). Comme pour la formule de Taylor-Young (Remarque (2.25)), on persiste à appeler *ordre de la formule de Taylor-Lagrange* (2.49) (écrite au point a) l'entier $p+1$. Si $f^{(p+1)}$ est (en plus des hypothèses du Théorème 2.7) bornée sur $]a, b[$, cette formule (2.49), écrite cette fois entre a et $a+h$ avec $0 \leq h \leq b-a$, s'écrit en effet :

$$f(a+h) = T_p[f; a](h) + O(h^{p+1})$$

au voisinage de $h = 0$ dans $[0, b-a]$, ce qui est en accord avec le comportement

$$f(a+h) = T_{p+1}[f; a](h) + o(h^{p+1})$$

que donnerait la formule de Taylor-Young (2.47) écrite à l'ordre $p+1$ au voisinage du point a (car un $o(h^{p+1})$ est *a fortiori* un $O(h^{p+1})$).

DÉMONSTRATION. On pose

$$(2.50) \quad \alpha_p := \frac{(p+1)!}{(b-a)^{p+1}} \left(f(b) - T_p[f; a](b-a) \right).$$

La fonction

$$(2.51) \quad g_p : x \in [a, b] \mapsto f(b) - T_p[f; x](b-x) - \frac{\alpha_p}{(p+1)!} (b-x)^{p+1}$$

a été construite pour que $g_p(a) = 0$ (par le choix précisément de la constante α_p). Mais on constate que l'on a aussi $g_p(b) = 0$ car $T_p[f; b](0) = f(b)$. Comme $f^{(p)}$, cette fonction est dérivable sur $]a, b[$ par hypothèses. On peut donc appliquer le théorème de Rolle (Théorème 2.4). Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $g'_p(c) = 0$. Or, puisque

$$T_p[f; x](b-x) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k,$$

on a (en utilisant la règle de dérivation d'un produit, cf. le cours de MIS101) :

$$\begin{aligned} \forall x \in]a, b[, \\ \frac{d}{dx} [T_p[f; x](b-x)] &= \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k - \sum_{k=1}^p \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{p+1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} - \sum_{k=1}^p \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} \\ &= \frac{f^{(p+1)}(x)}{p!} (b-x)^p. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall x \in]a, b[, \quad g'_p(x) = -\frac{f^{(p+1)}(x)}{p!} (b-x)^p + \frac{\alpha_p}{p!} (b-x)^p.$$

On a donc $g'(c) = 0$ avec $c \in]a, b[$ si et seulement si $\alpha_p = f^{(p+1)}(c)$. En reportant dans (2.50), on obtient bien la formule (2.49) voulue. \square

Il existe une version que l'on pourrait qualifier de « décentrée » de la formule de Taylor-Lagrange. Nous donnons ici cet énoncé à titre d'exercice. Comme ce résultat concerne l'interpolation des fonctions réelles par les fonctions polynomiales (qui, elles, comme les fonctions rationnelles, sont codables en machine, alors qu'une fonction quelconque ne l'est pas en règle générale!), on devinera aisément son importance dans tous les champs où informatique et calcul numérique sont impliqués.

PROPOSITION 2.13 (formule de Taylor-Lagrange et interpolation polynomiale). *Soit I un intervalle non réduit à un point de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p sur I (cf. Définition 2.19). Soient $a < b$ deux points de I , tels que la fonction continue $f^{(p)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ soit dérivable sur $]a, b[$. Soient $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_p \leq b$ $p + 1$ points distincts du segment $[a, b]$. Soit $T_p[f; x_0, \dots, x_p]$ l'unique polynôme²⁷ de degré p tel que*

$$(2.52) \quad f(x_k) = T_p[f; x_0, \dots, x_p](x_k), \quad k = 0, \dots, p.$$

Alors :

$$(2.53) \quad \forall x \in [a, b], \\ \exists c_x \in]a, b[, \quad f(x) - T_p[f; x_0, \dots, x_p](x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_p)}{(p + 1)!} f^{(p+1)}(c_x).$$

DÉMONSTRATION. Comme celle de la formule de Taylor-Lagrange (2.49), elle repose sur le théorème de Rolle (Théorème 2.4), appliqué cette fois, non plus une fois, mais plusieurs fois. La formule (2.53) est vraie si x est égal à l'un des x_k , $k = 0, \dots, p$, puisqu'alors les deux membres sont nuls. On peut donc supposer $x \neq x_k$, $k = 0, \dots, p$. On pose :

$$\alpha(x) := \frac{(p + 1)!}{(x - x_0) \dots (x - x_p)} \left(f(x) - T_p[f; x_0, \dots, x_p](x) \right)$$

(on notera l'analogie avec la définition (2.50) de α_p dans la preuve de la formule (2.49)). On considère la fonction :

$$g : t \in [a, b] \mapsto f(t) - T_p[f; x_0, \dots, x_p](t) - \frac{\alpha(x)}{(p + 1)!} (t - x_0) \dots (t - x_p)$$

(on notera encore l'analogie avec la construction (2.51) de la fonction g_p dans la preuve de la formule 2.49). Cette fonction g (qui est de classe C^p sur $[a, b]$ et de plus dérivable à l'ordre $p + 1$ en tout point de $]a, b[$) s'annule aux $p + 2$ points (distincts) x_0, \dots, x_p, x de $[a, b]$. D'après le théorème de Rolle, la fonction g' s'annule en au moins $(p + 2) - 1 = p + 1$ points de $]a, b[$ (un dans chaque intervalle entre deux points distincts consécutifs pris dans la liste des $p + 2$ points $\{x_0, \dots, x_p, x\}$). Suivant le même principe, la fonction $g'' = g^{(2)}$ s'annule (toujours en appliquant à nouveau le théorème de Rolle) en au moins $(p + 1) - 1 = p$ points distincts de $]a, b[$. On peut

27. Qu'il existe un unique tel polynôme (dit d'ailleurs *polynôme d'interpolation de Lagrange aux points x_0, \dots, x_p*) relève de l'algèbre linéaire : le \mathbb{R} -espace des fonctions polynomiales de degré p est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $p + 1$. Or le système (2.52) se présente comme un système linéaire sans second membre de $p + 1$ équations en $p + 1$ inconnues en les coefficients du polynôme inconnu cherché. Le déterminant de ce système est en fait un déterminant de Vandermonde non nul (cf. le cours d'Algèbre 1 ce semestre).

poursuivre ainsi, jusqu'à trouver, au termes de $p + 1$ applications du théorème de Rolle (toujours justifiées au vu des hypothèses sur f), que $g^{(p+1)}$ s'annule en au moins $1 = (p + 2) - (p + 1)$ point c_x de $]a, b[$, ce qui signifie, puisque $T_p[f; x_0, \dots, x_p]$ est une fonction polynomiale de degré p , que

$$g^{(p+1)}(c_x) = f^{(p+1)}(c_x) - \alpha(x) = 0.$$

Ceci achève la preuve de la formule (2.53). □

2.5.4. L'inégalité de Taylor-Lagrange. Du fait qu'elle repose, comme on vient de le voir (cf. la preuve du Théorème 2.7) sur le théorème de Rolle, la formule de Taylor-Lagrange (2.49) du Théorème 2.7 (comme d'ailleurs la formule des accroissements finis) est fautive pour les fonctions à valeurs complexes. Concernant les accroissements finis, nous avons cependant pu sauver une partie des meubles en montrant que les fonctions à valeurs complexes obéissent à l'inégalité des accroissements finis (2.28). Il en sera de même ici, et nous pouvons énoncer, pour les fonctions à valeurs complexes cette fois, l'*inégalité de Taylor-Lagrange* (bien souvent tout aussi efficace dans la pratique que ne l'aurait été une égalité ici en défaut).

THEORÈME 2.8 (inégalité de Taylor-Lagrange). *Soit I un intervalle non réduit à un point de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^p sur I (cf. Définition 2.19), à valeurs complexes cette fois. Soient $a < b$ deux points de I , tels que la fonction continue $f^{(p)} : I \rightarrow \mathbb{C}$ soit dérivable sur $]a, b[$. Alors :*

$$(2.54) \quad |f(b) - T_p[f; a](b-a)| = \left| f(b) - \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in]a, b[} |f^{(p+1)}(x)|.$$

DÉMONSTRATION. Elle reprend pratiquement celle de l'inégalité des accroissements finis (2.28) (Théorème 2.5). Soit \vec{V} le vecteur du plan ayant pour affixe le nombre complexe affixe $f(b) - T_p[f; a](b-a)$. On suppose $\vec{V} \neq \vec{0}$ (car sinon l'inégalité (2.54) est vraie, le membre de gauche étant nul). Soit $\vec{v} = (\nu_1, \nu_2)$ le vecteur unitaire $\vec{V}/\|\vec{V}\|$. Si $f(x) = u(x) + iv(x)$, on introduit la fonction

$$\begin{aligned} F : x \in [0, 1] &\mapsto \\ &\nu_1 \left(u(a + x(b-a)) - T_p[u; a](x(b-a)) \right) + \\ &+ \nu_2 \left(v(a + x(b-a)) - T_p[v; a](x(b-a)) \right). \end{aligned}$$

On observe que :

$$(2.55) \quad \begin{aligned} F(1) - F(0) &= \nu_1 \left(u(b) - T_p[u; a](b-a) \right) + \nu_2 \left(v(b) - T_p[v; a](b-a) \right) \\ &= |f(b) - T_p[f; a](b-a)|. \end{aligned}$$

La fonction F est une fonction réelle de classe C^p sur $[a, b]$, dérivable à l'ordre $p + 1$ sur $]a, b[$ dont, en plus, tous les nombres dérivés $F^{(k)}(0)$, $k = 0, \dots, p$, sont nuls (on le vérifie facilement). On peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange

(2.49) et conclure qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que :

$$\begin{aligned} F(1) - F(0) &= \frac{F^{(p+1)}(c)}{(p+1)!} \\ (2.56) \quad &= \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \left(\nu_1 u^{(p+1)}(a+c(b-a)) + \nu_2 v^{(p+1)}(a+c(b-a)) \right). \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le plan (vue en Terminale) implique :

$$\begin{aligned} \left| \nu_1 u^{(p+1)}(a+c(b-a)) + \nu_2 v^{(p+1)}(a+c(b-a)) \right| &\leq \|\nu\| |f^{(p+1)}(a+c(b-a))| \\ &= |f^{(p+1)}(a+c(b-a))| \\ &\leq \sup_{x \in]a, b[} |f^{(p+1)}(x)|. \end{aligned}$$

On a donc bien, du fait de (2.56) :

$$F(1) - F(0) = |F(1) - F(0)| \leq \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in]a, b[} |f^{(p+1)}(x)|.$$

En reportant dans (2.55), on obtient bien l'inégalité (2.54) voulue. \square

2.5.5. La formule de Taylor avec reste intégral. Un reproche que l'on peut encore faire à la formule de Taylor-Lagrange (2.49), écrite à l'ordre $p+1$ lorsque cela est possible, outre le fait qu'elle ne s'applique qu'aux fonctions à valeurs réelles, est que le point $c \in]a, b[$ qui y figure n'est pas explicité : la seule information dont on dispose est $c \in]a, b[$. Pour pallier à cet état de fait, nous allons, sous des hypothèses un peu plus contraignantes que celles du Théorème 2.7, proposer une formule où le reste soit cette fois en un certain sens complètement explicite. Cette formule repose sur le théorème fondamental de l'analyse que l'on rappelle en préambule ici (voir par exemple [Ymis], section 3.8.2) :

THEORÈME 2.9 (théorème fondamental de l'analyse). *Soit $[\alpha, \beta]$ un segment de \mathbb{R} et g une fonction de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$ (au sens de la Définition 2.19 : g est dérivable sur $[\alpha, \beta]$ et $g' : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ est continue). On a*

$$(2.57) \quad \forall x \in [\alpha, \beta], \quad g(x) - g(\alpha) = \int_{\alpha}^x g'(t) dt.$$

THEORÈME 2.10 (formule de Taylor avec reste intégral). *Soit I un intervalle non réduit à un point de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes de classe C^{p+1} sur I (cf. Définition 2.19), où $p \in \mathbb{N}$. Soient $a < b$ deux points de I . On a*

$$\begin{aligned} f(b) &= T_p[f; a](b-a) + \frac{(b-a)^{p+1}}{p!} \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(a+t(b-a)) dt \\ (2.58) \quad &= \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{p+1}}{p!} \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(a+t(b-a)) dt. \end{aligned}$$

REMARQUE 2.28. Le reste est cette fois « explicite », hormis le fait qu'il implique une intégrale pour laquelle on ne dispose en général pour le calcul que de méthodes numériques²⁸. Autre avantage, la formule s'applique indifféremment aux

²⁸. Vouloir par exemple la calculer par parties reviendrait de fait à redémontrer la formule de Taylor, ce qui serait tourner en rond ... Au fait, la valeur de cette intégrale est

$$p! \frac{f(b) - T_p[f; a](b-a)}{(b-a)^{p+1}}.$$

fonctions à valeurs réelles ou complexes. Le seul inconvénient vraiment reste que les hypothèses sont plus fortes que pour la formule de Taylor-Lagrange (2.49).

REMARQUE 2.29 (ordre de la formule de Taylor avec reste intégral). La partie principale du développement de Taylor (au point a) impliquée dans (2.58), soit ici $T_p[f; a](b - a)$, est exactement la même que celle impliquée dans la formule de Taylor-Lagrange (2.49). Il faut toutefois noter que les hypothèses sont ici plus contraignantes, car la fonction f doit cette fois être de classe C^{p+1} sur $[a, b]$, *i.e.* la dérivée $f^{(p+1)}$ sur $]a, b[$ doit pouvoir se prolonger en une fonction continue sur $[a, b]$. La formule (2.58), écrite cette fois entre a et $a + h$, avec $0 \leq h \leq b - a$, s'écrit :

$$f(a + h) = T_p[f; a](h) + O(h^{p+1})$$

au voisinage de $h = 0$ dans $[0, b - a]$. Il est donc encore naturel de définir l'ordre de la formule (2.58) comme étant encore $p + 1$ (en accord donc avec les remarques 2.25 et 2.27 précédentes, même si les hypothèses sont ici plus lourdes).

REMARQUE 2.30 (Attention aux facteurs factorielle!). Attention au facteur $1/p!$ (au lieu de $1/(p + 1)!$ devant le reste de la formule de Taylor-Lagrange (2.49) à l'ordre $p + 1$), devant le reste cette fois de la formule de Taylor avec reste intégral (2.58) écrite au même ordre $p + 1$. Il n'existe malheureusement pas pour parer à ce problème de « truc » mnémotechnique !

DÉMONSTRATION. La preuve utilise une astuce au départ, mais est ensuite très facile (c'est la plus facile des preuves des trois formules de Taylor). On introduit (voilà l'astuce, sortie du chapeau!) la fonction

$$t \in [0, 1] \mapsto g(t) := \sum_{k=0}^p \frac{(1-t)^k}{k!} f^{(k)}(a + t(b-a)) (b-a)^k.$$

On note que $g(0) = T_p[f; a](b-a)$ et que $g(1) = f(b)$. Cette fonction g est de classe C^1 sur $[a, b]$ puisque f est de classe $C^{(p+1)}$ sur $[a, b]$ par hypothèses. On dérive la fonction g sur $[0, 1]$ en utilisant la règle de dérivation des produits ainsi que la règle de Leibniz de dérivation des fonctions composées (voir le cours de MIS101, [Ymis], chapitre 3). On a ainsi :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], g'(t) &= \\ &= f'(a + t(b-a)) (b-a) + \sum_{k=1}^n \left[-\frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(a + t(b-a)) (b-a)^k \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(a + t(b-a)) (b-a)^{k+1} \right]. \end{aligned}$$

On constate que les termes de cette somme « télescopique » se détruisent deux-à-deux tous (sauf un, le dernier) lors de l'addition, et qu'il ne reste au final que :

$$(2.59) \quad \forall t \in [0, 1], g'(t) = \frac{(1-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(a + t(b-a)) (b-a)^{p+1}.$$

On conclut à appliquant le théorème fondamental de l'analyse (Théorème 2.9) à la fonction g sur $[0, 1]$, ce qui donne :

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt,$$

ce qui est, compte tenu de $g(0) = T_p[f; a](b - a)$, $g(1) = f(b)$, et (2.59), la formule (2.58) voulue. \square

2.6. Développements limités (DL) des fonctions en un point

2.6.1. Développement limité d'une fonction à un ordre donné en un point donné de \mathbb{R} . L'étude locale des fonctions numériques (à valeurs réelles ou complexes) au voisinage d'un point x_0 de \mathbb{R} s'avère capitale pour beaucoup d'applications pratiques, qu'elles relèvent des mathématiques, du calcul scientifique, ou de l'informatique. L'un des objectifs majeurs en est l'approximation de plus en plus précise de la fonction en question par des fonctions plus simples, en l'occurrence des fonctions polynomiales, codables, elles, en machine²⁹.

On a observé (cf. l'exemple 2.13) que, si $k_1 < k_2$ sont deux entiers positifs ou nuls distincts, alors $|h|^{k_2} = o(|h|^{k_1})$ au voisinage de $h = 0$ dans \mathbb{R} . Ceci permet d'établir une hiérarchie des fonctions $h \mapsto |h|^k$, $k \in \mathbb{N}$, dans cet ordre :

$$(2.60) \quad h \mapsto |h|^0 = 1, \quad h \mapsto |h|, \quad h \mapsto |h|^2, \dots, \quad h \mapsto |h|^k, \quad h \mapsto |h|^{k+1}, \dots,$$

de manière à ce que, dans cette « gamme » ou « échelle » ainsi constituée, une fonction soit un o de la fonction précédente au voisinage de $h = 0$ dans \mathbb{R} . Une telle liste de fonctions ainsi ordonnée (une fonction de la liste est, au voisinage de $h = 0$, un o de celle qui la précède) constitue ce que l'on appelle une *échelle de comparaison* pour l'étude des fonctions numériques au voisinage de l'origine. Cette échelle particulière est appelée ici *échelle des fonctions puissance* (au voisinage de l'origine).

DÉFINITION 2.20 (développement limité en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, dans l'échelle des fonctions puissance). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction numérique définie dans un intervalle I non réduit à un point et dont l'adhérence contient x_0 . Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité (en abrégé DL) à l'ordre n au point x_0 dans l'échelle de comparaison des fonctions puissance si l'on peut écrire :

$$(2.61) \quad \forall h \in I_{x_0} = -x_0 + I, \quad f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + o(|h|^n)$$

(au voisinage de 0 dans I_{x_0}),

où les $n + 1$ constantes a_0, \dots, a_n sont $n + 1$ nombres complexes.

REMARQUE 2.31. On n'impose pas ici à l'intervalle I d'être ouvert. Par exemple, la fonction f peut fort bien n'être définie que dans un voisinage $]x_0 - \epsilon, x_0]$ ou bien $[x_0, x_0 + \epsilon[$, c'est-à-dire seulement à gauche (*resp.* à droite) du point x_0 .

Pour que la Définition 2.20 soit consistante, il faut s'assurer que les constantes a_0, \dots, a_n impliquées dans (2.61), si toutefois elles existent, sont bien uniques. C'est ce qu'assure précisément la proposition suivante.

PROPOSITION 2.14 (unicité du DL à l'ordre n en un point $x_0 \in \mathbb{R}$). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction numérique définie dans un intervalle I non réduit à un point et dont l'adhérence contient x_0 , admettant un DL à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ (du type (2.61)) au voisinage de x_0 dans I . Alors les $n + 1$ constantes complexes a_0, \dots, a_n impliquées dans (2.61) sont parfaitement déterminées en termes de la fonction f .

²⁹. On code une fonction polynomiale de degré donné p comme un vecteur ligne de longueur $p + 1$, à savoir le vecteur de ses coefficients.

DÉMONSTRATION. On observe que, si l'on a (2.61), alors nécessairement :

$$\begin{aligned} a_0 &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in I_{x_0}}} f(x_0 + h) \\ a_1 &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in I_{x_0}}} \frac{f(x_0 + h) - a_0}{h} \\ a_2 &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in I_{x_0}}} \frac{f(x_0 + h) - a_0 - a_1 h}{h^2}, \dots \\ a_{k+1} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in I_{x_0}}} \frac{f(x_0 + h) - \sum_{l=0}^k a_l h^l}{h^{k+1}}, \dots \\ a_n &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in I_{x_0}}} \frac{f(x_0 + h) - \sum_{l=0}^{n-1} a_l h^l}{h^n}. \end{aligned}$$

Ceci prouve bien que les coefficients a_k , $k = 0, \dots, n$, se calculent de proche en proche à partir de la connaissance de la fonction f dans I (ou, ce qui revient au même, à partir de la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$ dans $I_{x_0} = -x_0 + I$), et sont donc parfaitement déterminés dès que cette fonction est connue. \square

Un exemple très important de DL est celui qu'ont les fonctions numériques $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ (où I est un intervalle non réduit à un point et contenant un point donné $x_0 \in \mathbb{R}$), dérivables à l'ordre $p+1$ en x_0 . On rappelle (cf. la section 2.5.1) que cela signifie que f est de classe C^p (au sens de la Définition 2.19) dans un intervalle (non nécessairement ouvert, mais non réduit à un point) $V(x_0)$ (contenu dans I et contenant x_0) et que la fonction $f^{(p)} : V(x_0) \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable au point x_0 (seulement à gauche ou à droite si x_0 est une borne de $V(x_0)$).

PROPOSITION 2.15 (différentiabilité à l'ordre $p+1$ et DL). *Soit I un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point et $x_0 \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes définie dans I et dérivable à l'ordre $p+1$ (où $p \in \mathbb{N}$) au point x_0 . Alors f admet un DL à l'ordre $p+1$ au point x_0 , ce DL étant le développement de Taylor-Young à l'ordre $p+1$, à savoir :*

$$(2.62) \quad \forall h \in I_{x_0} = -x_0 + I, \quad f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{p+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(|h|^{p+1}).$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer la formule de Taylor-Young ((2.46), Théorème 2.7) à la fonction f . On sait en effet qu'il est possible (suivant la Définition 2.19) de prolonger f en une fonction de classe C^p dans un intervalle ouvert $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ contenant x_0 et ayant une dérivée à l'ordre $p+1$ au point x_0 . Le fait que (2.62) soit le DL de f à l'ordre $p+1$ au point x_0 résulte du résultat d'unicité prouvé dans la Proposition 2.14. \square

REMARQUE 2.32 (Attention!). Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ (I contenant x_0 et non réduit à un point) a un DL à l'ordre 1 en x_0 , on a

$$\forall h \in I_{x_0}, \quad f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + o(|h|),$$

ce qui signifie (cf. la Définition 2.4 et plus particulièrement la formulation (2.18)) que f est dérivable en x_0 , de nombre dérivé $f'(x_0) = a_1$. Mais, si f est dérivable au voisinage de x_0 et admet un DL à l'ordre 2 en x_0 , soit :

$$(2.63) \quad \forall h \in I_{x_0}, f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + o(|h|^2),$$

il ne faut surtout pas croire que ceci implique que f admette une dérivée à l'ordre 2 en x_0 . Par exemple, la fonction

$$(2.64) \quad f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

admet pour DL à l'ordre 2 en 0 :

$$f(h) = o(|h|^2) \quad (a_0 = a_1 = a_2 = 0) ;$$

elle est donc dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$; la fonction f est certes aussi dérivable en tout point $x \neq 0$, mais la fonction f' est définie en dehors de l'origine par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2}$$

(on utilise la règle de dérivation d'un produit et la règle de Leibniz, cf. le cours de MIS101, [Ymis], chapitre 3) et n'a pas donc de limite lorsque x tend vers 0 (puisque la limite, lorsque x tend vers 0, de $x \mapsto \cos(1/x^2)$ n'existe pas, cf. l'exemple 2.3 de la fonction $x \mapsto \sin(1/|x|)$ où la situation est identique) ; la fonction f proposée en (2.64) n'a donc pas de dérivée seconde en 0 car sa fonction dérivée n'est pas continue en 0.

EXEMPLE 2.15 (DL des fonctions puissance et généralisation de la formule du binôme). On sait que si $\alpha \in \mathbb{N}$:

$$(2.65) \quad \forall h \in \mathbb{R}, (1+h)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} h^k,$$

où les nombres (entiers naturels) définis par :

$$(2.66) \quad \forall k \in \{0, \dots, \alpha\}, \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{k! (\alpha - k)!} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)}{k!}$$

désignent les *coefficient binomiaux*³⁰ ; la formule bien connue (2.65) n'est rien d'autre en effet qu'un cas particulier de la *formule du binôme* (cf. le cours de MIS101, [Ymis], section 1.9.6). Si maintenant α désigne un nombre complexe, la fonction

$$(2.67) \quad x \in] - 1, +\infty[\mapsto (1+x)^\alpha := \exp(\alpha \ln(1+x))$$

est une fonction (à valeurs complexes) admettant des dérivées à tout ordre en tout point de $] - 1, +\infty[$ (en particulier en $x_0 = 0$), la k -ième fonction dérivée ($k \in \mathbb{N}^*$) de cette fonction (2.67) sur $] - 1, +\infty[$ étant la fonction :

$$x \in] - 1, +\infty[\mapsto \frac{d^k}{dx^k} [(1+x)^\alpha] = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1) (1+x)^{\alpha - k}.$$

30. On sait (cf. le cours de MIS101, [Ymis], chapitre 1, section 1.9.6) que $\binom{\alpha}{k}$ représente le nombre de parties à k éléments dans un ensemble contenant en tout α éléments.

On déduit alors de la Proposition 2.15 que, pour tout nombre complexe α , la fonction

$$x \in]-1, +\infty[\mapsto (1+x)^\alpha$$

admet, pour tout $p \in \mathbb{N}$, un DL à l'ordre $p+1$ en $x_0 = 0$, ce DL étant :

$$(2.68) \quad \forall h \in]-1, +\infty[, (1+h)^\alpha = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{\alpha}{k} h^k + o(|h|^{p+1}),$$

où les nombres complexes :

$$(2.69) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

($0! = 1$ par convention) désignent les nombres (cette fois complexes) que l'on appelle les *coefficients binomiaux généralisés*. On notera que lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$, les coefficients binomiaux généralisés $\binom{\alpha}{k}$ sont nuls dès que $k > \alpha$ et coïncident avec les coefficients binomiaux (2.66) dès que $k \leq \alpha$. Le DL (2.68) à l'ordre $p+1$ en 0 de la fonction $x \in]-1, 1[\mapsto (1+x)^\alpha$ apparaît ainsi comme une généralisation de la formule du binôme (2.65). Si $x_0 > 0$, on peut écrire, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\forall x \in]-1/x_0, +\infty[, (x_0+x)^\alpha = x_0^\alpha(1+x/x_0)^\alpha := \exp(\alpha \ln x_0) \times \exp(\alpha \ln(1+x/x_0)).$$

La fonction

$$x \in]-1/x_0, +\infty[\mapsto (x_0+x)^\alpha$$

admet donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, un DL à l'ordre $p+1$ en 0, soit :

$$(2.70) \quad \forall h \in]-1/x_0, +\infty[, (x_0+h)^\alpha = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{\alpha}{k} x_0^{\alpha-k} h^k + o(|h|^{p+1}).$$

Cette formule (2.70) (qui représente le DL à l'ordre $p+1$ de la fonction puissance $x \in]0, +\infty[\mapsto x^\alpha := \exp(\alpha \ln x)$ au point x_0) généralise la formule du binôme bien connue dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall h \in \mathbb{R}, (x_0+h)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x_0^{\alpha-k} h^k.$$

EXEMPLE 2.16 (exponentielle et logarithme). La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp x$ est une fonction indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} , toutes ses fonctions dérivées successives étant égales à $x \mapsto \exp x$ (cf. le cours de MIS101, [Ymis], chapitre 3). Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on déduit donc de la Proposition 2.15 que la fonction exponentielle admet le DL suivant à l'ordre $p+1$ en x_0 :

$$(2.71) \quad \forall h \in \mathbb{R}, \exp(x_0+h) = \sum_{k=0}^{p+1} \frac{\exp(x_0)}{k!} h^k + o(|h|^{p+1}).$$

La fonction $x \in]0, \infty[\mapsto \ln x$ est aussi une fonction indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} , et, comme :

$$\frac{d}{dx} [\ln x] = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0,$$

on a :

$$\forall k > 1, \frac{d^k}{dx^k} [\ln x] = \frac{(-1)(-2)\cdots(-1-(k-2))}{x^k} = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k} \quad \forall x > 0.$$

La fonction $x \in]0, +\infty[\mapsto \ln x$ admet donc, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, un DL à l'ordre $p + 1$ en tout point $x_0 \in]0, +\infty[$, ce DL étant donné par :

$$(2.72) \quad \forall h \in]-x_0, +\infty[, \ln(x_0 + h) = \ln x_0 + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{h}{x_0}\right)^k + o(|h|^{p+1}).$$

On a en particulier, si $x_0 = 1$:

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \dots + o(|h|^{p+1}) \text{ et } \ln(1-h) = -h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} - \dots + o(|h|^{p+1})$$

(noter qu'il n'y a que des signes $-$ dans le second développement ci-dessus).

EXEMPLE 2.17 (DL des fonctions trigonométriques). Les nombres dérivés successifs des fonctions \sin et \cos en un point x_0 se déduisent du fait que ces fonctions vérifient l'équation différentielle du second ordre $y'' = -y$. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^{2k}}{dx^{2k}}[\sin x] &= (-1)^k \sin x, & \frac{d^{2k}}{dx^{2k}}[\cos x] &= (-1)^k \cos x \\ \frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}}[\sin x] &= (-1)^k \cos x, & \frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}}[\cos x] &= (-1)^{k+1} \sin x. \end{aligned}$$

Les DL de Taylor à l'ordre $2p + 1$ des fonctions \sin et \cos en un point x_0 sont donc donnés (suivant la Proposition 2.15) par :

$$\begin{aligned} \sin(x_0 + h) &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \left(\frac{\sin x_0}{(2k)!} + h \frac{\cos x_0}{(2k+1)!} \right) h^{2k} + o(|h|^{2p+1}) \\ \cos(x_0 + h) &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \left(\frac{\cos x_0}{(2k)!} - h \frac{\sin x_0}{(2k+1)!} \right) h^{2k} + o(|h|^{2p+1}). \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $x_0 = 0$, on trouve pour les fonctions \sin et \cos les DL suivants à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(2.73) \quad \begin{aligned} \sin h &= \sum_{2k+1 \leq n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} h^{2k+1} + o(|h|^n) = h - \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120} - \dots + o(|h|^n) \\ \cos h &= \sum_{2k \leq n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} h^{2k} + o(|h|^n) = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} - \dots + o(|h|^n). \end{aligned}$$

2.6.2. Opérations sur les DL. Soient f et g deux fonctions à valeurs complexes, définies dans un intervalle I non réduit à un point et dont l'adhérence contient x_0 , ayant toutes deux des DL aux ordres respectifs m et n en x_0 , c'est-à-dire :

$$(2.74) \quad \begin{aligned} \forall h \in I_{x_0}, f(x_0 + h) &= \sum_{k=0}^m a_k h^k + o(|h|^m), \\ \forall h \in I_{x_0}, g(x_0 + h) &= \sum_{k=0}^n b_k h^k + o(|h|^n). \end{aligned}$$

On observe, en remplaçant chaque fois $f(x_0 + h)$ et $g(x_0 + h)$ par leurs DL (2.74) respectifs, que :

- la fonction somme $f + g : I \rightarrow \mathbb{C}$ admet un DL à l'ordre $\min(n, m)$ en x_0 , à savoir :

$$(2.75) \quad \forall h \in I_{x_0}, (f + g)(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} (a_k + b_k) h^k + o(|h|^{\min(m,n)}).$$

- la fonction produit $f \times g : I \rightarrow \mathbb{C}$ admet un DL à l'ordre $\min(n, m)$ en x_0 , à savoir :

$$(2.76) \quad \forall h \in I_{x_0}, (f \times g)(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \left(\sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} \right) h^k + o(|h|^{\min(m,n)}).$$

Il reste à parler du DL d'un quotient f/g lorsque les deux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ (avec $x_0 \in I$) ont toutes deux des DL du type (2.74) en x_0 , avec $b_0 \neq 0$ (i.e. $g(x_0) \neq 0$). Pour cela, il faut rappeler un algorithme avec lequel vous êtes sans doute moins familiers que celui de la division euclidienne des polynômes, celui de la *division des polynômes suivant les puissances croissantes*. Cet algorithme est, plus encore que celui de la division euclidienne, d'un usage très fréquent en informatique.

PROPOSITION 2.16 (algorithme de division suivant les puissances croissantes de deux polynômes). *Soient*

$$A(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m \quad \text{et} \quad B(X) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_n X^n$$

deux polynômes à coefficients complexes, avec $b_0 \neq 0$. Il existe une unique suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes, se calculant algorithmiquement, telle que

$$(2.77) \quad \forall k \in \mathbb{N}, X^{k+1} \text{ divise } A(X) - Q_k(X)B(X), \quad \text{où } Q_k(X) := \sum_{l=0}^k u_l X^l.$$

Le polynôme Q_k figurant dans (2.77) (de degré au plus égal à k) est dit "quotient" à l'ordre k dans la division de A par B suivant les puissances croissantes, tandis que le polynôme $A(X) - B(X)Q_k(X)$, divisible par X^{k+1} , est dit "reste" à l'ordre k dans la division de A par B suivant les puissances croissantes.

DÉMONSTRATION. L'unicité de la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ tient au fait que, pour h suffisamment voisin de 0 dans \mathbb{R} , on a, si $A(X) - Q_k(X)B(X) = R_k(X) = X^{k+1}S_k(X)$:

$$\frac{A(h)}{B(h)} = Q_k(h) + h^{k+1} \frac{S_k(h)}{B(h)} = \sum_{l=0}^k u_l h^l + o(|h|^k) \text{ au voisinage de } 0$$

(car $1/B$ est continue puisque $b_0 \neq 0$, donc bornée, au voisinage de $h = 0$, et qu'il en est de même de la fonction polynomiale S_k). La Proposition 2.14 assure l'unicité des coefficients u_0, \dots, u_k . Ceci étant valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a bien unicité de la suite $(u_k)_{k \geq 0}$.

Reste à trouver algorithmiquement les coefficients u_0, u_1, \dots , de proche en proche. Voici comment on procède, après avoir noté $A_0(X) := A(X)$:

- on pose $u_0 = a_0/b_0$, puis on forme $A_0(X) - u_0 B(X) = X A_1(X)$, avec $A_1(X) = a_{10} + a_{11} X + \cdots$ (soit $a_{10} = A_1(0)$);
- on pose $u_1 = a_{10}/b_0$, puis on forme $A_1(X) - u_1 B(X) = X A_2(X)$, avec $A_2(X) = a_{20} + a_{21} X + \cdots$ (soit $a_{20} = A_2(0)$);
- on pose $u_2 = a_{20}/b_0$, puis on forme $A_2(X) - u_2 B(X) = X A_3(X)$, avec $A_3(X) = a_{30} + a_{31} X + \cdots$ (soit $a_{30} = A_3(0)$), etc.

Les nombres u_0, u_1, u_2, \dots , sont ainsi construits algorithmiquement de proche en proche. \square

PROPOSITION 2.17 (quotient de deux DL). *Soient $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ (avec x_0 adhérent à I) deux fonctions ayant toutes deux des DL du type (2.74) en x_0 , avec $b_0 \neq 0$ (i.e. $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$). Alors la fonction f/g est définie dans un intervalle $J \subset I$ non réduit à un point et dont l'adhérence contient x_0 . Cette fonction $f/g : J \rightarrow \mathbb{C}$ admet en x_0 un DL à l'ordre $\min(m, n)$, donné par :*

$$(2.78) \quad \forall h \in J_{x_0}, \quad \frac{f}{g}(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{\min(m, n)} u_k h^k + o(|h|^{\min(m, n)}),$$

où les u_k , $k \in \inf(m, n)$ sont les $\min(m, n) + 1$ premiers termes de la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ obtenue en effectuant la division suivant les puissances croissantes (cf. la Proposition 2.16 ci-dessus) du polynôme $\sum_0^m a_k X^k$ (correspondant à la partie principale du DL de f en x_0 à l'ordre m) par le polynôme $\sum_0^n b_k X^k$ (correspondant à la partie principale du DL de g en x_0 à l'ordre n).

DÉMONSTRATION. La fonction g admet par hypothèses le DL à l'ordre n :

$$g(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n b_k h^k + o(|h|^n) \quad (\text{au voisinage de } 0 \text{ dans } I_{x_0})$$

en x_0 . Elle est donc continue en x_0 , une fois prolongée par continuité en posant $g(x_0) = b_0$. Comme $g(x_0) = b_0 \neq 0$, il existe un intervalle J inclus dans I , non réduit à un point et dont l'adhérence contient x_0 , tel que g ne s'annule pas dans J . La fonction f/g est bien définie dans J . On écrit, pour $h \in J_{x_0}$ assez voisin de 0 (suffisamment proche pour que $h \mapsto \sum_0^n b_k h^k$ ne s'annule pas, ce qui est possible car $b_0 \neq 0$) :

$$\begin{aligned} \frac{f}{g}(x_0 + h) &= \frac{\sum_0^m a_k h^k}{g(x_0 + h)} + \frac{o(|h|^m)}{g(x_0 + h)} = \frac{\sum_0^m a_k h^k}{g(x_0 + h)} + o(|h|^m) \\ &= \frac{\sum_0^m a_k h^k}{\sum_0^n b_k h^k + o(|h|^n)} + o(|h|^m) \\ &= \frac{\sum_0^m a_k h^k}{\sum_0^n b_k h^k} \left(\frac{1}{1 + (o(|h|^n)/\sum_0^n b_k h^k)} \right) + o(|h|^{\min(m, n)}) \\ &= \frac{\sum_0^m a_k h^k}{\sum_0^n b_k h^k} (1 + o(|h|^n)) + o(|h|^{\min(m, n)}). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{f}{g}(x_0 + h) &= \frac{\sum_0^m a_k h^k}{\sum_0^n b_k h^k} + o(|h|^{\min(n, m)}) \\ &= \sum_{k=0}^{\min(m, n)} u_k h^k + \frac{h^{\min(m, n)+1} S_{\min(m, n)}(h)}{\sum_0^n b_k h^k} + o(|h|^{\min(m, n)}) \\ &= \sum_{k=0}^{\min(m, n)} u_k h^k + o(|h|^{\min(n, m)}). \end{aligned}$$

Cela fournit bien le DL (2.78) pour f/g au voisinage de x_0 , à l'ordre $\min(m, n)$. \square

Il reste enfin à envisager la *composition* de DL.

PROPOSITION 2.18 (composition de développements limités). *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction ayant un DL à l'ordre $m \in \mathbb{N}$:*

$$(2.79) \quad \forall h \in I_{x_0}, f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^m a_k h^k + o(|h|^m)$$

en un point $x_0 \in I$. On suppose que $f(I)$ contient un intervalle J (dont l'adhérence contient $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_0$) et que $g : J \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction admettant un DL à l'ordre $n \in \mathbb{N}$:

$$(2.80) \quad \forall H \in J_{y_0} = -y_0 + J, g(y_0 + H) = \sum_{k=0}^n B_k H^k + o(|H|^n)$$

au point $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_0$. Alors la fonction $g \circ f|_{f^{-1}(J)} : f^{-1}(J) \rightarrow \mathbb{C}$ admet un DL à l'ordre $\min(m, n)$ en x_0 , donné par :

$$(2.81) \quad \forall h \in (f^{-1}(J))_{x_0}, (g \circ f)(x_0 + h) = R(h) + o(|h|^{\min(m, n)}),$$

où R est (lorsque $m \in \mathbb{N}^*$) le reste de la division euclidienne du polynôme

$$P(X) = \sum_{k=1}^n B_k \left(\sum_{l=1}^{\inf(m, n)} a_l h^l \right)^k$$

par le monôme $X^{\min(m, n)+1}$ ($R = B_0$ si $m = 0$).

DÉMONSTRATION. Pour $h \in (f^{-1}(J))_{x_0} \subset I_{x_0}$, on utilise le DL à l'ordre m de f en x_0 (donné par (2.79)) pour écrire :

$$f(x_0 + h) = y_0 + \sum_{k=1}^m a_k h^k + o(|h|^m) = y_0 + O(|h|) = y_0 + H.$$

On reporte ensuite dans le DL à l'ordre n de g en y_0 (donné par (2.80)) pour écrire :

$$\begin{aligned} g(f(x_0 + h)) &= y_0 + \sum_{k=1}^n B_k H^k + o(|H|^n) = B_0 + \sum_{k=1}^n B_k H^k + o(|h|^n) \\ &= B_0 + \sum_{k=1}^n B_k \left(\sum_{l=1}^{\inf(m, n)} a_l h^l \right)^k + o(|h|^m) + o(|h|^n) \\ &= B_0 + \sum_{k=1}^n B_k \left(\sum_{l=1}^{\inf(m, n)} a_l h^l \right)^k + o(|h|^m) + o(|h|^{\min(m, n)}) \\ &= Q(h)h^{\min(m, n)+1} + R(h) + o(|h|^{\min(m, n)}) \\ &= R(h) + o(|h|^{\min(m, n)}). \end{aligned}$$

On obtient bien ainsi le DL (2.81) voulu pour $g \circ f$ en x_0 . \square

2.6.3. Intégration de développements limités. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction admettant un DL à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au point x_0 de l'intervalle I (non réduit à un point). On a donc :

$$(2.82) \quad \forall u \in I_{x_0} = -x_0 + I, f(x_0 + u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k + o(|u|^n) = \sum_{k=0}^n a_k u^k + |u|^n \epsilon(u),$$

où $a_0 = f(x_0)$, a_1, \dots, a_n sont $n + 1$ constantes complexes, et où la fonction ϵ est continue sur $I \setminus \{x_0\}$ (comme quotient de fonctions continues) et prolongeable en une fonction continue sur I (en posant $\epsilon(0) = 0$). En intégrant entre 0 et $h \in I_{x_0}$ l'égalité (2.82) (entre fonctions continues de u sur I_{x_0}), on trouve :

$$(2.83) \quad \forall h \in I_{x_0}, \int_0^h f(x_0+u) du = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} \frac{h^k}{k} + \int_0^h |u|^n \epsilon(u) du = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} \frac{h^k}{k} + o(|h|^{n+1});$$

en effet :

$$\forall h \in I_{x_0}, \left| \int_0^h |u|^n \epsilon(u) du \right| \leq |h|^{n+1} \sup_{t \in [0,1]} |\epsilon(th)| = |h|^{n+1} \tilde{\epsilon}(h),$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\epsilon}(h) = 0$. On est donc en mesure d'énoncer la règle suivante :

PROPOSITION 2.19 (intégration terme-à-terme d'un DL). *Soit I un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point, $x_0 \in I$, et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction admettant le DL :*

$$\forall h \in I_{x_0}, f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + o(|h|^n)$$

à l'ordre n en x_0 . Toute primitive $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ de f sur I (i.e. toute fonction $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur I et satisfaisant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$) admet un DL à l'ordre $n + 1$ en x_0 , à savoir le DL :

$$\forall h \in I_{x_0}, F(x_0 + h) = F(x_0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} h^k + o(|h|^{n+1}).$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser le théorème fondamental de l'analyse (Théorème 2.9) qui stipule que :

$$\forall h \in I_{x_0} = -x_0 + I, F(x_0 + h) = F(x_0) + \int_0^h F'(x_0 + u) du = F(x_0) + \int_0^h f(x_0 + u) du.$$

On utilise ensuite pour conclure la formule (2.83) établie précédemment. \square

EXEMPLE 2.18 (DL de arctan en $x_0 = 0$). La fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan x \in] -\pi/2, \pi/2[$$

est une primitive (nulle en 0) de la fonction rationnelle

$$R : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

Or cette fonction rationnelle R admet en 0, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le DL à l'ordre n suivant :

$$\frac{1}{1+h^2} = \sum_{2k \leq n} (-1)^k h^{2k} + o(|h|^n);$$

en effet, on a, pour tout $h \in \mathbb{R}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1+h^2} = \frac{1 - (-h^2)^{p+1}}{1+h^2} + \frac{(-h^2)^{p+1}}{1+h^2} = \sum_{k=0}^p (-1)^k h^{2k} + \frac{(-h^2)^{p+1}}{1+h^2}.$$

La fonction $x \mapsto \arctan x$ admet donc en 0, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le DL à l'ordre $n + 1$ suivant :

$$\arctan(h) = \sum_{2k \leq n} (-1)^k \frac{h^{2k+1}}{2k+1} + o(|h|^{n+1}).$$

2.6.4. Développements limités à l'infini. Il est souvent utile d'étudier aussi le comportement des fonctions numériques en $+\infty$ ou $-\infty$.

DÉFINITION 2.21 (développement limité en $\pm\infty$). Soit $f :]R, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ (où $R > 0$). On dit que f admet un DL d'ordre n en $+\infty$ dans l'échelle des fonctions $h \mapsto h^{-k}$, $k = 0, k = 1, \dots$, si et seulement si il existe $n + 1$ constantes complexes a_0, \dots, a_n (nécessairement uniques), telles que :

$$\forall x > R, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \text{ (lorsque } x \rightarrow +\infty).$$

Une fonction $f :]-\infty, -R[\rightarrow \mathbb{C}$ (où $R > 0$) admet un DL d'ordre n en $-\infty$ dans cette même échelle de comparaison si la fonction $x \in]R, +\infty[\mapsto f(-x)$ admet un DL d'ordre n en $+\infty$.

REMARQUE 2.33. Les opérations portant sur les développements limités en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ (somme, produit, quotient, composition, intégration terme-à-terme), présentées dans les sous-sections 2.6.2 et 2.6.3, s'étendent au cas des DL en $\pm\infty$.

2.7. Applications géométriques des développements limités

2.7.1. Étude locale des courbes planes ; points non-stationnaires et points stationnaires. On a vu (Proposition 2.7) que, si I désigne un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant un point x_0 , $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable en x_0 et telle que $f'(x_0) \neq 0$, alors, il existe $\eta_{x_0} > 0$ tel que $[x_0 - \eta_{x_0}, x_0 + \eta_{x_0}] \subset I$ et que $f(x) \neq f(x_0)$ pour tout $x \in [x_0 - \eta_{x_0}, x_0 + \eta_{x_0}] \setminus \{x_0\}$. De plus, la droite Δ_{x_0, x_0} passant par le point d'affixe $f(x_0)$ et dirigée par le vecteur d'affixe $f'(x_0)$ représente la position limite des droites $\Delta_{x_0, x}$ (joignant les points d'affixe $f(x_0)$ et $f(x)$) lorsque x tend vers x_0 dans $[x_0 - \eta_{x_0}, x_0 + \eta_{x_0}] \setminus \{x_0\}$. On dit que Δ_{x_0, x_0} représente la *tangente géométrique* à la courbe paramétrée³¹ :

$$x \in [x_0 - \eta_{x_0}, x_0 + \eta_{x_0}] \mapsto f(x)$$

au point d'affixe $f(x_0)$ (cette configuration géométrique est illustrée par la figure 2.3).

REMARQUE 2.34 (une autre caractérisation géométrique de la tangente géométrique Δ_{x_0, x_0} lorsque $f'(x_0) \neq 0$). On pourrait aussi remarquer que la tangente géométrique Δ_{x_0, x_0} (lorsque $f'(x_0) \neq 0$) est caractérisée par la propriété suivante : il s'agit de l'unique droite Δ (passant nécessairement par $f(x_0)$) telle que :

$$(2.84) \quad \text{distance}(f(x_0 + h), \Delta) = o(|h|) \text{ (lorsque } h \rightarrow 0).$$

En effet, lorsque h s'approche de 0, le point d'affixe $f(x_0) + f'(x_0)h$ est un point de la droite Δ_{x_0, x_0} situé à une distance d'au plus $o(|h|)$ du point $f(x_0 + h)$. La

31. Attention ! il peut fort bien y avoir d'autres passages en ce point d'affixe $f(x_0)$ de la courbe paramétrée : $x \in I \mapsto f(x)$; ces divers passages peuvent alors parfaitement s'effectuer chaque fois avec des tangentes géométriques différentes : penser par exemple à une courbe paramétrée dont l'image présente une boucle dans le plan.

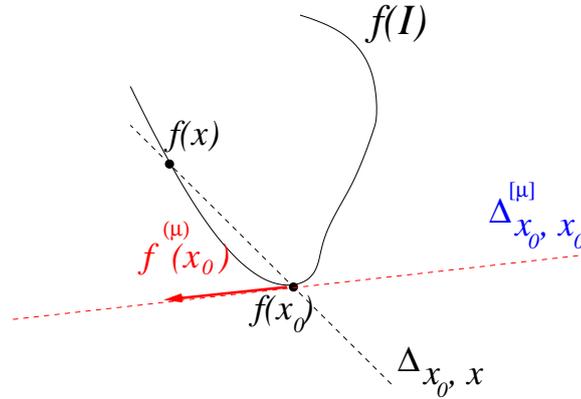


FIGURE 2.7. Tangente géométrique à une courbe plane en un point stationnaire (Proposition 2.20)

droite $\Delta = \Delta_{x_0, x_0}$ vérifie donc bien (2.84). Réciproquement, si une droite Δ vérifie (2.84), elle passe bien par $f(x_0)$ et c'est forcément la droite Δ_{x_0, x_0} (voir la clause d'unicité dans la Proposition 2.4).

Nous allons maintenant tenter de généraliser pareille configuration géométrique hors de la contrainte $f'(x_0) \neq 0$.

DÉFINITION 2.22 (points « non-stationnaires/stationnaires » d'une courbe plane paramétrée de manière C^{p+1}). Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant un point x_0 , p un entier naturel, et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une application de classe C^{p+1} de I dans \mathbb{C} .

- Si $f'(x_0) \neq 0$, on dit que la courbe paramétrée $x \in I \mapsto f(x)$ présente un point « non-stationnaire »³² lorsque le paramètre x prend la valeur x_0 ;
- Si $f'(x_0) = 0$, on dit que la courbe paramétrée $x \in I \mapsto f(x)$ présente un point « stationnaire »³³ lorsque le paramètre x prend la valeur x_0 .

REMARQUE 2.35. Au point d'affixe $f(x_0) \in \mathbb{C}$ ($x_0 \in I$) où la courbe paramétrée $x \in I \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ présente un point non-stationnaire (ou encore régulier) lorsque le paramètre x est égal à x_0 (i.e. $f'(x_0) \neq 0$), la droite passant par le point d'affixe $f(x_0)$ et dirigée par le vecteur d'affixe $f'(x_0)$ représente la tangente géométrique à la courbe $x \in I \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ lorsque le paramètre x est égal à x_0 (Proposition 2.7, situation qu'illustre la figure 2.3). Cette tangente géométrique peut aussi être caractérisée par la Remarque 2.34.

Il se trouve que la Remarque 2.35 s'adapte encore dans le cas de certains points stationnaires, pour les courbes planes paramétrées de manière C^{p+1} , avec $p \in \mathbb{N}^*$.

PROPOSITION 2.20 (tangente géométrique en un point stationnaire d'une courbe plane paramétrée). Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant un point x_0 , p un entier naturel non nul, et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une application de classe C^{p+1} de I dans

³². On dit aussi « régulier ».

³³. On dit aussi « singulier ».

\mathbb{C} , présentant un point stationnaire lorsque le paramètre x prend la valeur x_0 (i.e. $f'(x_0) = 0$), mais telle qu'il existe $\nu \in \{2, \dots, p+1\}$ tel que $f^{(\nu)}(x_0) \neq 0$. Soit

$$\mu := \inf \{ \nu \in \{2, \dots, p+1\} ; f^{(\nu)}(x_0) \neq 0 \}.$$

La droite $\Delta_{x_0, x_0}^{[\mu]}$ passant par le point d'affixe $f(x_0)$ et dirigée cette fois par le vecteur d'affixe $f^{(\mu)}(x_0) \neq 0$ représente encore la tangente géométrique à la courbe paramétrée

$$x \in I \mapsto f(x)$$

lorsque x est voisin de x_0 . Ceci signifie, comme dans le cadre de la Proposition 2.7 :

- d'une part qu'il existe $\eta_{x_0} > 0$ tel que :

$$(2.85) \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}, \quad |x - x_0| < \eta_{x_0} \implies f(x) \neq f(x_0) ;$$

- d'autre part, que la droite $\Delta_{x_0, x_0}^{[\mu]}$ représente la position limite de la droite $\Delta_{x_0, x}$ joignant $f(x_0)$ à $f(x) \neq f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0 dans le segment $[x_0 - \eta_{x_0}, x_0 + \eta_{x_0}]$.

La configuration géométrique est celle illustrée par la figure 2.7³⁴.

DÉMONSTRATION. Comme f est dérivable à l'ordre $p+1$ au point x_0 , f admet un DL à l'ordre $p+1$ en x_0 , qui coïncide (cf. la Proposition 2.15) avec son développement de Taylor-Young (2.47) à l'ordre $p+1$ en x_0 . On a donc :

$$\forall h \in I_{x_0}, \quad f(x_0 + h) = \sum_{k=\mu}^{p+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(|h|^{p+1}) = \frac{f^{(\mu)}(x_0)}{\mu!} \varphi(h), \quad \text{où } \varphi(h) \underset{0}{\sim} h^\mu.$$

Il en résulte qu'il existe $\eta_{x_0} > 0$ tel que $[-\eta_{x_0}, \eta_{x_0}] \subset I_{x_0}$ et que :

$$|h| \leq \eta_{x_0} \implies |\varphi(h)| \geq 1/2.$$

On a donc bien (2.85). Pour $x \neq x_0$ dans le segment $[x_0 - \eta_{x_0}, x_0 + \eta_{x_0}]$, le vecteur d'affixe

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^\mu}$$

est un vecteur non nul dirigeant la droite $\Delta_{x_0, x}$ passant par les points distincts d'affixes respectives $f(x_0)$ et $f(x)$. Or

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^\mu} = \frac{f^{(\mu)}(x_0)}{\mu!}.$$

Un certain vecteur directeur de la droite $\Delta_{x_0, x}$ (passant par le point d'affixe $f(x_0)$) tend donc, lorsque x tend vers x_0 dans $[x_0 - \eta_{x_0}, x_0 + \eta_{x_0}]$, vers un vecteur directeur de la droite $\Delta_{x_0, x_0}^{[\mu]}$ (qui, elle aussi, passe par le point d'affixe $f(x_0)$). La droite $\Delta_{x_0, x_0}^{[\mu]}$ est donc bien la position limite de la droite $\Delta_{x_0, x}$ lorsque x tend vers x_0 dans $[x_0 - \eta_{x_0}, x_0 + \eta_{x_0}] \setminus \{x_0\}$. \square

34. On se trouve donc dans la même configuration que celle décrite dans la Proposition 2.7 et illustrée par la figure 2.3, dans le cas où la courbe présentait un point non-stationnaire lorsque le paramètre prenait la valeur x_0 . La différence toutefois, maintenant que le point est stationnaire (i.e. $f'(x_0) = 0$), est que cette fois la tangente géométrique à la courbe lorsque le paramètre x prend la valeur x_0 est la droite « limite » $\Delta_{x_0, x_0}^{[\mu]}$ passant par le point d'affixe $f(x_0)$ est dirigée par le vecteur d'affixe $f^{(\mu)}(x_0) \neq 0$; ce ne peut plus en effet être dans ce cas la droite $\Delta_{x_0, x_0} = \Delta_{x_0, x_0}^{[1]}$ comme dans la Proposition 2.7, puisque $f'(x_0) = 0$ (le point $f(x_0)$ étant cette fois stationnaire).

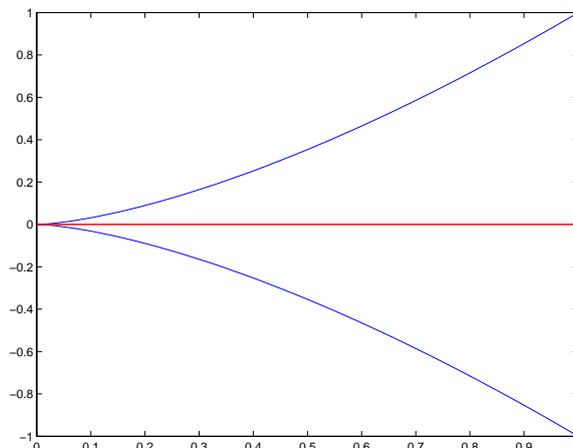


FIGURE 2.8. Tangente géométrique (tracée en rouge) à la courbe $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + ix^3$ (tracée en bleu) en l'origine

REMARQUE 2.36 (une autre caractérisation géométrique de la tangente géométrique $\Delta_{x_0, x_0}^{[\mu]}$ en un point stationnaire). On pourrait aussi remarquer, comme dans la Remarque 2.34, que la tangente géométrique $\Delta_{x_0, x_0}^{[\mu]}$ (lorsque $f'(x_0) = 0$) est caractérisée par la propriété suivante : il s'agit de l'unique droite Δ (passant nécessairement par $f(x_0)$) telle que :

$$(2.86) \quad \text{distance}(f(x_0 + h), \Delta) = o(|h|^\mu) \text{ (lorsque } h \rightarrow 0).$$

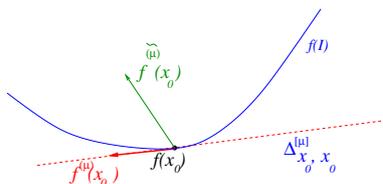
En effet, lorsque h s'approche de 0, le point d'affixe $f(x_0) + f^{(\mu)}(x_0) h^\mu / \mu!$ est un point de la droite $\Delta_{x_0, x_0}^{[\mu]}$ situé à une distance d'au plus $o(|h|^\mu)$ du point $f(x_0 + h)$. La droite $\Delta = \Delta_{x_0, x_0}^{[\mu]}$ vérifie donc bien (2.86). Réciproquement, si une droite Δ vérifie (2.86), elle passe bien par $f(x_0)$ et on peut montrer que c'est forcément la droite $\Delta_{x_0, x_0}^{[\mu]}$ du fait de l'unicité du DL à l'ordre $p + 1$ de f au point x_0 .

EXEMPLE 2.19 (un exemple de point stationnaire *cuspidal*). La courbe paramétrée par :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + ix^3$$

présente un point stationnaire lorsque le paramètre x prend la valeur 0 (ce point stationnaire étant dans ce cas l'origine). La courbe paramétrée ainsi présente en ce point une tangente géométrique, qui est, puisqu'ici $\mu = 2$ et que $f''(0) = 2$, la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur \vec{i} (cf. la figure 2.8). Cette courbe est dite présenter un point stationnaire *cuspidal* (ici *de première espèce*, comme on le verra plus loin) lorsque le paramètre prend la valeur 0.

Pour préciser la description géométrique (en particulier la position par rapport à la tangente géométrique) du tracé d'une courbe paramétrée $x \in I \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ au voisinage de $f(x_0)$ (pour les valeurs du paramètres voisines de x_0), illustrée par les figures 2.3 (cas des points non stationnaires) ou 2.7 (cas des points stationnaires), nous supposons que f est de classe C^{p+1} sur I pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ et que

FIGURE 2.9. Configuration de point ordinaire (μ impair, $\tilde{\mu}$ pair)

les $p + 1$ vecteurs du plan d'affixes respectives $f'(x_0), \dots, f^{(p+1)}(x_0)$ engendrent \mathbb{R}^2 . Ceci implique :

- l'ensemble $\{\nu \in \{1, \dots, p\}; f^{(\nu)}(x_0) \neq 0\} \subset \mathbb{N}^*$ est non vide, et contient donc un plus petit élément que l'on note μ ; on pose dans tous les cas de figure³⁵ :

$$(2.87) \quad \mu := \min \{\nu \in \{1, \dots, p+1\}; f^{(\nu)}(x_0) \neq 0\}.$$

- l'ensemble des entiers $\tilde{\nu} \in \{\mu + 1, \dots, p + 1\}$ tels que les vecteurs d'affixes $f^{(\mu)}(x_0)$ et $f^{(\tilde{\nu})}(x_0)$ forment une base³⁶ de \mathbb{R}^2 est non vide et contient donc un plus petit élément que l'on note $\tilde{\mu}$:

$$(2.88) \quad \tilde{\mu} := \min \{\tilde{\nu} \in \{\mu + 1, \dots, p + 1\}; \operatorname{Im}[f^{(\mu)}(x_0)\overline{f^{(\tilde{\nu})}(x_0)}] \neq 0\}.$$

Le développement de Taylor à l'ordre $p + 1$ de f en x_0 s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \forall h \in I_{x_0}, f(x_0 + h) = \\ &= \frac{f^{(\mu)}(x_0)}{\mu!} h^\mu + \dots + \frac{f^{(\tilde{\mu})}(x_0)}{\tilde{\mu}!} h^{\tilde{\mu}} + \dots + \frac{f^{(p+1)}(x_0)}{(p+1)!} h^{p+1} + o(|h|^{p+1}) \\ &= \frac{f^{(\mu)}(x_0)}{\mu!} \varphi(h) + \frac{f^{(\tilde{\mu})}(x_0)}{\tilde{\mu}!} \tilde{\varphi}(h), \text{ où } \varphi(h) \underset{0}{\sim} h^\mu \text{ et } \tilde{\varphi}(h) \underset{0}{\sim} h^{\tilde{\mu}}. \end{aligned}$$

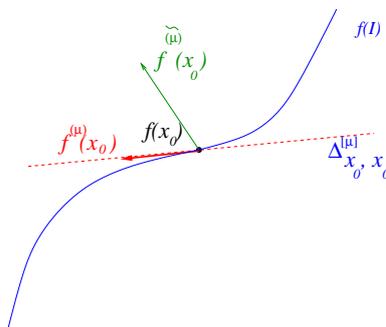
Nous distinguons quatre configurations possibles, suivant les parités respectives des entiers μ et $\tilde{\mu}$.

- (1) Le cas μ impair et $\tilde{\mu}$ pair : c'est le cas le plus fréquent³⁷. La tangente géométrique $\Delta_{x_0, x_0}^{[\mu]}$ est dirigée par le vecteur d'affixe $f^{(\mu)}(x_0)$. Comme la coordonnée $\tilde{\varphi}(h)/\tilde{\mu}!$ (disons l'« ordonnée ») suivant l'autre vecteur de base (d'affixe $f^{(\tilde{\mu})}(x_0)$) reste positive ($h^{\tilde{\mu}} \geq 0$ au voisinage de 0 car $\tilde{\mu}$ est pair), la courbe paramétrée $x \mapsto f(x)$ reste, lorsque x est voisin de x_0 , toujours du même côté de sa tangente géométrique $\Delta_{x_0, x_0}^{[\mu]}$. De plus, l'« abscisse » $\varphi(h)/\mu!$ suivant le vecteur d'affixe $f^{(\mu)}(x_0)$ dirigeant la tangente change, elle, de signe quand h passe par la valeur 0 (car l'exposant μ est supposé impair). C'est la configuration dite de *point ordinaire*. Elle est illustrée par la figure 2.9.

35. Si $\mu = 1$, on est dans la configuration de point non-stationnaire lorsque le paramètre x prend la valeur x_0 ; si $\mu > 1$, on est dans la configuration de point stationnaire (toujours lorsque x prend la valeur x_0).

36. Deux vecteurs du plan ayant pour affixes respectives les deux nombres complexes $z = \alpha + i\beta$ et $w = \gamma + i\delta$ forment une base de \mathbb{R}^2 si et seulement si $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, ou encore $\operatorname{Im}[z\bar{w}] \neq 0$.

37. Par exemple : $\mu = 1$ et $\tilde{\mu} = 2$, i.e le point $f(x_0)$ correspond à un point non-stationnaire et $\operatorname{Im}[f'(x_0)\overline{f''(x_0)}] \neq 0$.

FIGURE 2.10. Configuration de point d'inflexion (μ impair, $\tilde{\mu}$ impair)

- (2) Le cas μ impair et $\tilde{\mu}$ impair : c'est, après le premier cas, celui que l'on rencontre le plus fréquemment en second³⁸. La tangente géométrique $\Delta_{x_0, x_0}^{[\mu]}$ est toujours dirigée par le vecteur d'afixe $f^{(\mu)}(x_0)$. Comme la coordonnée $\tilde{\varphi}(h)/\tilde{\mu}!$ (disons l'« ordonnée ») suivant l'autre vecteur de base (d'afixe $f^{(\tilde{\mu})}(x_0)$) change cette fois de signe lorsque h passe par 0 (car $\tilde{\mu}$ est cette fois impair), la courbe paramétrée $x \mapsto f(x)$, lorsque x est voisin de x_0 et passe par x_0 , « traverse » sa tangente géométrique $\Delta_{x_0, x_0}^{[\mu]}$. De plus, l'« abscisse » $\varphi(h)/\mu!$ suivant le vecteur d'afixe $f^{(\mu)}(x_0)$ dirigeant la tangente continue à changer de signe quand h passe par la valeur 0 (car l'exposant μ est toujours supposé impair). C'est la configuration dite de *point d'inflexion*³⁹. Elle est illustrée par la figure 2.10.
- (3) Le cas μ pair et $\tilde{\mu}$ impair⁴⁰ : cette fois, la courbe traverse toujours sa tangente géométrique (car la coordonnée suivant le vecteur d'afixe $f^{(\tilde{\mu})}(x_0)$ change de signe lorsque x passe par x_0 (en effet $\tilde{\mu}$ est impair), mais cette fois, la composante suivant le vecteur d'afixe $f^{(\mu)}(x_0)$ dirigeant la tangente géométrique $\Delta_{x_0, x_0}^{[\mu]}$ reste positive : la courbe rebrousse donc chemin (tout en traversant sa tangente). On dit qu'elle présente un *rebroussement de première espèce*, ou encore un *point cuspidal de première espèce* (ou *cuspid*) au point (stationnaire) $f(x_0)$ lorsque le paramètre x prend la valeur x_0 (voir la figure 2.11 ainsi que l'exemple de la courbe $x \mapsto x^2 + ix^3$ en $x = 0$ tracée sur la figure 2.8).
- (4) Le cas μ pair et $\tilde{\mu}$ pair⁴¹ : cette fois, la courbe ne traverse plus sa tangente géométrique, car la coordonnée suivant le vecteur d'afixe $f^{(\tilde{\mu})}(x_0)$

38. Par exemple : $\mu = 1$ et $\tilde{\mu} = 3$, i.e le point $f(x_0)$ correspond à un point non-stationnaire, $\text{Im}[f'(x_0)f''(x_0)] = 0$, et $\text{Im}[f'(x_0)f^{(3)}(x_0)] \neq 0$.

39. On peut considérer que la tangente géométrique $\Delta_{x_0, x_0}^{[\mu]}$ qui, déjà, intersecte par construction même (comme position limite des droites $\Delta_{x_0, x}$ quand x tend vers x_0 dans $I \setminus \{x_0\}$) la courbe $f(I)$ en deux points confondus en $f(x_0)$, intersecte en fait la courbe $f(I)$ en un troisième point confondu avec les deux autres en x_0 : en effet la courbe, non seulement est tangente à la droite $\Delta_{x_0, x_0}^{[\mu]}$ au point $f(x_0)$, mais encore coupe cette droite en ce point (puisqu'elle passe de l'autre côté).

40. Par exemple, le cas $\mu = 2$ et $\tilde{\mu} = 3$ de l'exemple 2.19.

41. Par exemple, le cas $\mu = 2$ et $\tilde{\mu} = 4$ de l'exemple $x \mapsto x^2 + i(x^4 - x^5/2)$, voir l'exemple 2.20 et la figure 2.13.

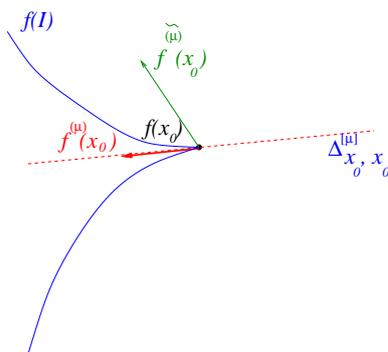


FIGURE 2.11. Configuration de point de rebroussement (ou cuspidal) de première espèce (μ pair, $\tilde{\mu}$ impair)

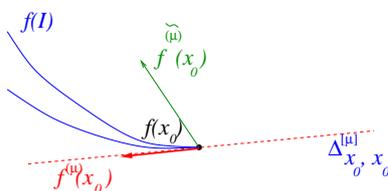


FIGURE 2.12. Configuration de point de rebroussement (ou cuspidal) de seconde espèce (μ pair, $\tilde{\mu}$ pair)

reste positive lorsque x passe par x_0 (en effet $\tilde{\mu}$ est cette fois pair). La composante suivant le vecteur d'affixe $f^{(\mu)}(x_0)$ dirigeant la tangente géométrique $\Delta_{x_0, x_0}^{[\mu]}$ reste positive : la courbe rebrousse donc chemin (tout en ne traversant plus cette fois sa tangente). On dit qu'elle présente un *rebroussement de seconde espèce*, ou encore un *point cuspidal de seconde espèce* (ou *cusp de seconde espèce*) au point (stationnaire) $f(x_0)$ lorsque le paramètre x prend la valeur x_0 (voir la figure 2.12 ainsi que l'exemple de la courbe $x \mapsto x^2 + i(x^4 - x^5/2)$ en $x = 0$ tracée sur la figure 2.13).

EXEMPLE 2.20 (un exemple de point cuspidal de seconde espèce). La courbe $x \mapsto x^2 + i(x^4 - x^5/2)$ présente un point cuspidal de seconde espèce (l'origine) lorsque le paramètre passe par la valeur 0. Voir la représentation graphique sur la figure 2.13.

EXEMPLE 2.21 (les courbes cycloïdales). Si l'on fait « rouler » (sans glissement) un cercle de rayon r sur, à l'intérieur ou à l'extérieur, un cercle de rayon R (le quotient r/R étant un nombre rationnel), un point marqué du cercle de rayon r parcourra une courbe plane présentant des points cuspidaux (de première espèce), voir la figure 2.14 : ces courbes s'appellent hypocycloïdes ou épicycloïdes, suivant que l'on fasse rouler le cercle de rayon r à l'intérieur du cercle de rayon R (hypo) (elles furent étudiées alors par Albrecht Dürer, sous le qualificatif d'*hypotrocoïdes*, dès le XVI-ème siècle) ou à l'extérieur de ce dernier cercle (épi). On les traçait autrefois (avant que n'apparaissent les logiciels graphiques) avec des *spirographes* (à

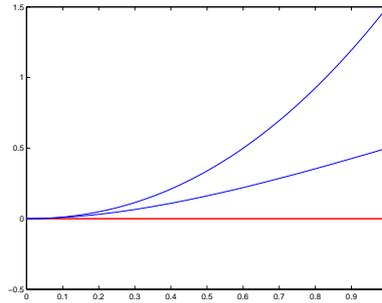


FIGURE 2.13. La courbe $x \mapsto x^2 + i(x^4 - x^5/2)$ près de l'origine ($x = 0$) : un point cuspidal de seconde espèce

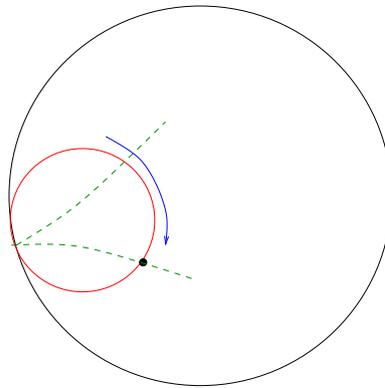


FIGURE 2.14. Comment générer des courbes cycloïdales.

base de systèmes d'engrenages) ou avec ces compas de précision qu'étaient les *pan-tographes* des géomètres. La *cardioïde* (épicicloïde à un rebroussement), la *deltoïde* (hypocicloïde à trois rebroussements), l'*astroïde* (hypocicloïde à quatre rebroussements), la *néphroïde* ou « pelote de laine » (épicicloïde à deux rebroussements) en sont des exemples célèbres. Le même phénomène se produit pour la courbe parcourue par le point courant d'une cercle « roulant » sur une droite : la courbe obtenue est alors la *cycloïde* ; elle présente des arches successives.

REMARQUE 2.37 (où trouver un vivier d'exemples ?). Pour visualiser un « her-bier » intéressant de courbes planes, parmi lesquelles les courbes cycloïdales évoquées pour leurs points cuspidaux de première espèce dans l'exemple 2.21, on pourra consulter avec profit le très riche site web <http://www.mathcurve.com>

2.7.2. Étude des branches infinies des courbes planes. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue de $I \rightarrow \mathbb{C}$. Soit $x_0 \in [-\infty, +\infty] \setminus I$ un point adhérent à I (si $x_0 = +\infty$, ceci signifie que I contient un intervalle ouvert $]R, +\infty[$ pour un certain $R > 0$, tandis que, si $x_0 = -\infty$, ceci signifie que I contient un intervalle ouvert $]-\infty, -R[$).

DÉFINITION 2.23 (branche infinie d'une courbe plane). Sous les hypothèses ci-dessus, on dit que la courbe plane paramétrée par $f : x \in I \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ présente

une *branche infinie* lorsque le paramètre x s'approche de la valeur x_0 si et seulement si

$$(2.89) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} |f(x)| = +\infty.$$

L'étude des branches infinies d'une courbe plane paramétrée aide au tracé de la courbe. Nous retiendrons en particulier ici le concept de *direction asymptotique*.

DÉFINITION 2.24 (direction asymptotique d'une branche infinie d'une courbe plane). Sous les hypothèses de la Définition 2.23, la branche infinie présentée par la courbe paramétrée par $f = u + iv : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dite présenter une *direction asymptotique* (quand $x \rightarrow x_0 \in \bar{I}$) lorsque le paramètre x s'approche de x_0 si et seulement si, outre la clause (2.89), on a la clause supplémentaire :

$$(2.90) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} \frac{v(x)}{u(x)} = a \in [-\infty, +\infty].$$

Si $a = \pm \infty$, on dit que la branche infinie de la courbe plane présente une direction asymptotique verticale lorsque x tend vers x_0 . Si $a = 0$, on dit que la branche infinie de la courbe plane présente une direction asymptotique horizontale lorsque x tend vers x_0 . Si enfin $a \in \mathbb{R}^*$, on dit que la courbe plane présente une direction asymptotique oblique lorsque x tend vers x_0 ; le nombre réel a est dit dans ce cas *direction* (ou *pente*) de cette direction asymptotique.

Lorsque la branche infinie de la courbe plane paramétrée par $f = u + iv : I \rightarrow \mathbb{C}$ (lorsque x tend vers $x_0 \in \bar{I}$) présente une direction asymptotique, on distingue deux cas :

- Si $a \in \mathbb{R}$, on étudie le comportement de $v(x) - au(x)$ lorsque $x \rightarrow x_0$, par exemple en effectuant (s'il existe) un DL de $h \in I_{x_0} \rightarrow v(x_0 + h) - au(x_0 + h)$ au voisinage de 0 si $x_0 \in \mathbb{R}$, ou un DL de $x \mapsto v(x) - au(x)$ au voisinage de $+\infty$ suivant l'échelle de comparaison des fonctions puissance h^k ou x^{-k} , $k \in \mathbb{N}$. Si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} (v(x) - au(x)) = b$$

existe dans \mathbb{R} (et que l'on dispose d'un DL suivant les puissances h^k , $k \geq 0$ ou x^{-k} , $k \in \mathbb{N}$), on dit que la branche infinie présente une *asymptote oblique* $y = ax + b$. Le DL obtenu permet de préciser en général la position de la branche infinie par rapport à cette asymptote. Si l'on a par contre :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} |v(x) - au(x)| = +\infty,$$

on dit que la branche infinie présente une *direction parabolique* dans la direction a (dans la direction de l'axe des x si $a = 0$).

- Si $a = \pm \infty$, on reprend l'étude précédente avec $x \mapsto u(x)$ à la place de $x \mapsto v(x) - au(x)$. Si u a une limite finie b lorsque x tend vers x_0 , la branche infinie présente une asymptote verticale $x = b$. Un DL de $x \mapsto u(x)$ au voisinage de x_0 ou l'infini permet alors de préciser la position de la branche infinie par rapport à cette asymptote verticale. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} |u(x)| = +\infty$, on dit que la branche infinie présente une *branche parabolique* dans la direction de l'axe des y .

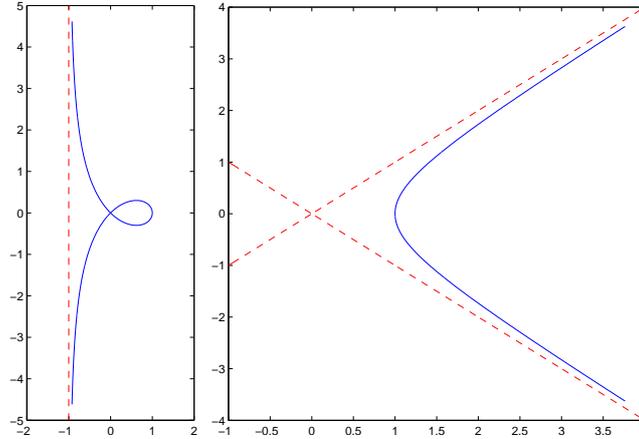


FIGURE 2.15. La strophoïde droite (à gauche) et la branche d'hyperbole (à droite)

EXEMPLE 2.22. La *strophoïde droite* paramétrée par

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto u(x) + i v(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} + i x \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

présente deux branches infinies, respectivement lorsque $x \rightarrow -\infty$ et $x \rightarrow +\infty$. Il s'agit dans les deux cas de branches présentant une direction asymptotique verticale car on est dans la situation où $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x)/u(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$. Mais un DL à l'ordre 2 de $x \mapsto u(x)$ au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$ donne

$$u(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = -\frac{1 - 1/x^2}{1 + 1/x^2} = -1 + 2/x^2 + o(1/x^2).$$

La droite verticale d'équation $x = -1$ est pour les deux branches infinies asymptote verticale et ces branches infinies se présentent à droite de cette droite lorsque x tend vers $\pm\infty$. Notons aussi la présence d'un point double car il y a deux passages à l'origine (lorsque $x = -1$ et lorsque $x = 1$). Voir la figure de gauche sur la figure 2.15. En revanche, la branche d'*hyperbole*

$$x \in \mathbb{R} \mapsto u(x) + i v(x) = \cosh(x) + i \sinh(x)$$

présente deux branches infinies (x tend vers $-\infty$ ou x tend vers $+\infty$) présentant des directions asymptotiques de pentes respectives -1 et 1 . Comme $\tanh(x) = -1 + 2e^{2x} + o(e^{2x})$ lorsque $x \rightarrow -\infty$ et $\tanh(x) = 1 - 2e^{-2x} + o(e^{-2x})$ lorsque x tend vers $+\infty$, ces branches infinies ont pour asymptotes obliques respectivement les droites d'équation $y = -x$ et $y = x$, la position des branches par rapport à ces asymptotes étant celle précisée sur la même figure 2.15 (figure de droite). Les hyperboles font, avec les ellipses (dont le cercle) et les paraboles, partie de la famille des *coniques*, à savoir les courbes obtenues en intersectant un cône de révolution avec un plan : lorsque ce plan est parallèle aux génératrices du cône, on obtient une *parabole*; sinon, on obtient une *ellipse* lorsque le plan intersecte l'axe de révolution du cône, une *hyperbole* avec ses deux branches sinon.

Intégration au sens de Riemann

Ce chapitre est dévolu à l'intégration des fonctions numériques. Les deux symboles Σ et \int , l'un « romain », l'autre « calligraphique », désignent tous deux une même opération, la *somme* (qui, une fois divisée par le nombre de termes sommés, devient une *moyenne*). Cette opération de *somme* est le fondement de l'opération de *prise de moyenne* ou encore d'*intégration* en analyse, tandis que celle de *différence* (il suffit par exemple de penser à l'expression d'un taux de variations) est au cœur de l'inverse de cette opération d'intégration, à savoir l'opération de *différentiation*. En traitement d'image par exemple, moyenniser une image, c'est en obtenir une version « floue » (*cf.* par exemple la place de l'Étoile la nuit photographiée pendant un temps d'exposition significatif et les trainées lumineuses observées sur la pellicule), tandis que la dériver (horizontalement, verticalement, ou suivant une direction oblique), c'est tâcher d'extraire de l'image les « lignes de rupture » ou de contraste (horizontales, verticales, ou obliques, suivant la direction de différentiation choisie). On présente dans ce chapitre une introduction à l'intégration des fonctions d'une variable réelle (à valeurs réelles ou complexes) au sens de Riemann, c'est-à-dire suivant un maillage du domaine de définition (en l'occurrence ici un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} non réduit à un point). Ultérieurement, vous rencontrerez une autre approche, basée cette fois non plus sur un maillage de l'ensemble de départ, mais sur un maillage de l'ensemble d'arrivée : ce sera le principe de l'intégration des fonctions numériques (à valeurs réelles ou complexes) au sens de Lebesgue.

3.1. Fonctions en escalier sur un segment

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point ; une *subdivision* σ du segment $[a, b]$ (on dit aussi *maillage* de $[a, b]$) est par définition une suite finie de $N + 1$ ($N \geq 1$) nombres x_0, \dots, x_N , tels que :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

Le *pas* de cette subdivision est le nombre strictement positif :

$$\tau(\sigma) := \sup_{0 \leq j \leq N-1} (x_{j+1} - x_j).$$

Si tous les nombres $x_{j+1} - x_j$, pour $j = 0, \dots, N - 1$ sont égaux, on dit que le pas de la subdivision σ est *régulier* ; la subdivision (ou le maillage) sont alors dits *réguliers*. Les nombres $x_0 = a, x_1, \dots, x_N = b$ sont, eux, appelés les *nœuds* du maillage.

DÉFINITION 3.1 (fonctions en escalier sur un segment). Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *en escalier* s'il existe une subdivision σ de $[a, b]$ telle que la fonction soit constante dans tout intervalle ouvert limité par deux nœuds consécutifs de la subdivision σ . La subdivision σ est alors dite *adaptée* à la fonction en escalier f .

EXEMPLE 3.1. Si N est un entier strictement positif, la fonction

$$f : x \in [0, N] \mapsto E(x),$$

où $E(x)$ (partie entière de x) désigne la distance entre le nombre x et l'entier le plus proche de x à sa gauche, est en escalier sur $[0, N]$. Une subdivision adaptée est la subdivision :

$$0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < \cdots < x_{N-1} = N - 1 < x_N = N.$$

En effet, on a $f(x) = k$ sur $]k, k+1[$ pour $k = 0, \dots, N-1$. En revanche, la fonction $x \in [0, N] \mapsto E(x) - x$ n'est pas en escalier sur $[a, b]$.

REMARQUE 3.1 (discontinuités d'une fonction en escalier réelle). Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point. On remarque qu'une fonction en escalier $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ne possède (au plus) qu'un nombre fini de points de discontinuité sur $]a, b[$; ces points de discontinuité sont en effet à prendre parmi les nœuds (éventuels) d'un maillage adapté σ (différents des extrémités $x_0 = a$ et $x_N = b$). Les extrémités $a = x_0$ et $b = x_N$ du segment $[a, b]$ peuvent être aussi des discontinuités (si $f(a)$ diffère de la valeur constante de f sur $]a, x_1[$ ou si $f(b)$ diffère de la valeur constante de f sur $]x_{N-1}, b[$). Ainsi le nombre de points de discontinuité d'une fonction en escalier f sur $[a, b]$ est-il toujours majoré par le nombre total de nœuds d'un maillage adapté à f .

REMARQUE 3.2 (limites à gauche et à droite d'une fonction en escalier réelle). Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier et que σ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à cette fonction, f est continue en tout point x de $[a, b]$ qui n'est pas un nœud de σ . En chaque nœud x_j de σ différent de a et b , f est constante (égale à A_j^+) sur un intervalle ouvert $]x_j, x_j + \epsilon_+[$ à droite de x_j , ainsi que sur un intervalle ouvert $]x_j - \epsilon_-, x_j[$ à gauche de x_j (où elle vaut A_j^-). La fonction f admet donc une limite à droite (égale à A_j^+) en x_j et une limite à gauche (égale à A_j^-) en x_j . Aux points a et b , f admet respectivement une limite à droite (en a) et une limite à gauche (en b). Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier sur $[a, b]$ admet donc une limite à droite en a , une limite à gauche en b , et des limites à droite et à gauche en tout point $c \in]a, b[$.

Étant donnée une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier, il existe une unique subdivision $\tilde{\sigma}$ de $[a, b]$, de nœuds $x_0 = a, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{\tilde{N}} = b$, telle que, pour tout $j = 1, \dots, \tilde{N} - 1$,

$$f((x_j + x_{j-1})/2) \neq f((x_j + x_{j+1})/2).$$

Cette unique subdivision est dite *subdivision adaptée maximale* à la fonction en escalier $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. C'est la subdivision adaptée dont le pas est le plus grand possible.

Étant donnée une fonction en escalier réelle sur un segment $[a, b]$ non réduit à un point, et une subdivision adaptée $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$, avec $f \equiv A_j$ sur $]x_j, x_{j+1}[$ pour $j = 0, \dots, N-1$, le nombre :

$$(3.1) \quad \frac{1}{b-a} \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) A_j = \frac{\sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) A_j}{\sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j)}$$

s'interprète naturellement comme une *valeur moyenne* de la fonction f sur $[a, b]$. Cette valeur moyenne ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie pour la calculer : il suffit, pour voir cela, étant données deux subdivisions σ_1 et σ_2 adaptées à f , de calculer cette valeur moyenne en utilisant la subdivision de $[a, b]$ dont l'ensemble des nœuds est l'union de l'ensemble des nœuds de σ_1 avec celui des nœuds de σ_2 .

DÉFINITION 3.2 (intégrale d'une fonction en escalier sur un segment). Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$, et que $x_0 = a < x_1 < \dots < x_N = b$ est une subdivision adaptée à cette fonction, on appelle *intégrale de f sur $[a, b]$* le nombre (indépendant du choix de la subdivision adaptée) :

$$(3.2) \quad \int_{[a,b]} f(t) dt := \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) A_j,$$

où A_j désigne, pour $j = 0, \dots, N-1$, la valeur (constante) prise par f sur l'intervalle ouvert $]x_j, x_{j+1}[$. *Autrement dit, l'intégrale de f sur $[a, b]$ est le produit par la longueur $b - a$ du segment $[a, b]$ de la moyenne de f sur $[a, b]$ telle qu'elle a été définie en (3.1).*

REMARQUE 3.3 (indifférence vis-à-vis des valeurs de la fonction aux nœuds d'un maillage adapté). La valeur de l'intégrale (3.2) sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} d'une fonction f réelle en escalier n'est pas affectée si l'on change de manière arbitraire les valeurs de f aux nœuds d'un maillage adapté.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et que λ et μ sont deux nombres réels, on constate, en travaillant avec une subdivision adaptée à la fois à f et g (il suffit de prendre une subdivision dont l'ensemble des nœuds est l'union de celui des nœuds d'une subdivision σ_f adaptée à f avec celui des nœuds d'une subdivision σ_g adaptée à g) que la fonction $\lambda f + \mu g$ est encore en escalier sur $[a, b]$ et que :

$$(3.3) \quad \int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_{[a,b]} f(t) dt + \mu \int_{[a,b]} g(t) dt.$$

Autrement dit, l'opération de prise d'intégrale des fonctions réelles en escalier sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} est une opération \mathbb{R} -linéaire.

L'intégrale sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} ($a < b$) d'une fonction en escalier réelle positive ou nulle sur ce segment est, d'après la définition (3.2), un nombre positif ou nul. Par conséquent, si f et g sont deux fonctions en escalier de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , on a :

$$(3.4) \quad \left(\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x) \right) \implies \left(\int_{[a,b]} f(t) dt \leq \int_{[a,b]} g(t) dt \right).$$

Autrement dit, l'opération de prise d'intégrale des fonctions en escalier sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} est une opération monotone. En particulier, comme $|f| \geq \sup(-f, f)$ sur $[a, b]$, on a, pour toute fonction en escalier sur $[a, b]$:

$$(3.5) \quad \left| \int_{[a,b]} f(t) dt \right| \leq \int_{[a,b]} |f(t)| dt.$$

3.2. Intégration des fonctions réelles bornées définies sur un segment

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle bornée, ce qui signifie qu'il existe deux constantes réelles m et M telles que :

$$\forall x \in [a, b], \quad m \leq f(x) \leq M.$$

L'ensemble E_{\leq}^f des fonctions réelles u en escalier sur $[a, b]$ et telles que $u(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ est donc non vide (il contient la fonction constante égale à m sur $[a, b]$). De même, l'ensemble E_{\geq}^f des fonctions réelles v en escalier sur $[a, b]$ et telles que $v(x) \geq f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ est aussi non vide (il contient la fonction constante égale à M sur $[a, b]$). Si $u \in E_{\leq}^f$, on a $u(x) \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$ et, par conséquent, en utilisant l'inégalité (3.4) :

$$\forall u \in E_{\leq}^f, \quad \int_{[a,b]} u(t) dt \leq \int_{[a,b]} M dt = M(b-a).$$

Notons que, parmi les fonctions $u \in E_{\leq}^f$, figure la fonction constante égale à m , pour laquelle l'intégrale sur $[a, b]$ vaut $m(b-a)$. De la même manière, si $v \in E_{\geq}^f$, on a $m \leq f(x) \leq v(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ et, par conséquent, toujours en utilisant l'inégalité (3.4) :

$$\forall v \in E_{\geq}^f, \quad \int_{[a,b]} v(t) dt \geq \int_{[a,b]} m dt = m(b-a).$$

Notons que, parmi les fonctions $v \in E_{\geq}^f$, figure la fonction constante égale à M , pour laquelle l'intégrale sur $[a, b]$ vaut $M(b-a)$.

Si l'on prétend donner un sens à un nombre qui correspondrait à l'intégrale de la fonction f sur $[a, b]$, deux possibilités s'offrent à nous :

- soit tenter d'évaluer ce nombre « par en dessous », en disant qu'il s'agit de la borne supérieure de l'ensemble

$$\left\{ \int_{[a,b]} u(t) dt ; u \in E_{\leq}^f \right\} \subset [(b-a)m, (b-a)M] ;$$

- soit tenter de l'évaluer « par dessus », en disant qu'il s'agit de la borne inférieure de l'ensemble

$$\left\{ \int_{[a,b]} v(t) dt ; v \in E_{\geq}^f \right\} \subset [(b-a)m, (b-a)M] ;$$

Pour qu'un tel nombre existe, encore faut-il que ces calculs soient cohérents. Tout ce que l'on peut assurer, puisque $u \leq f \leq v$ sur $[a, b]$ pour toute fonction $u \in E_{\leq}^f$ et toute fonction v dans E_{\geq}^f , est que :

$$\sup \left\{ \int_{[a,b]} u(t) dt ; u \in E_{\leq}^f \right\} \leq \inf \left\{ \int_{[a,b]} v(t) dt ; v \in E_{\geq}^f \right\}.$$

Mais il n'y a pas toujours égalité entre ces deux nombres, comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 3.2 (un exemple posant problème : on ne peut pas toujours définir l'intégrale sur un segment d'une fonction réelle bornée!). Soit f la fonction définie

sur $[a, b]$ ($a < b$) par :

$$\forall x \in [a, b], f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Toute fonction de $u \in E_{\leq}^f$ est nécessairement négative en tous les points qui ne sont pas des nœuds d'une subdivision adaptée (car tout intervalle ouvert de $[a, b]$, en particulier tout intervalle ouvert entre deux nœuds d'une subdivision adaptée à u , contient au moins un nombre irrationnel où $f \geq u$ est nulle); on a donc

$$\sup \left\{ \int_{[a,b]} u(t) dt; u \in E_{\leq}^f \right\} \leq 0.$$

D'un autre côté, toute fonction $v \in E_{\geq}^f$ est nécessairement minorée par 1 en tous les points qui ne sont pas des nœuds d'une subdivision adaptée (car tout intervalle ouvert de $[a, b]$, en particulier tout intervalle ouvert entre deux nœuds d'une subdivision adaptée à u , contient au moins un nombre rationnel où $v \geq f \geq 1$); on a donc

$$\inf \left\{ \int_{[a,b]} v(t) dt; v \in E_{\geq}^f \right\} \geq b - a > 0.$$

On voit sur cet exemple qu'il y a incompatibilité entre les deux approches proposées, à savoir l'évaluation de ce qui serait l'intégrale de f « par en dessous » et l'évaluation de ce qui devrait être aussi l'intégrale de f , cette fois « par au dessus ». Cet exemple (par trop « mathématique ») peut certes paraître un tant soit peu artificiel, mais il existe dans la nature nombre de phénomènes matérialisés par des fonctions numériques pour lesquelles on peut deviner qu'un tel problème se pose : pensez par exemple à une fonction positive f de nature *fractale*¹, dont le graphe ressemblerait à un cactus hérissé de piquants ou au bord d'un flocon de neige. Le calcul de l'intégrale « par en dessous » tend intuitivement dans ce cas à donner 0 tandis que le calcul de l'intégrale « par au dessus » semble, lui, tendre à donner un nombre strictement positif (vu le caractère « expansionniste » de la fonction : un flocon de neige tend à occuper un maximum d'espace!).

Ce qui précède nous conduit naturellement à la définition suivante :

DÉFINITION 3.3 (fonction réelle intégrable Riemann). Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est *Riemann-intégrable* (ou encore *intégrable au sens de Riemann*²) si et seulement si elle est bornée sur $[a, b]$ et telle que :

$$(3.6) \quad \sup \left\{ \int_{[a,b]} u(t) dt; u \in E_{\leq}^f \right\} = \inf \left\{ \int_{[a,b]} v(t) dt; v \in E_{\geq}^f \right\}.$$

Si tel est le cas, on définit alors l'intégrale de f sur $[a, b]$ (au sens de Riemann) par :

$$(3.7) \quad \int_{[a,b]} f(t) dt = \sup \left\{ \int_{[a,b]} u(t) dt; u \in E_{\leq}^f \right\} = \inf \left\{ \int_{[a,b]} v(t) dt; v \in E_{\geq}^f \right\}.$$

1. En examinant le graphe de pareille fonction avec une loupe, quelque soit le grossissement, on voit apparaître le même graphe.

2. On attribue au géomètre allemand Bernhard Riemann (1826-1866) cette approche de l'intégrale des fonctions numériques, approche qu'il a souvent exploité dans ses travaux dont la finalité était tout autre. Les contributions majeures de Riemann concernent en effet surtout la géométrie. Cette approche de la notion d'intégrale est, on le verra, celle qui se prête le mieux au calcul numérique approché.

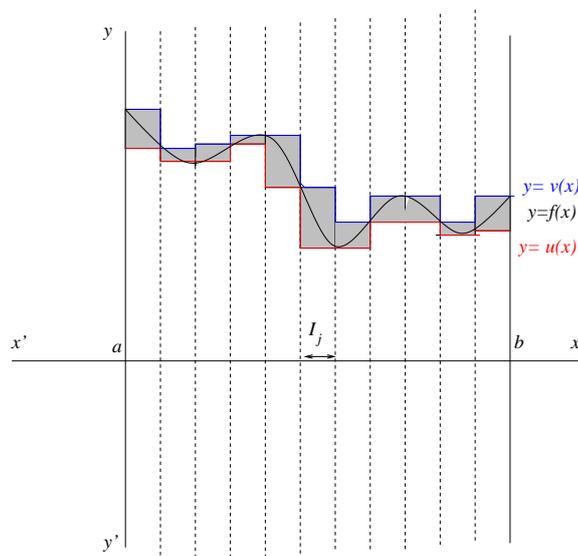


FIGURE 3.1. Illustration du critère d'intégrabilité Riemann

Le critère suivant (qu'illustre la figure 3.1) permet de caractériser si oui ou non une fonction bornée $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann intégrable.

PROPOSITION 3.1 (critère d'intégrabilité Riemann). *Soit f une fonction réelle bornée définie sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} ($a < b$). La fonction f est Riemann intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si*

$$(3.8) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists u_n \in E_{\leq}^f, \exists v_n \in E_{\geq}^f, \text{ t.q. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} (v_n - u_n)(t) dt = 0.$$

De plus, si tel est le cas, alors, pour toute suite de fonctions en escalier $(w_n)_{n \geq 1}$ telles que $u_n \leq w_n \leq v_n$ sur $[a, b]$ pour tout n assez grand, on a

$$(3.9) \quad \int_{[a,b]} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} w_n(t) dt.$$

DÉMONSTRATION. On utilise le fait suivant : si A est un ensemble non vide borné de \mathbb{R} , alors $\sup A$ et $\inf A$ s'expriment comme limites de suites d'éléments de A : si $n \in \mathbb{N}^*$, il existe en effet toujours un élément $I_n \in A$ tel que l'on ait l'encadrement $\sup A - 1/n < I_n \leq \sup A$ et un élément $J_n \in A$ tel que, cette fois, $\inf A \leq J_n < \inf A + 1/n$. On prend pour A soit l'ensemble des nombres $\int_{[a,b]} u(t) dt$ (lorsque $u \in E_{\leq}^f$) pour justifier l'existence de u_n (d'intégrale sur $[a, b]$ le nombre I_n), soit l'ensemble des nombres $\int_{[a,b]} v(t) dt$ (lorsque $v \in E_{\geq}^f$) pour justifier l'existence de v_n (d'intégrale sur $[a, b]$ le nombre J_n). La formule (3.9) résulte de la monotonie de l'opération de prise d'intégrale pour les fonctions en escalier (cf. l'inégalité 3.4), couplée avec l'utilisation du lemme des gendarmes. \square

3.3. Une classe de fonctions réelles intégrables sur un segment

Toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier est intégrable au sens de Riemann. Voici une classe bien plus large de fonctions encore intégrables au sens de Riemann.

DÉFINITION 3.4 (fonction réelle réglée sur un segment de \mathbb{R} , première définition). Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *réglée*³ si et seulement si l'on peut trouver une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de fonctions en escalier de $[a, b]$ dans \mathbb{R} telle que :

$$(3.10) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - u_n(x)| \right) = 0.$$

On dit alors qu'une telle suite $(u_n)_{n \geq 1}$ *approche f uniformément sur $[a, b]$* ou encore que *f est limite uniforme de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ sur $[a, b]$* .

REMARQUE 3.4. Toute combinaison linéaire à coefficients réels de fonctions réglées de $[a, b]$ dans \mathbb{R} est encore réglée.

Voici une caractérisation équivalente des fonctions réglées qui nous sera utile plus loin (dans la preuve de la Proposition 3.5).

PROPOSITION 3.2 (fonctions réelles réglées sur un segment de \mathbb{R} et *oscillation*). Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est réglée si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une subdivision σ^ϵ de $[a, b]$ telle que, si x_j^ϵ et x_{j+1}^ϵ sont deux nœuds consécutifs quelconques de la subdivision σ^ϵ , on ait⁴

$$(3.11) \quad \forall \xi, \eta \in]x_j^\epsilon, x_{j+1}^\epsilon[, |f(\xi) - f(\eta)| \leq \epsilon.$$

DÉMONSTRATION. Supposons que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une subdivision σ^ϵ de $[a, b]$ telle que l'on ait (3.11) dès que x_j^ϵ et x_{j+1}^ϵ sont deux nœuds consécutifs quelconques de la subdivision σ^ϵ . On définit une fonction en escalier $u_\epsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (ayant précisément σ^ϵ pour subdivision adaptée) en posant, pour tout $x \in]x_j^\epsilon, x_{j+1}^\epsilon[$, $u_\epsilon(x) = f(\xi_j^\epsilon)$, où ξ_j^ϵ est un point arbitraire de $]x_j^\epsilon, x_{j+1}^\epsilon[$ (aux nœuds de la subdivision σ^ϵ , on prend $u_\epsilon(x_j^\epsilon) = f(x_j^\epsilon)$). On a clairement ainsi, d'après (3.11) :

$$\forall x \in [a, b], |f(x) - u_\epsilon(x)| \leq \epsilon.$$

La fonction u_ϵ approche donc f à ϵ près de manière uniforme. La fonction f est donc réglée sur $[a, b]$.

Supposons maintenant $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ réglée sur $[a, b]$. On peut construire une subdivision σ^ϵ (adaptée à une fonction en escalier u_ϵ approchant f de manière

3. La terminologie « réglée » peut se justifier ainsi : pour tracer le graphe d'une fonction en escalier, on peut s'aider d'une règle disposée parallèlement à l'axe des abscisses, puis que l'on translate ensuite dans la direction de l'axe des ordonnées. Le fait que les fonctions réglées soient les limites uniformes de fonctions en escalier ou encore les fonctions d'oscillation locale arbitrairement petite (voir la Proposition 3.2 plus loin) éclaire ainsi le choix du qualificatif « réglée ».

4. La quantité :

$$\sup_{\xi, \eta \in]x_j^\epsilon, x_{j+1}^\epsilon[} |f(\xi) - f(\eta)|$$

s'appelle *oscillation* de la fonction f sur l'intervalle ouvert $]x_j^\epsilon, x_{j+1}^\epsilon[$. La condition (3.11) s'énonce donc encore en disant que l'oscillation de f sur tout intervalle ouvert entre deux nœuds consécutifs quelconques de la subdivision σ^ϵ est majorée par ϵ .

uniforme à ϵ près) de manière à ce que, si x_j^ϵ et x_{j+1}^ϵ sont deux nœuds consécutifs de cette subdivision σ^ϵ , on ait, pour tout $\xi, \eta \in]x_j^\epsilon, x_{j+1}^\epsilon[$,

$$(3.12) \quad \begin{aligned} |f(\xi) - f(\eta)| &\leq |f(\xi) - u_\epsilon(\xi)| + |u_\epsilon(\xi) - f(\eta)| \\ &= |f(\xi) - u_\epsilon(\xi)| + |u_\epsilon(\eta) - f(\eta)| \\ &\leq 2 \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - u_\epsilon(x)| = 2\epsilon. \end{aligned}$$

L'oscillation de f sur tout intervalle ouvert entre deux nœuds consécutifs de la subdivision σ^ϵ ainsi construite est majorée par 2ϵ . Comme ϵ peut être choisi arbitrairement petit, il en est de même pour 2ϵ . La Proposition 3.2 est ainsi complètement démontrée. \square

La première grande classe de fonctions réelles réglées sur un segment est celle des fonctions réelles continues sur ce segment. En effet, on a la proposition suivante.

PROPOSITION 3.3. *Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point. Toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ est réglée.*

DÉMONSTRATION. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur $[a, b]$. D'après le théorème de Heine (Théorème 2.3), une telle fonction f est uniformément continue sur $[a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc $\eta_n > 0$ tel que

$$(3.13) \quad \forall x, y \in [a, b], |x - y| \leq \eta_n \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{n}.$$

Soit σ_n une subdivision de $[a, b]$ de pas inférieur ou égal à η_n et u_n la fonction en escalier (pour laquelle σ_n se trouve être une subdivision adaptée) définie entre deux nœuds consécutifs $x_{n,j}$ et $x_{n,j+1}$ (parmi les $N_n + 1$ nœuds de σ_n) par :

$$\forall x \in]x_{n,j}, x_{n,j+1}[, u_n(x) = f(\xi_{n,j}),$$

où $\xi_{n,j}$ est un point arbitraire du segment $[x_{n,j}, x_{n,j+1}]$. Pour chaque nœud $x_{n,j}$, $j = 0, \dots, N_n$, on pose $u_n(x_{n,j}) = f(x_{n,j})$. On a donc, pour tout $x \in]x_{n,j}, x_{n,j+1}[$ (l'entier j étant ici arbitraire dans $\{0, \dots, N_n\}$), en utilisant (3.13) et le fait que le pas de la subdivision σ_n soit inférieur ou égal précisément à η_n ,

$$(3.14) \quad |f(x) - u_n(x)| = |f(x) - f(\xi_{n,j})| \leq \frac{1}{n}.$$

Ceci reste vrai si $x = x_{n,j}$ ou $x = x_{n,j+1}$ puisque le membre de gauche de (3.14) est alors nul. La condition (3.10) est donc satisfaite par la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ ainsi construite. La fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est ainsi réglée sur $[a, b]$. \square

PROPOSITION 3.4 (toute fonction réelle réglée est Riemann intégrable). *Si f est une fonction réglée de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , la fonction f vérifie le critère (3.8), et, par conséquent, est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. De plus, si $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions réelles en escalier sur $[a, b]$ qui vérifie la clause (3.10), on a*

$$(3.15) \quad \int_{[a, b]} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} u_n(t) dt.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut, par hypothèses, trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction en escalier $u_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [a, b], u_n(x) - \frac{1}{n} \leq f(x) \leq u_n(x) + \frac{1}{n}.$$

La fonction en escalier

$$\tilde{u}_n : x \in [a, b] \mapsto u_n(x) - \frac{1}{n}$$

est donc dans E_{\leq}^f , tandis que la fonction en escalier

$$\tilde{v}_n : x \in [a, b] \mapsto u_n(x) + \frac{1}{n}$$

est dans E_{\geq}^f . Or, en utilisant le fait que la prise d'intégrale des fonctions en escalier est une opération linéaire (cf. (3.3)), on en déduit :

$$0 \leq \int_{[a,b]} (\tilde{v}_n - \tilde{u}_n)(t) dt \leq \int_{[a,b]} \frac{2}{n} dt = \frac{b-a}{2n}.$$

On a donc bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} (v_n - u_n)(t) dt = 0.$$

Le critère (3.8) est bien satisfait. La fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est bien Riemann-intégrable sur $[a, b]$. De plus, comme

$$\tilde{u}_n \leq u_n \leq \tilde{v}_n \text{ sur } [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

on a

$$\int_{[a,b]} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} u_n(t) dt$$

d'après la dernière assertion de la Proposition 3.4. □

3.4. Calcul approché de l'intégrale des fonctions réelles continues

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. La fonction f est réglée sur $[a, b]$ (d'après la Proposition 3.3), donc Riemann-intégrable sur $[a, b]$ (d'après la Proposition 3.4). Il est important d'indiquer comment se calcule de manière approchée dans ce cas l'intégrale :

$$\int_a^b f(t) dt.$$

Soit $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ une suite de subdivisions de $[a, b]$ dont le pas tend vers 0. Soit, pour chaque intervalle ouvert $[x_{n,j}, x_{n,j+1}]$ entre deux nœuds consécutifs parmi les $N_n + 1$ nœuds de la subdivision σ_n , un réel arbitraire $\xi_{n,j}$ appartenant à $[x_{n,j}, x_{n,j+1}]$. Alors (compte tenu de la construction de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ donnée dans la preuve de la Proposition 3.3),

$$(3.16) \quad \int_{[a,b]} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{j=0}^{N_n-1} (x_{n,j+1} - x_{n,j}) f(\xi_{n,j}) \right].$$

Les intégrales de fonctions en escalier :

$$(3.17) \quad \int_{[a,b]} u_n(t) dt = \sum_{j=0}^{N_n-1} (x_{n,j+1} - x_{n,j}) f(\xi_{n,j}), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

qui constituent ainsi des versions « approchées » de l'intégrale de la fonction continue f , sont dites *sommes de Riemann* de la fonction continue f .

3.4.1. Un calcul approché : la méthode des rectangles. La *méthode des rectangles* consiste, pour calculer de manière approchée l'intégrale d'une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, à utiliser la suite de subdivisions régulières $(\sigma_n)_{n \geq 1}$, le pas de σ_n étant $h_n := (b - a)/n$ (le nombre de nœuds est ici $N_n + 1 = n + 1$).

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, pour chaque $j \in \{0, \dots, n\}$, on choisit, par souci de faire la part des choses,

$$\xi_{n,j} = \frac{x_{n,j} + x_{n,j+1}}{2} = a + \frac{2j+1}{2n}(b-a), \quad j = 0, \dots, n-1.$$

On a alors, avec ce choix, l'approximation de l'intégrale de f , dite *approximation par la méthode des rectangles* :

$$(3.18) \quad \int_{[a,b]} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + \frac{2j+1}{2n}(b-a)\right) \right].$$

La terminologie utilisée (méthode « des rectangles ») ici vient du fait que si $n = 1$, l'intégrale approchée figurant à droite de (3.18) :

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

s'interprète comme la surface (ou l'aire⁵) du rectangle du plan \mathbb{R}^2 dont les sommets seraient les quatre points $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(a, f((a+b)/2))$, $(b, f((a+b)/2))$.

REMARQUE 3.5 (où la formule approchée (3.18) s'avère être une formule exacte). S'il existe un entier $n = 2^{p_0}$, $p_0 \in \mathbb{N}$, tel que la fonction continue f soit de plus affine sur tout segment joignant deux nœuds consécutifs de la subdivision régulière de pas $(b-a)/2^{p_0}$, alors, on observe que :

$$(3.19) \quad \int_{[a,b]} f(t) dt = \frac{b-a}{2^p} \sum_{j=0}^{2^p-1} f\left(a + \frac{2j+1}{2^{p+1}}(b-a)\right) \quad \forall p \geq p_0,$$

autrement dit, dans ce cas particulier, la formule approchée (3.18) devient une formule exacte (à savoir la formule (3.19)).

3.4.2. Un autre calcul approché : la méthode des trapèzes. On peut aussi dans la formule approchée (3.16) remplacer $f(\xi_{n,j})$ par

$$t_1 f(\xi_{n,j}^{(1)}) + \dots + t_m f(\xi_{n,j}^{(m)}),$$

où t_1, \dots, t_m sont m nombres positifs de somme 1 arbitrairement fixés et les nombres $\xi_{n,j}^{(k)}$, $k = 1, \dots, m$, sont m nombres réels du segment $[x_{n,j}, x_{n,j+1}]$, ce pour tout entier $j = 0, \dots, N_n$.

L'exemple le plus important est sans doute celui où, comme dans la sous-section précédente 3.4.1, la subdivision σ_n est régulière et de pas $h_n = (b-a)/n$ (le nombre de nœuds étant toujours $N_n + 1 = n + 1$), et où l'on prend $m = 2$, $t_1 = t_2 = 1/2$, $\xi_{n,j}^{(1)} = x_{n,j}$ et $\xi_{n,j}^{(2)} = x_{n,j+1}$ pour $j = 0, \dots, n-1$. On obtient alors l'approximation de l'intégrale de f dite *approximation par la méthode des trapèzes* :

$$(3.20) \quad \int_{[a,b]} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f\left(a + j \frac{b-a}{n}\right) + \frac{f(b)}{2} \right) \right].$$

5. Il est important d'observer ici, pour la première fois, l'intime relation entre la notion d'intégrale d'une fonction continue sur un segment et celle de calcul d'aire ou de surface.

La terminologie utilisée ici (méthode « des trapèzes ») vient du fait que si $n = 1$, l'intégrale approchée figurant à droite de (3.20) :

$$\frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

s'interprète comme la surface du trapèze de sommets les points $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ du plan \mathbb{R}^2 .

REMARQUE 3.6 (où la formule approchée (3.20) s'avère être une formule exacte). S'il existe un entier $n = 2^{p_0}$, $p_0 \in \mathbb{N}$, tel que la fonction continue f soit de plus affine sur tout segment joignant deux nœuds consécutifs de la subdivision régulière de pas $(b-a)/2^{p_0}$, alors, on observe que :

$$(3.21) \quad \int_{[a,b]} f(t) dt = \frac{b-a}{2^p} \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{j=1}^{2^p-1} f\left(a + j \frac{b-a}{2^p}\right) + \frac{f(b)}{2} \right) \quad \forall p \geq p_0,$$

autrement dit, dans ce cas particulier, la formule approchée (3.20) devient une formule exacte (à savoir la formule (3.21)).

3.5. Une seconde caractérisation des fonctions réglées réelles

Il existe une définition équivalente (à celle de la Définition 3.4) pour la notion de fonction réelle réglée sur un segment $[a, b]$. Cette définition nous conduira à proposer (toujours suivant la Proposition 3.4) d'autres classes d'exemples de fonctions réelles Riemann-intégrables sur un segment de \mathbb{R} .

PROPOSITION 3.5 (fonction réglée, seconde définition). *Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est réglée sur $[a, b]$ si et seulement si elle admet une limite à droite en a , une limite à gauche en b et, pour tout point $c \in]a, b[$, des limites à gauche et à droite au point c .*

DÉMONSTRATION. Supposons f réglée sur $[a, b]$ (au sens de la Définition 3.4). Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$ telle que l'on ait (3.10). Soit c un point de $]a, b[$. En ce point, chaque fonction u_n , $n \geq 1$, admet une limite à droite $u_n^+(c)$ et une limite à gauche $u_n^-(c)$ (cf. la Remarque 3.2). Montrons que la suite $(u_n^+(c))_{n \geq 1}$ est de Cauchy. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$(3.22) \quad \forall n \geq N(\epsilon), \forall p \geq N(\epsilon), \sup_{x \in [a,b]} |u_n(x) - u_p(x)| \leq \sup_{x \in [a,b]} (|u_n(x) - f(x)| + |u_p(x) - f(x)|) \leq 2\epsilon.$$

On a donc

$$\forall n \geq N(\epsilon), \forall p \geq N(\epsilon), \forall h \in]0, b-c], |u_n(c+h) - u_p(c+h)| \leq 2\epsilon.$$

En faisant tendre h vers 0 par valeurs supérieures, on en déduit :

$$\forall n \geq N(\epsilon), \forall p \geq N(\epsilon), |u_n^+(c) - u_p^+(c)| \leq 2\epsilon,$$

ce qui prouve bien que la suite $(u_n^+(c))_{n \geq 1}$ est de Cauchy, donc converge (d'après le Théorème 1.3) vers une limite $l^+(c) \in \mathbb{R}$. Le même raisonnement montre que la suite $(u_n^-(c))_{n \geq 1}$ est de Cauchy, donc converge vers une limite $l^-(c) \in \mathbb{R}$. Montrons que f admet $l^+(c)$ comme limite à droite au point c . Soit $\epsilon > 0$ et $\tilde{N}(\epsilon)$ tel que

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - u_{\tilde{N}(\epsilon)}(x)| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad |u_{\tilde{N}(\epsilon)}^+(c) - l^+(c)| \leq \epsilon$$

(un tel entier $\tilde{N}(\epsilon) \geq N(\epsilon)$ existe par hypothèses). On a

$$\begin{aligned}
 (3.23) \quad & \forall h \in]0, b - c], |f(c + h) - l^+(c)| \leq \\
 & \leq |f(c + h) - u_{\tilde{N}(\epsilon)}(c + h)| + |u_{\tilde{N}(\epsilon)}(c + h) - u_{\tilde{N}(\epsilon)}^+(c)| \\
 & \quad + |u_{\tilde{N}(\epsilon)}^+(c) - l^+(c)| \\
 & \leq 2\epsilon + |u_{\tilde{N}(\epsilon)}(c + h) - u_{\tilde{N}(\epsilon)}^+(c)|.
 \end{aligned}$$

Mais, puisque $u_{\tilde{N}(\epsilon)}^+(c)$ est la limite à droite en c de la fonction en escalier $u_{\tilde{N}(\epsilon)}$, il existe $\eta = \eta(\epsilon) > 0$ tel que

$$h \in]0, \eta(\epsilon)] \implies \left(|u_{\tilde{N}(\epsilon)}(c + h) - u_{\tilde{N}(\epsilon)}^+(c)| \leq \epsilon \right).$$

On a donc ainsi :

$$h \in]0, \eta(\epsilon)] \implies \left(|f(c + h) - l^+(c)| \leq 3\epsilon \right).$$

Ceci montre que f admet $l^+(c)$ comme limite à droite en c . On montrerait de même que f admet $l^-(c)$ comme limite à gauche en c . Au point a , f admet (suivant le même raisonnement) pour limite à droite $l^+(a)$ (la limite, lorsque n tend vers l'infini, de la suite convergente car de Cauchy $(u_n^+(a))_{n \geq 1}$). Au point b , f admet (toujours suivant le même raisonnement) pour limite à gauche $l^-(b)$ (la limite, lorsque n tend vers l'infini, de la suite convergente car de Cauchy $(u_n^-(b))_{n \geq 1}$). On vient donc ainsi de démontrer que, si f est réglée sur $[a, b]$, elle admet une limite à droite en a , une limite à gauche en b , des limites à droite et à gauche en tout point $c \in]a, b[$.

Supposons, réciproquement, que la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ait une limite à droite en a , une limite à gauche en b , des limites à droite et à gauche en tout point $c \in]a, b[$. Si f n'était pas réglée sur $[a, b]$, il existerait (d'après la Proposition 3.2) $\delta > 0$ tel que, pour toute subdivision σ^0 de $I_0 = [a, b]$, il existe au moins deux éléments $\xi^{\sigma^0} < \eta^{\sigma^0}$ appartenant tous deux à l'un des intervalles ouverts entre deux nœuds consécutifs de σ_0 , tels que

$$|f(\xi^{\sigma^0}) - f(\eta^{\sigma^0})| \geq \delta.$$

L'un ou l'autre des deux intervalles $[a, (a + b)/2]$ ou $[a, (a + b)/2]$ (que l'on note I_1) hérite alors de la propriété suivante : pour toute subdivision σ^1 de I_1 , il existe deux éléments $\xi^{\sigma^1} < \eta^{\sigma^1}$ appartenant tous deux à l'un des intervalles ouverts entre deux nœuds consécutifs de σ_1 tels que

$$|f(\xi^{\sigma^1}) - f(\eta^{\sigma^1})| \geq \delta.$$

On reprend ensuite le raisonnement à partir cette fois de I_1 au lieu de I_0 . On construit ainsi une suite de segments emboîtés $I_0 = [a, b] \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$. D'après le fait que \mathbb{R} vérifie la propriété des segments emboîtés (Proposition 1.5), l'intersection de tous les segments I_k , $k \in \mathbb{N}$ (dont la longueur tend vers 0) contient un unique point $c \in [a, b]$. En ce point c , f admet une limite à gauche et une limite à droite (si $c \in]a, b[$), seulement une limite à droite si $c = a$, ou seulement une limite à gauche si $c = b$. Alors, si ξ^{σ^k} et η^{σ^k} sont du même côté de c dans I_k pour k assez grand (ce qui doit être la configuration au vu de la construction des I_k), la clause

$$|f(\xi^{\sigma^k}) - f(\eta^{\sigma^k})| \geq \delta$$

contredit le fait que f ait une limite du côté où se trouvent les deux points ξ^{σ^k} et η^{σ^k} par rapport au point c . L'hypothèse faite sur f (à savoir que f n'est pas réglée sur $[a, b]$) conduit donc à une contradiction. Nous avons ainsi prouvé par l'absurde

que si f a une limite à droite en a , une limite à gauche en b , des limites à droite et à gauche en tout point $c \in]a, b[$, alors f est réglée sur $[a, b]$. Ceci achève la preuve de la Proposition 3.5. \square

Toute fonction monotone sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} admet une limite à gauche et à droite en tout point $c \in [a, b]$ (seulement à gauche si $c = a$, à droite si $c = b$). Elle est donc réglée d'après la Proposition 3.5. Nous déduisons ainsi de la Proposition 3.4 la proposition suivante :

PROPOSITION 3.6. *Toute fonction monotone $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Plus généralement, toute différence $f - g$ de deux fonctions monotones $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.*

3.6. La classe des fonctions Riemann-intégrables

La classe des fonctions réelles Riemann-intégrables est stable par un certain nombre d'opérations usuelles classiques.

PROPOSITION 3.7 (linéarité de la prise d'intégrable au sens de Riemann). *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions réelles Riemann-intégrables sur $[a, b]$, il en est de même de toute combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$, où λ et μ sont des nombres réels, et l'on a de plus la formule :*

$$(3.24) \quad \int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

DÉMONSTRATION. Comme le sont les fonctions f et g , la fonction $\lambda f + \mu g$ est bornée sur $[a, b]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $u_n \in E_{\leq}^f$, $v_n \in E_{\geq}^f$, $\tilde{u}_n \in E_{\leq}^g$, $\tilde{v}_n \in E_{\geq}^g$, telles que

$$(3.25) \quad \int_a^b ((v_n(t) - u_n(t)) dt \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \int_a^b ((\tilde{v}_n(t) - \tilde{u}_n(t)) dt \leq \frac{1}{n}.$$

Si $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$, on a

$$\lambda u_n + \mu \tilde{u}_n \leq \lambda f + \mu g \leq \lambda \tilde{u}_n + \mu \tilde{v}_n$$

et

$$\int_a^b ((\lambda v_n + \mu \tilde{v}_n) - (\lambda u_n + \mu \tilde{u}_n))(t) dt \leq \frac{\lambda + \mu}{n}.$$

La fonction $\lambda f + \mu g$ obéit donc au critère d'intégrabilité de la Proposition 3.1 et son intégrale se calcule par la formule (3.24) du fait de la linéarité de la prise d'intégrale sur les fonctions en escalier. On remarque ensuite que, si f est Riemann-intégrable, il en est de même de $-f$: il suffit en effet dans ce cas d'utiliser l'encadrement $-v_n \leq -f \leq -u_n$; l'intégrale de $-f$ est l'opposée de l'intégrale de f . Les constantes λ et μ peuvent par conséquent être choisies de signe quelconque. \square

PROPOSITION 3.8 (stabilité par prise de sup ou d'inf). *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions Riemann-intégrables sur le segment $[a, b]$, il en est de même des deux fonctions $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver ce résultat pour la prise de sup (on remplace ensuite f et g par leurs opposées et on utilise le fait que l'on a l'égalité $\inf(f, g) = -\sup(-f, -g)$). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On reprend les fonctions en escalier $u_n, \tilde{u}_n, v_n, \tilde{v}_n$ utilisées dans la preuve de la Proposition 3.7. On introduit les deux

fonctions en escalier $U_n := \sup(u_n, \tilde{u}_n)$ et $V_n := \sup(v_n, \tilde{v}_n)$. On dispose ainsi de l'encadrement $U_n \leq \sup(f, g) \leq V_n$ sur $[a, b]$. D'autre part :

$$V_n - U_n \leq V_n - U_n + \inf(v_n, \tilde{v}_n) - \inf(u_n, \tilde{u}_n) = (v_n + \tilde{v}_n) - (u_n + \tilde{u}_n)$$

puisque la fonction $\inf(v_n, \tilde{v}_n) - \inf(u_n, \tilde{u}_n)$ est positive et que la somme du sup et de l'inf de deux fonctions numériques est égale à la somme de ces deux fonctions. Il vient donc, du fait de la monotonie de la prise d'intégrale pour les fonctions en escalier (inégalité (3.4)) et de la linéarité de cette même opération :

$$\int_a^b (V_n(t) - U_n(t)) dt \leq \int_a^b (v_n(t) - u_n(t)) dt + \int_a^b (\tilde{v}_n(t) - \tilde{u}_n(t)) dt \leq \frac{2}{n}.$$

(on utilise les inégalités (3.25)). La fonction $\sup(f, g)$ satisfait donc bien au critère d'intégrabilité de la Proposition 3.1 et l'on a :

$$\int_a^b \sup(f(t), g(t)) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b U_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b V_n(t) dt.$$

□

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, il en est donc de même (d'après la Proposition 3.8) des deux fonctions positives $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$ dont la différence $f^+ - f^-$ permet la reconstitution de la fonction $f = f^+ - f^-$. La fonction $|f| = f^+ + f^- = \sup(f, -f)$ est donc aussi Riemann-intégrable sur $[a, b]$ lorsque f l'est.

L'opération de prise d'intégrale de Riemann des fonctions réelles sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} est, comme dans le cas de la prise d'intégrale des fonctions en escalier, une *opération monotone*, ce qui signifie que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont Riemann-intégrables sur $[a, b]$, on a :

$$(3.26) \quad \left(\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x) \right) \implies \left(\int_{[a,b]} f(t) dt \leq \int_{[a,b]} g(t) dt \right).$$

Il en résulte donc que, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, on a encore l'inégalité importante :

$$(3.27) \quad \left| \int_{[a,b]} f(t) dt \right| \leq \int_{[a,b]} |f(t)| dt.$$

REMARQUE 3.7 (Attention!). Si f est une fonction Riemann-intégrable positive sur $[a, b]$, on a $\int_{[a,b]} f(t) dt \geq 0$. Par contre, il faut prendre garde au fait que $\int_{[a,b]} f(t) dt = 0$ n'implique pas en général que $f \equiv 0$ sur $[a, b]$. Par exemple, la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1/q \text{ si } x = p/q \text{ avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \\ 0 \text{ si } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

est réglée sur $[0, 1]$ et sa limite à gauche et à droite en tout point est nulle (puisque les nombres irrationnels sont denses dans $[0, 1]$). Elle est donc Riemann-intégrable sur $[0, 1]$ d'après la Proposition 3.4 et l'on a $\int_{[0,1]} f(t) dt = 0$. Mais la fonction f n'est pourtant pas identiquement nulle sur $[0, 1]$.

Concernant le produit de deux fonctions réelles Riemann-intégrables sur un segment $[a, b]$, on dispose du résultat suivant :

PROPOSITION 3.9 (intégrabilité d'un produit). *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions réelles Riemann-intégrables sur $[a, b]$, il en est de même de leur produit fg et l'on a les inégalités*

$$(3.28) \quad \left(\int_a^b (fg)(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \times \int_a^b g^2(t) dt$$

(dite de Cauchy-Schwarz⁶ ou de Hölder⁷), et

$$(3.29) \quad \sqrt{\int_a^b (f+g)^2(t) dt} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$$

(dite de Minkowski⁸).

DÉMONSTRATION. On montre dans un premier temps que f^2 est encore Riemann-intégrable sur $[a, b]$ lorsque f l'est. Il en sera de même pour g^2 lorsque g l'est, donc aussi pour

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$$

lorsque f et g le sont toutes les deux.

Occupons nous donc de f^2 et supposons dans un premier temps $f \geq 0$ sur $[a, b]$. On reprend les fonctions en escalier u_n, v_n utilisées dans la preuve de la Proposition 3.7. On pose $w_n = \inf(v_n, M) \in E_{\geq}^f$, où $M := \sup_{[a,b]} f$. On remarque que $u_n^2 \leq f^2 \leq w_n^2$ et que

$$w_n^2 - u_n^2 = (w_n - u_n)(w_n + u_n) \leq 2M(w_n - u_n) \leq 2M(v_n - u_n).$$

On a donc, du fait des inégalités (3.25) :

$$\int_a^b (w_n^2(t) - u_n^2(t)) dt \leq 2M \int_a^b (v_n(t) - u_n(t)) dt \leq \frac{2M}{n}.$$

Si f n'est pas positive, on exprime f sous la forme de différence de deux fonctions positives $f = f^+ - f^-$ et l'on remarque que $f^2 = (f^+)^2 + (f^-)^2$ car le produit $f^+ f^-$ est identiquement nul sur $[a, b]$ vu que $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$. Le carré d'une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$ est encore Riemann-intégrable sur $[a, b]$, ce qui achève la preuve de la première assertion de la proposition.

Pour obtenir l'inégalité de Cauchy-Schwarz (3.28), on observe que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b (f + \lambda g)^2(t) dt = \lambda^2 \int_a^b g^2(t) dt + 2\lambda \int_a^b (fg)(t) dt + \int_a^b f^2(t) dt \geq 0.$$

Ceci implique que le discriminant réduit du trinôme

$$X^2 \int_a^b g^2(t) dt + 2X \int_a^b (fg)(t) dt + \int_a^b f^2(t) dt$$

doit être négatif ou nul, ce qui fournit exactement l'inégalité (3.28).

6. Au nom de Cauchy (déjà croisé dans cours), se greffe ici celui du mathématicien de Silésie Hermann Schwarz (1843-1921), bâtisseur de ponts entre analyse et géométrie.

7. Otto Hölder, mathématicien allemand, spécialiste d'Analyse (1859-1937).

8. Hermann Minkowski (1864-1909), mathématicien et physicien lituanien : il s'intéressa à la géométrie (en particulier en relation avec la notion de convexité), mais aussi à la théorie (géométrique) des nombres, aux réseaux euclidiens, et à la relativité, ...

Reste à prouver l'inégalité de Minkowski (3.29). On a, en utilisant l'inégalité (3.28),

$$\begin{aligned} \int_a^b (f+g)^2(t) dt &= \int_a^b f^2(t) dt + \int_a^b g^2(t) dt + 2 \int_a^b (fg)(t) dt \\ &\leq \int_a^b f^2(t) dt + \int_a^b g^2(t) dt + 2 \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} \\ &= \left(\sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} \right)^2, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité de Minkowski en extrayant les racines carrées des deux membres. \square

REMARQUE 3.8 (les inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski dans le cadre du calcul vectoriel). Dans le cadre du calcul vectoriel dans \mathbb{R}^N (correspondant au cadre des fonctions réelles définies sur un ensemble fini à N éléments), les inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski deviennent respectivement :

$$\begin{aligned} \forall \vec{V}, \vec{W} \in \mathbb{R}^N, |\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle| &\leq \|\vec{V}\| \times \|\vec{W}\| \\ \forall \vec{V}, \vec{W} \in \mathbb{R}^N, \|\vec{V} + \vec{W}\| &\leq \|\vec{V}\| + \|\vec{W}\|, \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne dans \mathbb{R}^N .

On étend naturellement la notion de fonction réelle Riemann-intégrable au cadre des fonctions à valeurs complexes *via* la définition suivante :

DÉFINITION 3.5 (fonctions Riemann-intégrables complexes). Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dite Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si les deux fonctions réelles $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont. L'intégrale de Riemann de la fonction f sur $[a, b]$ est alors définie par :

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t) dt.$$

On observe alors que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions Riemann-intégrables sur le segment $[a, b]$ (au sens de la Définition 3.5), alors, quelque soient les nombres complexes λ et μ , la fonction $\lambda f + \mu g$ est encore Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et l'on a :

$$(3.30) \quad \int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

On a d'autre part la Proposition suivante :

PROPOSITION 3.10. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et si $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ l'est aussi, alors on a l'inégalité

$$(3.31) \quad \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

DÉMONSTRATION. Si l'on a

$$\int_a^b f(t) dt = 0,$$

alors l'inégalité (3.31) est vérifiée (le membre de gauche est nul, tandis que le membre de droite est positif). Sinon, posons :

$$e^{i\theta} := \frac{\int_a^b f(t) dt}{\left| \int_a^b f(t) dt \right|}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt \right| &= \operatorname{Re} \left(\int_a^b f(t) e^{-i\theta} dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f e^{-i\theta})(t) dt \\ &\leq \int_a^b (\operatorname{Re}(f e^{-i\theta}))^+(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt \end{aligned}$$

en utilisant la monotonie de la prise d'intégrale de Riemann des fonctions réelles (inégalité (3.26)). \square

REMARQUE 3.9 (f Riemann-intégrable $\implies |f|$ Riemann-intégrable). L'hypothèse suivant laquelle $|f|$ est Riemann-intégrable dans la Proposition 3.10 est en fait redondante : en effet si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, alors

$$|f| = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} (\cos \theta \operatorname{Re} f + \sin \theta \operatorname{Im} f)$$

l'est également. Pour voir cela, on procède comme dans les preuves des Propositions 3.7 ou 3.8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soient $u_n \in E_{\leq}^{\operatorname{Re} f}$, $v_n \in E_{\geq}^{\operatorname{Re} f}$, $\tilde{u}_n \in E_{\leq}^{\operatorname{Im} f}$, $\tilde{v}_n \in E_{\geq}^{\operatorname{Im} f}$, telles que

$$\int_{[a,b]} (v_n(t) - u_n(t)) dt \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} (\tilde{v}_n(t) - \tilde{u}_n(t)) dt \leq \frac{1}{n}.$$

Pour chaque $\theta \in \mathbb{R}$, on introduit les fonctions en escalier :

$$\begin{aligned} U_{\theta,n} &= \cos \theta \begin{cases} u_n & \text{si } \cos \theta \geq 0 \\ v_n & \text{si } \cos \theta < 0 \end{cases} + \sin \theta \begin{cases} \tilde{u}_n & \text{si } \sin \theta \geq 0 \\ \tilde{v}_n & \text{si } \sin \theta < 0 \end{cases} \in E_{\leq}^{\cos \theta \operatorname{Re} f + \sin \theta \operatorname{Im} f} \\ V_{\theta,n} &= \cos \theta \begin{cases} v_n & \text{si } \cos \theta \geq 0 \\ u_n & \text{si } \cos \theta < 0 \end{cases} + \sin \theta \begin{cases} \tilde{v}_n & \text{si } \sin \theta \geq 0 \\ \tilde{u}_n & \text{si } \sin \theta < 0 \end{cases} \in E_{\geq}^{\cos \theta \operatorname{Re} f + \sin \theta \operatorname{Im} f}. \end{aligned}$$

On note que les subdivisions adaptées maximales de ces fonctions en escalier $U_{\theta,n}$ et $V_{\theta,n}$ ne dépendent que de n (et non de θ). Les fonctions $\tilde{U}_n := \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} U_{\theta,n}$ et $\tilde{V}_n := \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} V_{\theta,n}$ sont respectivement dans $E_{\leq}^{|f|}$ et $E_{\geq}^{|f|}$ et l'on vérifie que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} (\tilde{V}_n(t) - \tilde{U}_n(t)) dt = 0.$$

Nous laissons ici de côté les détails.

Une propriété importante partagée par la classe des fonctions complexes Riemann-intégrables sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} est la *relation de Chasles*⁹.

9. Michel Chasles (1793-1880), mathématicien français de XIX-ième siècle, manipula cette relation (connue avant lui) surtout dans le contexte du calcul vectoriel (cf. l'apprentissage du calcul vectoriel en Seconde, Première et Terminale). La version « calcul intégral » dont il est question ici, en est une autre version.

PROPOSITION 3.11 (relation de Chasles). *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ un segment de $[a, b]$, la fonction $f|_{[\alpha, \beta]} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ (restriction de f au segment $[\alpha, \beta]$) est Riemann-intégrable sur le segment « restreint » $[\alpha, \beta]$. De plus, si*

$$\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

est un maillage de $[a, b]$ à $N + 1$ nœuds ($N \in \mathbb{N}^$), on a alors la formule (dite relation de Chasles) :*

$$(3.32) \quad \int_{[a, b]} f(t) dt = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{[x_j, x_{j+1}]} f(t) dt.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver ce résultat lorsque $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, mais réelle. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $u_n \in E_{\leq}^f$ et $v_n \in E_{\geq}^f$ sont telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} (v_n(t) - u_n(t)) dt = 0,$$

les restrictions de u_n et v_n au segment $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ sont des fonctions en escalier sur $[\alpha, \beta]$ et l'on a

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{[\alpha, \beta]} (v_n(t) - u_n(t)) dt \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} (v_n(t) - u_n(t)) dt = 0.$$

Comme

$$(u_n)|_{[\alpha, \beta]} \leq f|_{[\alpha, \beta]} \leq (v_n)|_{[\alpha, \beta]},$$

la fonction $f|_{[\alpha, \beta]} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait au critère 3.1 dès que la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y satisfait. Ceci prouve la première assertion de la proposition. La seconde assertion résulte de la formule (3.9) et du fait que la relation de Chasles (3.32) est vraie pour une fonction $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier (pour calculer l'intégrale, on utilise alors une subdivision adaptée dont l'ensemble des nœuds contient, entre autres, tous les points du maillage σ donné). \square

3.7. Critères d'intégrabilité par comparaison

Le critère 3.1 de Riemann-intégrabilité réelle *via* l'encadrement par les fonctions en escalier se présente en fait comme un cas particulier du critère moins contraignant suivant :

PROPOSITION 3.12 (critère de Riemann-intégrabilité « assoupli »). *Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des fonctions Riemann-intégrables (sur $[a, b]$) $f_{n,1} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_{n,2} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :*

– *d'une part, on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :*

$$(3.33) \quad \forall x \in [a, b], f_{n,1}(x) \leq f(x) \leq f_{n,2}(x) ;$$

– *d'autre part :*

$$(3.34) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} (f_{n,2} - f_{n,1})(t) dt = 0.$$

Si tel est le cas, on dispose des formules approchées :

$$(3.35) \quad \int_{[a,b]} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} f_{n,1}(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} f_{n,2}(t) dt.$$

DÉMONSTRATION. Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, on peut, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, trouver $f_{n,1} = u_n \in E_{\leq}^f$ et $f_{n,2} = v_n \in E_{\geq}^f$, de manière à ce que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} (f_{n,2} - f_{n,1})(t) dt = 0.$$

Cela résulte du critère donné à la Proposition 3.1. Comme toute fonction en escalier sur $[a, b]$ (donc en particulier $f_{n,1} = u_n$ ou $f_{n,2} = v_n$) est Riemann-intégrable sur ce segment, les deux suites $(f_{n,1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(f_{n,2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfont aux conditions requises.

Réciproquement, supposons qu'il existe deux suites $(f_{n,1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(f_{n,2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions réelles Riemann-intégrables sur $[a, b]$ telles que les conditions (3.33) et (3.34) soient remplies. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver une fonction $u_{n,1} \in E_{\leq}^{f_{n,1}}$ telle que

$$0 \leq \int_{[a,b]} f_{n,1}(t) dt - \int_{[a,b]} u_{n,1}(t) dt \leq \frac{1}{n};$$

cela résulte du critère donné à la Proposition 3.1 (avec la formule (3.9)) appliqué à la fonction Riemann-intégrable (sur $[a, b]$) $f_{n,1}$. De même, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver cette fois une fonction $v_{n,2} \in E_{\geq}^{f_{n,2}}$ telle que

$$0 \leq \int_{[a,b]} v_{n,2}(t) dt - \int_{[a,b]} f_{n,2}(t) dt \leq \frac{1}{n};$$

cela résulte encore du critère donné à la Proposition 3.1 (avec la formule (3.9)), appliqué cette fois à la fonction Riemann-intégrable (sur $[a, b]$) $f_{n,2}$. On constate que

$$0 \leq \int_{[a,b]} (v_{n,2} - u_{n,1})(t) dt \leq \frac{1}{n} + \int_{[a,b]} (f_{n,2} - f_{n,1})(t) dt + \frac{1}{n} = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Comme $u_{n,1} \in E_{\leq}^f$ car $u_{n,1} \leq f_{n,1} \leq f$ sur $[a, b]$ et que $v_{n,2} \in E_{\geq}^f$ car $v_{n,2} \geq f_{n,2} \geq f$ sur $[a, b]$, le critère 3.1 est satisfait pour la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, et cette fonction est par conséquent Riemann-intégrable sur $[a, b]$. L'assertion réciproque est bien démontrée. Quant aux formules approchées (3.35), elles résultent de la formule approchée (3.9) donnée dans la Proposition 3.1, couplée avec la démarche utilisée pour ramener la preuve de la Proposition 3.12 à l'application du critère donné par cette même Proposition 3.1. \square

Les fonctions Riemann-intégrables réelles sur un segment $[a, b]$ ne sont en général pas continues sur ce segment (il existe sur ce segment des fonctions réelles réglées, donc Riemann intégrables d'après la Proposition 3.4, mais non continues, par exemple des fonctions monotones mais non continues). On peut néanmoins énoncer un critère plus « régularisant » que ne l'est le critère 3.1 (bien que réglées, les fonctions en escalier intervenant dans pareil critère sont irrégulières, car présentant des points de discontinuité aux nœuds des maillages adaptés). Il est important du point de vue pratique de disposer d'un critère « régularisant » car les fonctions régulières s'avèrent plus naturelles à modéliser : d'ailleurs l'écran d'ordinateur affiche des graphes de

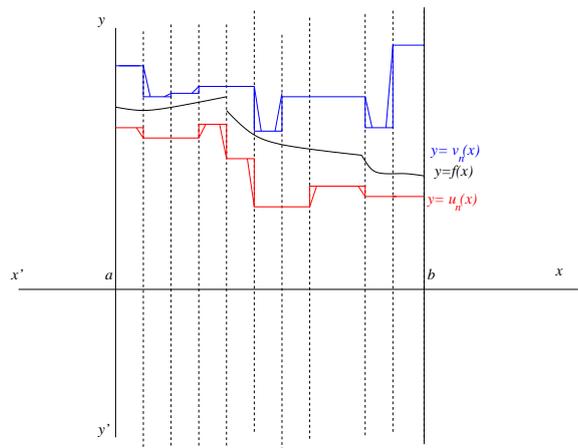


FIGURE 3.2. Le critère de Riemann-intégrabilité « régularisant »

fonctions continues affines par morceaux car il opère les « jonctions » aux nœuds éventuels des maillages (où pourraient se présenter des irrégularités éventuelles).

PROPOSITION 3.13 (critère de Riemann-intégrabilité « régularisant »). *Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des fonctions continues¹⁰ $\varphi_{n,1} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi_{n,2} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :*

– d'une part, on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :

$$(3.36) \quad \forall x \in [a, b], \varphi_{n,1}(x) \leq f(x) \leq \varphi_{n,2}(x) ;$$

– d'autre part :

$$(3.37) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} (\varphi_{n,2} - \varphi_{n,1})(t) dt = 0.$$

DÉMONSTRATION. S'il existe deux suites de fonctions continues $(\varphi_{n,1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\varphi_{n,2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , de manière à ce que les clauses (3.36) et (3.37) soient remplies, les clauses du critère assoupli donné par la Proposition 3.12 sont satisfaites (on prend $f_{n,1} = \varphi_{n,1}$ et $f_{n,2} = \varphi_{n,2}$), et f est donc Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Prouvons maintenant la réciproque. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur le segment $[a, b]$, alors, il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (d'après le critère donné à la Proposition 3.1), des fonctions en escalier $u_n \in E_{\leq}^f$ et $v_n \in E_{\geq}^f$ telles que

$$(3.38) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} (v_n - u_n)(t) dt = 0.$$

On remplace u_n par une fonction continue affine par morceaux $\varphi_{n,1}$ qui lui est inférieure et l'« approxime » comme suggéré sur la figure 3.2 ; le procédé (intuitivement très simple) consiste à « rogner » les angles par « en dessous ». On remplace de même v_n par une fonction continue affine par morceaux $\varphi_{n,2}$ qui lui est supérieure et l'« approxime » comme suggéré sur la figure 3.2 ; le procédé consiste cette fois

10. On peut aussi préciser si l'on veut : continues affines par morceaux.

toujours à « rogner » les angles, mais cette fois par au dessus. Il est possible (voir la figure 3.2) de choisir $\varphi_{n,1}$ et $\varphi_{n,2}$ de manière à ce que

$$\int_{[a,b]} (u_n - \varphi_{n,1})(t) dt \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} (\varphi_{n,2} - v_n)(t) dt \leq \frac{1}{n}.$$

On constate alors, du fait de (3.38), que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} (\varphi_{n,2} - \varphi_{n,1})(t) dt = 0.$$

Comme $\varphi_{n,1} \leq u_n \leq f \leq v_n \leq \varphi_{n,2}$ sur $[a, b]$, l'assertion réciproque est bien démontrée. \square

Les deux critères donnés par les Propositions 3.12 et 3.13 permettent de caractériser les fonctions réelles Riemann-intégrables sur $[a, b]$ parmi les fonctions bornées sur $[a, b]$. Auparavant, il nous faut donner la définition suivante :

DÉFINITION 3.6 (sous-ensembles négligeables¹¹ de \mathbb{R}). Un sous-ensemble A de \mathbb{R} est dit *négligeable* si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite de segments $([a_{\epsilon,k}, b_{\epsilon,k}])_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que l'on ait

$$(3.39) \quad A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} [a_{\epsilon,k}, b_{\epsilon,k}] \quad \text{et} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}^*} (b_{\epsilon,k} - a_{\epsilon,k}) \leq \epsilon.$$

Armés de cette définition, nous pouvons énoncer l'important résultat suivant, permettant de mieux comprendre (en la caractérisant) ce qu'est la classe des fonctions complexes intégrables Riemann sur un segment de \mathbb{R} (et surtout comment elle diffère de la classe des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{C}).

THEORÈME 3.1 (caractérisation de l'intégrabilité au sens de Riemann). *Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si f est bornée et le sous-ensemble*

$$A := \{x \in [a, b]; f \text{ discontinue en } x\}$$

est négligeable.

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver ce critère pour les fonctions à valeurs réelles (compte tenu de la définition 3.5).

Nous nous contenterons ici de montrer que si f est réelle bornée et si son ensemble de points de discontinuité est fini, alors f satisfait au critère de la Proposition 3.12. Soit $m \leq f \leq M$ une telle fonction et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour chacun des K points x_k , $k = 1, \dots, K$, de discontinuité de f , on considère un segment $I(x_k, n)$ de longueur strictement inférieure à $1/n$ ne contenant aucun autre point de discontinuité. On pose

$$f_{n,1} := m \sum_{k=1}^K \chi_{I(x_k, n)} + f \chi_{[a,b] \setminus \bigcup_j I(x_k, n)}, \quad f_{n,2} := M \sum_{k=1}^K \chi_{I(x_k, n)} + f \chi_{[a,b] \setminus \bigcup_j I(x_k, n)}.$$

11. Ou encore « de mesure nulle ».

Ces deux fonctions sont Riemann-intégrables sur $[a, b]$ (comme somme de fonctions Riemann-intégrables) et l'on a $f_{n,1} \leq f \leq f_{n,2}$, ainsi que :

$$\int_{[a,b]} (f_{n,2} - f_{n,1})(t) dt = (M - m) \sum_{k=1}^K \text{long}(I(x_k, n)) \leq K \frac{M - m}{n}.$$

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} (f_{n,2} - f_{n,1})(t) dt = 0.$$

Les conditions (3.33) et (3.34) sont donc satisfaites et le critère d'intégrabilité de la Proposition 3.12 s'applique. Si l'ensemble des points de discontinuité de f n'est plus fini, mais seulement négligeable, une preuve similaire peut être conduite. Nous la présenterons en annexe dans la section 3.10.

L'assertion réciproque repose sur le critère régularisant de la Proposition 3.13, mais est plus délicate. Nous l'admettrons ici. Nous démontrerons dans la section 3.8 le Théorème de Darboux (Théorème 3.2, dont cette assertion réciproque peut aussi être envisagée comme un corollaire). Une preuve de la démonstration de cette assertion réciproque sera donnée en annexe (dans la section 3.10). \square

EXEMPLE 3.3 (fonctions Riemann-intégrables non réglées). Le Théorème 3.1 assure l'existence de fonctions Riemann-intégrables non réglées. Par exemple, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/|x|) & \text{si } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

de l'exemple 2.3 admet une discontinuité de seconde espèce à l'origine et n'est donc pas réglée sur $[-1, 1]$. Par contre, elle est Riemann-intégrable sur $[-1, 1]$ car bornée et continue en tout point différent de 0.

3.8. Intégration Riemann et sommes de Darboux

Une autre caractérisation importante de l'intégrabilité au sens de Riemann (pour les fonctions réelles sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R}) rejoint les résultats d'approximation fournis (dans le cas des fonctions continues) par la formule des rectangles (3.18) (*cf.* la sous-section 3.4.1) ou la formule des trapèzes (3.20) (*cf.* la sous-section 3.4.2). Il nous faut auparavant introduire (pour une fonction réelle bornée sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R}) les notions de *sommes de Darboux* (respectivement *inférieure* et *supérieure*) attachées à une subdivision σ de $[a, b]$.

DÉFINITION 3.7 (sommes de Darboux¹² d'une fonction réelle bornée, attachées à une subdivision). Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle bornée, et σ une subdivision de $[a, b]$ à $N + 1$ nœuds $x_0 = a, x_1, \dots, x_N = b$. On appelle :

12. On doit leur introduction au mathématicien français (analyste et géomètre différentiel) Gaston Darboux (1842-1917). L'introduction des sommes de Darboux est postérieure à celle (par B. Riemann) des *sommes de Riemann* (3.17) que nous avons défini (pour les fonctions continues) en préambule à la section 3.4 et sur lesquelles nous reviendrons (*cf.* la Définition 3.8 plus loin).

– somme de Darboux inférieure de f sur $[a, b]$ (relativement à la subdivision σ) la quantité :

$$(3.40) \quad s[f; \sigma] := \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) \inf_{[x_j, x_{j+1}]} f ;$$

– somme de Darboux supérieure de f sur $[a, b]$ (relativement à la subdivision σ) la quantité :

$$(3.41) \quad S[f; \sigma] := \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) \sup_{[x_j, x_{j+1}]} f ;$$

REMARQUE 3.10. Nous avons convenu dans les définitions (3.40) et (3.41) de prendre chaque fois l'inf ou le sup sur les segments fermés $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \dots, N-1$, entre deux nœuds consécutifs de la subdivision σ . On aurait pu tout aussi prendre ces inf ou sup sur les segments ouverts $]x_j, x_{j+1}[$; les valeurs de $s[f; \sigma]$ et $S[f; \sigma]$ s'en trouveraient bien sûr modifiées, mais l'énoncé du théorème de Darboux (Théorème 3.2 ci-dessous) demeurerait valide.

Armés de la définition des sommes de Darboux (Définition 3.7), nous pouvons énoncer le théorème suivant, fournissant une nouvelle caractérisation (en même temps que la possibilité d'un calcul approché) de l'intégrabilité au sens de Riemann des fonctions réelles bornées sur un segment de \mathbb{R} .

THEORÈME 3.2 (théorème de Darboux). *Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle bornée sur $[a, b]$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$;

(2) on a, si $\Sigma([a, b])$ désigne l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a, b]$,

$$(3.42) \quad \sup_{\sigma \in \Sigma([a, b])} s[f; \sigma] = \inf_{\sigma \in \Sigma([a, b])} S[f; \sigma] ;$$

(3) on a :

$$(3.43)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ t.q. } \forall \sigma \in \Sigma([a, b]), \left(\tau(\sigma) \leq \delta \right) \implies \left(S[f; \sigma] - s[f; \sigma] \leq \epsilon \right).$$

De plus, si l'une de ces trois conditions ci-dessus est remplie, alors, pour toute suite $(\sigma_n)_{n \geq \mathbb{N}}$ de subdivisions de $[a, b]$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau(\sigma_n) = 0$, on dispose de l'une ou l'autre des méthodes suivantes pour calculer de manière approchée l'intégrale (au sens de Riemann) de f sur $[a, b]$:

$$(3.44) \quad \int_{[a, b]} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} s[f; \sigma_n] = \lim_{n \rightarrow +\infty} S[f; \sigma_n].$$

DÉMONSTRATION. Prouvons tout d'abord (1) \implies (2). Si f vérifie (1), il existe, pour tout $\epsilon > 0$, deux fonctions en escalier $u \in E_{\leq}^f$ et $v \in E_{\geq}^f$, telles que

$$\int_{[a, b]} (v - u)(t) dt \leq \epsilon$$

(cela résulte de la Proposition (3.1)). Soit σ une subdivision adaptée aux deux fonctions en escalier u et v , de nœuds x_j , $j = 0, \dots, N$. Pour chaque $j = 0, \dots, N-1$,

on introduit des points y_j et z_j tels que :

$$x_j < y_j < z_j < x_{j+1} \quad \text{et} \quad \max(y_j - x_j, x_{j+1} - z_j) \leq \frac{\epsilon}{4N \sup_{[a,b]} |f|}.$$

En introduisant les nœuds auxiliaires $y_1, z_1, \dots, y_{N-1}, z_{N-1}$ (en plus des nœuds existants x_0, \dots, x_N), on définit une nouvelle subdivision $\tilde{\sigma}$ de $[a, b]$, ayant cette fois $N + 1 + 2N = 3N + 1$ nœuds. On calcule les sommes de Darboux $s[f; \tilde{\sigma}]$ et $S[f; \tilde{\sigma}]$ en distinguant deux catégories de segments :

- les segments (dits « latéraux ») de la forme soit $[x_j, y_j]$ ou bien $[z_j, x_{j+1}]$ (pour $j = 0, \dots, N - 1$), pour lesquels la somme des contributions aux sommes de Darboux $s[f; \tilde{\sigma}]$ ou $S[f; \tilde{\sigma}]$ est au plus égale à

$$2N\epsilon \times \frac{\sup_{[a,b]} |f|}{4N \sup_{[a,b]} |f|} \leq \epsilon/2 ;$$

- les segments (dits « médians ») de la forme $[y_j, z_j]$, $j = 0, \dots, N - 1$, pour lesquels la somme des contributions aux deux sommes de Darboux (inférieure ou supérieure) se trouve dans le segment

$$\left[\int_{[a,b]} u(t) dt - \frac{\epsilon}{2}, \int_{[a,b]} v(t) dt \right]$$

puisque (du fait que $[y_j, z_j] \subset]x_j, x_{j+1}[$ et que σ est adaptée aux fonctions en escalier u et v), on a :

$$u \leq \inf_{[y_j, z_j]} f \leq \sup_{[y_j, z_j]} f \leq v \quad \text{sur} \quad [y_j, z_j] \quad \forall j = 0, \dots, N - 1.$$

Il en résulte :

$$S[f; \tilde{\sigma}] - s[f; \tilde{\sigma}] \leq \left(\int_{[a,b]} (v - u)(t) dt + \frac{\epsilon}{2} \right) + \frac{\epsilon}{2} \leq 2\epsilon.$$

On en déduit que l'assertion (2) est vraie (puisque $\epsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement).

Prouvons maintenant (2) \implies (1). Si f est telle que l'assertion (2) soit vraie, il existe, pour tout $\epsilon > 0$, une subdivision $\sigma \in \Sigma([a, b])$ telle que $S[f; \sigma] - s[f; \sigma] \leq \epsilon$. Soient $x_0 = a, \dots, x_N = b$ les $N + 1$ nœuds de cette subdivision. On peut interpréter $s[f; \sigma]$ comme l'intégrale de la fonction $u \in E_{\leq}^f$ égale sur $]x_j, x_{j+1}[$ à $\inf_{[x_j, x_{j+1}]} f$ pour tout $j = 0, \dots, N - 1$ (et valant $\inf_{[a,b]} f$ aux nœuds x_j). On peut de même interpréter $S[f; \sigma]$ comme l'intégrale de la fonction $v \in E_{\geq}^f$ égale sur $]x_j, x_{j+1}[$ à $\sup_{[x_j, x_{j+1}]} f$ pour tout $j = 0, \dots, N - 1$ (et valant $\sup_{[a,b]} f$ aux nœuds x_j). On a $\int_{[a,b]} (v - u)(t) dt \leq \epsilon$. La fonction f satisfait au critère de la Proposition 3.1. Elle est donc Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Il est immédiat de remarquer que (3) \implies (2). Il reste donc, pour conclure au fait que les trois assertions (1), (2), (3) sont équivalentes, à prouver que (2) \implies (3). Soit $\epsilon > 0$. Si l'assertion (2) est vraie, il existe une subdivision σ_ϵ de $[a, b]$ telle que $S[f; \sigma_\epsilon] - s[f; \sigma_\epsilon] \leq \epsilon/2$. Posons $\delta(\epsilon) := \epsilon / (4N \sup_{[a,b]} |f|)$. Soit σ une subdivision de $[a, b]$ de pas $\tau(\sigma) \leq \delta(\epsilon)$, ayant pour nœuds y_0, \dots, y_M . Pour calculer $S[f; \sigma] - s[f; \sigma]$, on commence par séparer en deux paquets l'ensemble des segments $[y_j, y_{j+1}]$ (pour $j = 0, \dots, M - 1$) :

- ceux qui contiennent un des nœuds x_j de la subdivision σ_ϵ (paquet 1) ;
- ceux qui ne contiennent aucun nœud x_j de la subdivision σ_ϵ (paquet 2).

La contribution à $S[f; \sigma] - s[f; \sigma]$ des segments du premier paquet fournit une somme de termes majorée par :

$$2 \sup_{[a,b]} |f| \times N \times \delta(\epsilon) = 2 \sup_{[a,b]} |f| \times N \times \frac{\epsilon}{4N \sup_{[a,b]} |f|} \leq \epsilon/2.$$

Comme chaque segment $[y_j, y_{j+1}]$ ($j = 0, \dots, M - 1$) du second paquet est strictement compris entre deux nœuds consécutifs de la subdivision σ_ϵ , la contribution à $S[f; \sigma] - s[f; \sigma]$ des segments du second paquet fournit une somme de termes majorée par $S[f; \sigma_\epsilon] - s[f; \sigma_\epsilon] \leq \epsilon/2$. Au final, en additionnant les contributions des deux paquets, on trouve que $S[f; \sigma] - s[f; \sigma] \leq \epsilon/2 + \epsilon/2$ dès que $\tau(\sigma) \leq \delta(\epsilon)$. La condition (3) est donc bien remplie.

L'assertion finale du théorème (concernant le calcul approché de l'intégrale de f sur $[a, b]$ lorsque l'une des conditions équivalentes (1), (2), ou (3) est remplie) résulte de la formule (3.9) donnée dans la Proposition 3.1 : on prend pour w_n soit la fonction en escalier $u_n \in E_{\leq}^f$ dont l'intégrale est égale à $s[f; \sigma_n]$, soit la fonction en escalier $v_n \in E_{\geq}^f$ dont l'intégrale est égale à $S[f; \sigma_n]$ (cf. la preuve de (2) \implies (1)). \square

Si f est une fonction réelle bornée sur un segment $[a, b]$ (non réduit à un point) et $\sigma \in \Sigma([a, b])$. Choisissons, pour chaque segment $[x_j, x_{j+1}]$ entre deux nœuds consécutifs de σ , un point $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$. On a :

$$\inf_{[x_j, x_{j+1}]} f \leq f(\xi_j) \leq \sup_{[x_j, x_{j+1}]} f \quad \forall j = 0, \dots, N - 1.$$

Il en résulte :

$$(3.45) \quad \text{sr}[f; (\xi_j)_j; \sigma] := \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) f(\xi_j) \in [s[f; \sigma], S[f; \sigma]].$$

Cette remarque nous conduit à introduire la définition suivante (déjà introduite dans ce cours lorsque f était une fonction continue, cf. (3.17), section 3.4) :

DÉFINITION 3.8 (sommées de Riemann, d'une fonction complexe bornée sur un segment). Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} , $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe bornée, et σ une subdivision de $[a, b]$ à $N+1$ nœuds $x_0 = a, x_1, \dots, x_N = b$. On appelle *somme de Riemann* de f (assujettie à la subdivision σ) toute expression

$$(3.46) \quad \text{sr}[f; (\xi_j)_j; \sigma] := \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) f(\xi_j),$$

où, pour chaque $j \in \{0, \dots, N - 1\}$, ξ_j désigne un point arbitraire du segment $[x_j, x_{j+1}]$ entre les deux nœuds consécutifs x_j et x_{j+1} de la subdivision σ .

REMARQUE 3.11 (des sommes dont l'évaluation s'avère plus « explicite »). Les sommes de Riemann (3.46) s'avèrent plus « explicites » à évaluer que les sommes de Darboux car, au contraire de ces dernières, leur évaluation n'implique pas de calcul préliminaire de sup ou d'inf de la fonction f sur les segments $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \dots, N - 1$, joignant deux nœuds consécutifs de la subdivision σ . On note aussi qu'une expression du type (3.46) garde un sens lorsque f est à valeurs complexes, ce qui n'est pas le cas pour les expressions (3.40) ou (3.41) définissant les sommes de Darboux inférieure $s[f; \sigma]$ ou supérieure $S[f; \sigma]$.

Le théorème de Darboux (Théorème 3.2) se décline en termes de sommes de Riemann sous la forme du résultat suivant, valable (c'est l'un de ses avantages, outre le fait que les sommes de Riemann s'avèrent d'une évaluation plus aisée que les sommes de Darboux, cf. la remarque 3.11) cette fois pour les fonctions à valeurs complexes et non plus seulement réelles.

THEORÈME 3.3 (calcul approché de l'intégrale *via* les sommes de Riemann). Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe bornée. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$;
- (2) il existe un nombre complexe I tel que :

(3.47)

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ t.q. $\forall \sigma \in \Sigma([a, b])$ (de noeuds $x_j, j = 0, \dots, N$),

$(\tau(\sigma) \leq \delta) \implies \left(\forall \xi_j \in [x_j, x_{j+1}], j = 0, \dots, N-1, \left| \text{sr}[f; (\xi_j)_j; \sigma] - I \right| \leq \epsilon \right) ;$

autrement dit, toutes les sommes de Riemann de la fonction f peuvent être rendues arbitrairement proches du nombre complexe I (et par conséquent arbitrairement proches les unes des autres) pourvu que le pas de la subdivision à laquelle elles sont assujetties soit choisi suffisamment petit.

Si l'une des deux assertions équivalentes (1) ou (2) est vraie, alors les deux le sont et l'on a :

$$(3.48) \quad I = \int_{[a,b]} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{sr}[f; (\xi_{n,j})_j; \sigma_n],$$

où $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne n'importe quelle suite de subdivisions de $[a, b]$ dont le pas tend vers 0.

EXEMPLE 3.4. C'est la formule (3.48) qui est en général exploitée aux fins du calcul explicite de l'intégrale $\int_{[a,b]} f(t) dt$, lorsque f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. Dans le cas particulier où $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est continue, c'est sur cette formule que reposent la formule (3.18) des rectangles ou la formule (3.20) des trapèzes. Incidemment, cette même formule (3.48) permet de calculer des limites. Par exemple, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{4n+1} = \frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{1}{\frac{2k+1}{2n}} + \frac{1}{4n+1}.$$

Soit $[a, b] = [1, 2]$, $f : x \in [1, 2] \mapsto 1/x$, σ_n la subdivision régulière de $[1, 2]$ de pas constant $1/n$; pour chaque segment $[x_{n,j}, x_{n,j+1}]$, on note $\xi_{n,j}$ le milieu du segment $[x_j, x_{j+1}]$. On observe que :

$$\text{sr}[f; (\xi_{n,j})_j; \sigma_n] = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\frac{2n+1}{2n}} + \frac{1}{\frac{2(n+1)+1}{2n}} + \dots + \frac{1}{\frac{2(2n-1)+1}{2n}} \right) = 2 \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{1}{2k+1}.$$

Il résulte alors de la formule (3.48) que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2} \int_{[1,2]} \frac{dt}{t} = \frac{\ln 2}{2}$$

(la dernière égalité sera justifiée dans la section suivante). Notons que, puisque $t \mapsto 1/t$ est continue sur $[1, 2]$, le résultat utilisé ici (en l'occurrence la formule (3.48)) est en fait un cas particulier de la formule des rectangles (3.18).

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer le résultat lorsque f est une fonction réelle bornée (on l'applique ensuite, lorsque f est une fonction complexe bornée, aux deux fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$). On suppose donc ici f réelle bornée.

Le fait que (1) \implies (2) résulte du théorème de Darboux (Théorème 3.2) et du fait que l'on ait, pour les sommes de Riemann d'une fonction réelle, l'encadrement (3.45). Notons que si (1) (et donc (2)) est vraie, alors le fait que l'on ait la formule d'approximation (3.48) résulte des deux formules d'approximation (3.44), couplées avec le lemme des gendarmes.

Il reste donc à prouver l'implication (2) \implies (1). Supposons que f soit une fonction réelle bornée sur $[a, b]$ et telle que l'assertion (2) soit valide (pour un certain nombre complexe I). Soit $\epsilon > 0$ et σ une subdivision de $[a, b]$ de pas inférieur ou égal à $\delta(\epsilon/4)$, ayant pour nœuds les points x_j , $j = 0, \dots, N$. D'après la définition de $\inf_{[x_j, x_{j+1}]} f$ (lorsque $j \in \{0, \dots, N-1\}$), il existe, pour chaque tel indice j , un nombre $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$ tel que

$$0 \leq f(\xi_j) - \inf_{[x_j, x_{j+1}]} f \leq \frac{\epsilon}{4(b-a)}.$$

On a donc, pour ce choix des ξ_j , $j = 0, \dots, N-1$,

$$(3.49) \quad 0 \leq \operatorname{sr}[f; (\xi_j)_j; \sigma] - s[f; \sigma] \leq \frac{\epsilon}{4(b-a)} \times \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) = \epsilon/4.$$

De même, d'après la définition de $\sup_{[x_j, x_{j+1}]} f$ (lorsque $j \in \{0, \dots, N-1\}$), il existe, pour chaque tel indice j , un nombre $\tilde{\xi}_j \in [x_j, x_{j+1}]$ tel que

$$0 \leq \sup_{[x_j, x_{j+1}]} f - f(\tilde{\xi}_j) \leq \frac{\epsilon}{4(b-a)}.$$

On a donc, pour ce choix des $\tilde{\xi}_j$, $j = 0, \dots, N-1$,

$$(3.50) \quad 0 \leq S[f; \sigma] - \operatorname{sr}[f; (\tilde{\xi}_j)_j; \sigma] \leq \frac{\epsilon}{4(b-a)} \times \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) = \epsilon/4.$$

Compte-tenu de ce que

$$|\operatorname{sr}[f; (\xi_j)_j; \sigma] - \operatorname{sr}[f; (\tilde{\xi}_j)_j; \sigma]| \leq |\operatorname{sr}[f; (\xi_j)_j; \sigma] - I| + |I - \operatorname{sr}[f; (\tilde{\xi}_j)_j; \sigma]| \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2},$$

on déduit de (3.49) et (3.50)

$$|S[f; \sigma] - s[f; \sigma]| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.$$

L'assertion (3) du théorème de Darboux (Théorème 3.2) est alors satisfaite par la fonction f . On déduit donc du Théorème 3.2 (équivalence entre (3) et (1) dans l'énoncé du Théorème 3.2) que f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. La preuve de (2) \implies (1) est ainsi achevée. \square

3.9. Intégration-Riemann et formules de la moyenne

3.9.1. La relation entre la prise d'intégrale au sens de Riemann et la primitivisation. Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Il résulte de la Proposition 3.11 que, si x et y sont des points distincts quelconques de $[a, b]$, la fonction f est Riemann-intégrable sur le sous-segment de $[a, b]$ d'extrémités x et y . On convient alors de poser :

$$(3.51) \quad \forall x, y \in [a, b], \int_x^y f(t) dt = \begin{cases} \int_{[x,y]} f(t) dt & \text{si } a \leq x < y \leq b \\ -\int_{[x,y]} f(t) dt & \text{si } a \leq y < x \leq b \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Il résulte alors de la relation de Chasles (cf. (3.32), Proposition 3.11) qu'avec les conventions (3.51),

$$(3.52) \quad \forall x, y, z \in [a, b], \int_x^z f(t) dt = \int_x^y f(t) dt + \int_y^z f(t) dt.$$

La relation (3.52) correspond ainsi à une formulation algébrique de la relation de Chasles (3.32).

L'important résultat suivant, vu en Terminale, relie le calcul de l'intégrale au sens de Riemann à la « primitivisation » des fonctions continues.

PROPOSITION 3.14 (intégration au sens de Riemann et primitivisation). *Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$. La fonction*

$$F : x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est continue sur $[a, b]$. De plus, si f est continue en un point $x_0 \in [a, b]$, F est dérivable¹³ au point x_0 et on a $F'(x_0) = f(x_0)$.

DÉMONSTRATION. On observe, si $x \in [a, b]$, en utilisant la relation de Chasles sous forme algébrique (3.52)) que

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

pour tout h tel que $x+h \in [a, b]$. On a donc

$$|F(x+h) - F(x)| \leq \left| \int_x^{x+h} |f(t)| dt \right| \leq |h| \sup_{[a,b]} |f|$$

(en utilisant l'inégalité (3.31)). On en déduit la continuité de F au point x , donc en tout point de $[a, b]$. Si maintenant $x = x_0$ est un point de continuité de f et si h est tel que $x_0 + h \in [a, b]$ et $h \neq 0$, on a aussi

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt.$$

13. Seulement à droite si $x_0 = a$, à gauche si $x_0 = b$.

On en déduit, du fait de l'inégalité (3.31) (cf. la Proposition 3.10) :

$$(3.53) \quad \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|h|} \times |h| \times \sup_{|x-x_0| \leq |h|} |f(x)| = \sup_{|x-x_0| \leq |h|} |f(x)|.$$

Si f est continue en x_0 , on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\sup_{|x-x_0| \leq |h|} |f(x)| \right) = 0.$$

En reportant dans (3.53), il vient

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \left(\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right) = 0.$$

La fonction F est donc bien dérivable au point x_0 (seulement à droite si $x_0 = a$, seulement à gauche si $x_0 = b$), de nombre dérivé $F'(x_0) = f(x_0)$ (cf. la Définition 2.10). \square

Ce résultat a deux corollaires très importants.

- Le premier est le *Théorème Fondamental de l'Analyse*, déjà mentionné dans ce cours (Théorème 2.9), qui stipule que si g est une fonction de classe C^1 sur un segment $[a, b]$ (non réduit à un point), alors :

$$(3.54) \quad g(b) - g(a) = \int_{[a,b]} g'(t) dt.$$

Le membre de gauche de cette formule peut être considéré comme l'« *intégrale de g sur le bord orienté de $[a, b]$* », ce bord orienté étant assimilé à un « dipôle », où l'origine a serait comptée négativement ($-$), et l'extrémité b positivement ($+$). C'est sous cette forme qu'il conviendra de repenser le théorème fondamental de l'analyse (formulé ici en dimension 1) lorsqu'il s'agira de passer aux dimensions supérieures (où il deviendra une formule clef autant en physique qu'en mathématiques, à savoir la *formule de Stokes*).

- Le second est de fait un cas particulier de la formule (3.54), qui mérite qu'on le formule sous forme d'une proposition, tant il s'avère un outil pratique essentiel :

PROPOSITION 3.15 (formule d'intégration par parties). *Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point et g_1, g_2 deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. On a alors la formule :*

$$(3.55) \quad \int_{[a,b]} g_1(t) g_2'(t) dt = g_1(b)g_2(b) - g_1(a)g_2(a) - \int_{[a,b]} g_1'(t) g_2(t) dt.$$

DÉMONSTRATION. On applique la formule (3.54) à la fonction $g = g_1 g_2$, elle aussi de classe C^1 sur $[a, b]$. \square

REMARQUE 3.12 (un formidable outil pratique). Les applications de la formule d'intégration par parties sont légion. C'est la seule formule dont on dispose permettant de calculer explicitement des primitives sous forme d'expressions impliquant des fonctions connues (fractions rationnelles, logarithme, exponentielle, fonctions trigonométriques circulaires ou hyperboliques et leurs inverses). C'est sur elle que repose par exemple le calcul de

primitive en termes de telles fonctions « simples¹⁴ » tel qu'il est mis en œuvre dans les logiciels de calcul symbolique comme MAPLE. Il faut cependant avoir conscience que les fonctions pour lesquelles on dispose de telles primitives exprimables à partir de fonctions « simples » constituent un infime vivier dans la famille de toutes les fonctions numériques¹⁵. Le seul moyen de calculer des primitives dans la plupart des cas reste l'approche numérique (approchée) suivant les méthodes basées sur l'utilisation du Théorème de Darboux (Théorème 3.2, formule (3.44)) ou le calcul approché *via* les sommes de Riemann (Théorème 3.3, formule (3.48)), dont les formules des rectangles (3.18) et des trapèzes (3.20) sont des cas particuliers. La « pratique » de la formule d'intégration par parties sera développée dans les séances de TD.

Une conséquence du Théorème Fondamental de l'Analyse (Théorème 2.9) est le résultat suivant :

PROPOSITION 3.16 (changement de variables dans le calcul de primitives). *Soit $[\alpha, \beta]$ et $[a, b]$ deux intervalles de \mathbb{R} , $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ une fonction de classe C^1 . Alors, pour toute fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{C} , on a :*

$$(3.56) \quad \forall u \in [\alpha, \beta], \quad \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(u)} f(\xi) d\xi = \int_{\alpha}^u f(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau.$$

DÉMONSTRATION. Soit F une primitive de f sur $[a, b]$, par exemple la fonction

$$x \in [a, b] \mapsto \int_{\varphi(\alpha)}^x f(\xi) d\xi$$

(cf. la Proposition 3.14). On observe (en invoquant la règle de Leibniz sur la dérivation des fonctions composées, voir par exemple [Ymis], chapitre 3) que la fonction

$$t \in [\alpha, \beta] \mapsto F(\varphi(t))$$

est une primitive de $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ sur $[\alpha, \beta]$. On a donc

$$F(\varphi(u)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\alpha}^u (f \circ \varphi)(\tau) \varphi'(\tau) d\tau$$

d'après le Théorème fondamental de l'Analyse (formule (3.54)). C'est bien la formule (3.56) attendue. \square

Comme le suggère la Proposition 3.14, les opérations de prise de primitive et d'intégration au sens de Riemann sont intimement liées. À ne pas confondre avec la formule de changement de variables (3.56) dans l'opération de prise de primitive, on dispose aussi d'une formule de changement de variables dans l'opération de prise d'intégrale au sens de Riemann.

14. On dit aussi, « de la classe de Liouville », car c'est le mathématicien français Joseph Liouville (1809-1882) qui a formalisé une telle classe de fonctions.

15. Une fonction si importante que la fonction de Gauß $x \in \mathbb{R} \mapsto (1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$, densité de la loi normale centrée réduite, fonction essentielle tant en mathématiques (probabilités et statistique) qu'en physique (physique quantique, par exemple) ou qu'en informatique (traitement d'images, théorie de l'information), entre justement dans la catégorie des fonctions sans primitive exprimable à partir de fonctions « simples ».

PROPOSITION 3.17 (changement de variables dans le calcul d'intégrales au sens de Riemann). Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ une application de classe C^1 réalisant une bijection entre les deux segments $[\alpha, \beta]$ et $[a, b]$, telle que φ' ne s'annule pas sur $[\alpha, \beta]$ ¹⁶. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si la fonction

$$t \in [\alpha, \beta] \mapsto f(\varphi(t)) |\varphi'(t)|$$

est Riemann-intégrable sur $[\alpha, \beta]$. Si tel est le cas, on dispose d'autre part de la formule de changement de variables suivante :

$$(3.57) \quad \int_{[a,b]} f(\xi) d\xi = \int_{[\alpha,\beta]} f(\varphi(\tau)) |\varphi'(\tau)| d\tau.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver cette proposition lorsque f est une fonction de $[a, b]$ dans \mathbb{R} (on raisonne sinon avec les deux fonctions réelles $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$). On suppose pour fixer les idées que $\varphi' > 0$ sur $[\alpha, \beta]$, ce qui implique que la fonction φ est strictement croissante (cf. la Proposition 2.12) et que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. Supposons f Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$ (cf. la Proposition 3.1) deux fonctions $u_n \in E_{\leq}^f$ et $v_n \in E_{\geq}^f$ telles que $\int_{\mathbb{R}} (v_n - u_n)(\xi) d\xi \leq 1/n$. Les fonctions $u_n \circ \varphi$ et $v_n \circ \varphi$ sont deux fonctions réelles en escalier sur $[\alpha, \beta]$, donc Riemann-intégrables sur ce segment. Comme φ' est une fonction continue (donc Riemann-intégrable) sur $[\alpha, \beta]$, il résulte de la Proposition 3.9 que les deux fonctions $t \in [\alpha, \beta] \mapsto u_n(\varphi(t)) \varphi'(t)$ et $t \in [\alpha, \beta] \mapsto v_n(\varphi(t)) \varphi'(t)$ sont également Riemann-intégrables sur $[\alpha, \beta]$. Or, on observe en utilisant la relation de Chasles ((3.32), Proposition 3.11, pour une subdivision adaptée à u_n et v_n) et la Proposition 3.16 que

$$(3.58) \quad \begin{aligned} \int_{[\alpha,\beta]} u_n(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau &= \int_{\alpha}^{\beta} u_n(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau = \int_a^b u_n(\xi) d\xi = \int_{[a,b]} u_n(\xi) d\xi \\ \int_{[\alpha,\beta]} v_n(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau &= \int_{\alpha}^{\beta} v_n(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau = \int_a^b v_n(\xi) d\xi = \int_{[a,b]} v_n(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Comme

$$\forall t \in [\alpha, \beta], u_n(\varphi(t)) \varphi'(t) \leq f(\varphi(t)) \varphi'(t) \leq v_n(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

et que (d'après les formules (3.58))

$$\int_{[\alpha,\beta]} (u_n - v_n)(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau = \int_{[a,b]} (v_n - u_n)(\xi) d\xi \leq \frac{1}{n},$$

nous sommes en situation d'appliquer le critère « assoupli » de la Proposition 3.12 pour conclure que la fonction

$$(3.59) \quad t \in [\alpha, \beta] \mapsto f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

est Riemann-intégrable sur $[\alpha, \beta]$. On a ainsi prouvé que, si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, la fonction (3.59) est Riemann-intégrable sur $[\alpha, \beta]$. La dernière assertion de la Proposition 3.12 (formules approchées (3.35)) assure aussi d'ailleurs dans ce

16. Ceci équivaut (d'après la Proposition 2.12, combinée avec la Proposition 2.3) à dire que φ réalise une bijection de classe C^1 entre les segments $[\alpha, \beta]$ et $[a, b]$, telle que l'application réciproque $\varphi^{-1} : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ soit encore de classe C^1 . Une telle application $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ est dite réaliser un *difféomorphisme de classe C^1* (ou encore *C^1 difféomorphisme*) entre les deux segments $[\alpha, \beta]$ et $[a, b]$.

cas la validité de la formule (3.57). Comme φ réalise un difféomorphisme de classe C^1 entre $[\alpha, \beta]$ et $[a, b]$ et que $(\varphi^{-1})'(\xi) = 1/\varphi'(\varphi^{-1}(\xi))$ pour tout $\xi \in [a, b]$ (cf. la Proposition 2.12), on observe que si la fonction (3.59) est Riemann-intégrable sur $[\alpha, \beta]$, la fonction f est bien Riemann-intégrable sur $[a, b]$ (et la formule (3.57) valide). La Proposition 3.17 est ainsi complètement démontrée. \square

REMARQUE 3.13 (Attention à ne pas confondre les formules (3.56) et (3.57) !). Les formules (3.56) et (3.57) sont de nature très différente : la première est une formule concernant le calcul de primitives, tandis que la seconde concerne le calcul d'intégrales au sens de Riemann. S'il est possible dans la Proposition 3.17 de s'affranchir de l'hypothèse « $\varphi' \neq 0$ sur $[\alpha, \beta]$ », il est en revanche impossible de s'affranchir de l'hypothèse « φ bijective entre $[\alpha, \beta]$ et $[a, b]$ » : par exemple, si $\varphi : x \in [-1, 1] \rightarrow x^2 \in [0, 1]$ et $f : x \in [0, 1] \mapsto 1$, on a

$$\int_{[0,1]} d\xi = 1 \neq \int_{[-1,1]} |\varphi'(\tau)| d\tau = \int_{[-1,1]} 2|\tau| d\tau = 2.$$

3.9.2. Les formules de la moyenne. Les deux formules de la moyenne (3.61) et (3.62) ou (3.63) (sous des hypothèses adéquates à préciser, cf. les énoncés complets des Propositions 3.18 et 3.19), que l'on attribue à l'analyste et géomètre français Pierre Bonnet (1819-1892), fournissent des informations importantes permettant non d'évaluer (ce qui n'est bien souvent possible que numériquement) mais simplement d'encadrer (ce qui s'avère souvent bien utile si on ne sait pas la calculer) l'intégrale (au sens de Riemann) du produit de deux fonctions réelles (dont l'une au moins est positive ou nulle). C'est avec ces deux formules de la moyenne que se conclura ce tour d'horizon de la théorie de l'intégration des fonctions numériques au sens de Riemann. On renvoie aux TD et aux cours d'Analyse ultérieurs (L2 et L3) pour des applications de ces deux formules.

PROPOSITION 3.18 (première formule de la moyenne). *Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$, telles que :*

- *il existe deux constantes réelles $m \leq M$ telles que*

$$\forall t \in [a, b], \quad m \leq f(t) \leq M ;$$

- *on a $g(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, b]$.*

La fonction $fg : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et l'on a l'encadrement :

$$(3.60) \quad m \int_{[a,b]} g(t) dt \leq \int_{[a,b]} f(t) g(t) dt \leq M \int_{[a,b]} g(t) dt.$$

Si de plus la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, on dispose de la formule plus précise :

$$(3.61) \quad \exists c \in [a, b] \quad \int_{[a,b]} f(t) g(t) dt = f(c) \int_{[a,b]} g(t) dt.$$

DÉMONSTRATION. Le fait que la fonction fg soit Riemann-intégrable sur $[a, b]$ lorsque f et g le sont résulte de la Proposition 3.9. Le fait que la prise d'intégrale au sens de Riemann des fonctions réelles (sur un segment de \mathbb{R}) soit une opération monotone (se pliant donc à l'inégalité (3.26)) implique, puisque $mg \leq fg \leq Mg$ sur $[a, b]$, que l'on a l'inégalité (3.60). Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, il résulte du Théorème 2.2 que, pour tout $\xi \in [\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f]$, il existe $c \in [a, b]$ tel

que $f(c) = \xi$. Distinguons alors deux cas (lorsque f est de plus supposée continue sur $[a, b]$) :

– si $\int_{[a,b]} g(t) dt > 0$, il résulte de l'encadrement (3.60) que

$$\frac{\int_{[a,b]} f(t) g(t) dt}{\int_{[a,b]} g(t) dt} \in \left[\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f \right];$$

d'après ce qui précède, on peut donc affirmer, si f est continue sur $[a, b]$, l'existence de $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{\int_{[a,b]} f(t) g(t) dt}{\int_{[a,b]} g(t) dt} = f(c),$$

d'où (3.61) ;

– si $\int_{[a,b]} g(t) dt = 0$, il résulte de l'encadrement (3.60) que l'on a également $\int_{[a,b]} f(t) g(t) dt = 0$; alors l'assertion (3.61) est vraie (on peut en effet prendre dans ce cas pour c n'importe quel point de $[a, b]$).

La seconde assertion de la Proposition 3.18 (dans le cas particulier où $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue) est donc bien valide. \square

REMARQUE 3.14. Lorsque $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable positive (d'intégrale strictement positive) et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on peut écrire la formule (3.61) sous la forme

$$f(c) = \int_{[a,b]} f(t) \frac{g(t)}{\int_{[a,b]} g(\tau) d\tau} dt$$

et interpréter alors le nombre $f(c)$ comme une valeur moyenne de la fonction f sur le segment $[a, b]$, le calcul de moyenne étant pondéré par les valeurs de la « densité » g sur $[a, b]$. Cette remarque justifie la terminologie « première formule de la moyenne » utilisée ici.

PROPOSITION 3.19 (seconde formule de la moyenne). *Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$. La fonction fg est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et, si la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone, alors :*

$$(3.62) \quad \exists c \in [a, b] \quad t.q. \quad \int_{[a,b]} f(t)g(t) dt = f(a) \int_{[a,c]} g(t) dt + f(b) \int_{[c,b]} g(t) dt.$$

De plus, si f est positive décroissante sur $[a, b]$, on a :

$$(3.63) \quad \exists c \in [a, b] \quad t.q. \quad \int_{[a,b]} f(t)g(t) dt = f(a) \int_{[a,c]} g(t) dt.$$

DÉMONSTRATION. Le fait que fg soit Riemann-intégrable sur $[a, b]$ résulte encore de la Proposition 3.9. On peut se contenter de prouver la formule (3.62) si f est décroissante (sinon, on remplace f par $-f$), ce que l'on supposera. Quitte à remplacer f par $x \in [a, b] \mapsto f(x) - f(b)$, on peut aussi supposer $f \geq 0$ sur $[a, b]$: en effet, les formules (3.62) (ou (3.63), ce qui revient au même dans ce cas particulier) pour la fonction $f - f(b)$ (nulle en b) s'écrivent :

$$\exists c \in [a, b] \quad t.q. \quad \int_{[a,b]} (f(t) - f(b))g(t) dt = (f(a) - f(b)) \int_{[a,c]} g(t) dt,$$

ce qui se lit encore sous la forme (3.62) si l'on invoque la relation de Chasles (3.32) (cf. la Proposition 3.11). On supposera donc f et g Riemann-intégrables sur $[a, b]$, et $f \geq 0$ décroissante sur $[a, b]$, et l'on se contentera de prouver l'assertion (3.63).

Introduisons pour cela les deux fonctions auxiliaires :

$$G : x \in [a, b] \mapsto \int_{[a,x]} g(t) dt \quad \text{et} \quad K : x \in [a, b] \mapsto \int_{[a,x]} |g(t)| dt.$$

Comme g est une fonction bornée (car Riemann-intégrable) et que l'on a

$$\max(|G(x+h) - G(x)|, |K(x+h) - K(x)|) \leq \left| \int_x^{x+h} |g(t)| dt \right| \leq |h| \sup_{[a,b]} |g|$$

du fait de l'inégalité (3.27), les fonctions G et K sont continues (donc uniformément continues d'après le théorème de Heine, Théorème 2.3) sur $[a, b]$. D'après le Théorème 2.2, la fonction continue $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes $m_G := \inf_{[a,b]} G$ et $M_G := \sup_{[a,b]} G$ sur ce segment $[a, b]$.

Soit $(\sigma_n)_{n \geq 0}$ une suite de subdivisions de $[a, b]$ dont le pas tend vers 0 et $x_{n,j}$, $j = 0, \dots, N_n$ les $N_n + 1$ nœuds de la subdivision σ_n . Notons

$$\begin{aligned} I_n &:= \sum_{j=0}^{N_n-1} \int_{x_{n,j}}^{x_{n,j+1}} f(x_{n,j}) g(t) dt = \sum_{j=0}^{N_n-1} f(x_{n,j}) (G(x_{n,j+1}) - G(x_{n,j})) \\ &= \sum_{j=0}^{N_n-1} (f(x_{n,j}) - f(x_{n,j+1})) G(x_{n,j+1}) + f(b) G(b) \end{aligned}$$

(pour passer ici de la seconde égalité à la troisième, on utilise à la fois le fait que $G(x_{n,0}) = G(a) = 0$ et une réécriture de la somme que l'on pourrait qualifier de « formule d'intégration par parties discrète », ou encore de *procédé sommatoire d'Abel*). Comme $m_G \leq G \leq M_G$ sur $[a, b]$ et que f est décroissante (donc que tous les nombres $f(x_{n,j}) - f(x_{n,j+1})$, $j = 0, \dots, N_n - 1$, sont positifs ou nuls), on a l'encadrement :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad m_G f(a) &= m_G \left(\sum_{j=0}^{N_n-1} (f(x_{n,j}) - f(x_{n,j+1})) + f(b) \right) \leq I_n \\ (3.64) \quad &\leq M_G \left(\sum_{j=0}^{N_n-1} (f(x_{n,j}) - f(x_{n,j+1})) + f(b) \right) = M_G f(a). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \left| I_n - \int_{[a,b]} f(t)g(t) dt \right| &= \left| \sum_{j=0}^{N_n-1} \int_{x_{n,j}}^{x_{n,j+1}} (f(x_{n,j}) - f(t)) g(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{N_n-1} \int_{x_{n,j}}^{x_{n,j+1}} (f(x_{n,j}) - f(t)) |g(t)| dt \\ &\leq (f(b) - f(a)) \sup_{0 \leq j \leq N_n-1} \int_{x_{n,j}}^{x_{n,j+1}} |g(t)| dt \\ &\leq (f(b) - f(a)) \sup_{0 \leq j \leq N_n-1} (K(x_{n,j+1}) - K(x_{n,j})). \end{aligned}$$

Du fait que la fonction K est uniformément continue sur $[a, b]$ et que le pas de la subdivision σ_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{0 \leq j \leq N_n - 1} (K(x_{n,j+1}) - K(x_{n,j})) \right) = 0,$$

d'où l'on déduit, compte-tenu des inégalités précédentes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_{[a,b]} f(t) g(t) dt.$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'encadrement (3.64), il vient donc l'encadrement « limite » :

$$m_G f(a) \leq \int_{[a,b]} f(t) g(t) dt \leq M_G f(a).$$

Si $f(a) \neq 0$, on déduit du Théorème 2.2 qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{\int_{[a,b]} f(t) g(t) dt}{f(a)} = G(c) = \int_{[a,c]} g(t) dt.$$

On a donc dans ce cas :

$$(3.65) \quad \exists c \in [a, b] \quad \text{t.q.} \quad \int_{[a,b]} f(t) g(t) dt = f(a) \int_{[a,c]} g(t) dt,$$

ce qui est bien la formule (3.63) souhaitée. Si $f(a) = 0$, la fonction positive décroissante f est identiquement nulle sur $[a, b]$ et on a

$$\int_{[a,b]} f(t) g(t) dt = f(a) = 0$$

dans ce cas, auquel cas l'assertion (3.63) est toujours valable car l'on peut prendre alors c arbitraire dans $[a, b]$. L'assertion (3.63) (lorsque f est positive décroissante) est donc bien prouvée dans tous les cas de figure. La seconde formule de la moyenne est ainsi démontrée. \square

3.10. Annexe : une preuve du critère d'intégrabilité (Théorème 3.1)

Afin d'unifier le contenu des cours dispensés dans les deux séries, nous présentons dans cette section une preuve du Théorème 3.1.

Rappelons ici l'énoncé de ce résultat majeur (qu'il suffit, comme on l'a déjà vu, de savoir démontrer lorsque f est une fonction réelle) :

« Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si f est bornée et le sous-ensemble

$$A := \{x \in [a, b]; f \text{ discontinue en } x\}$$

est négligeable ».

Nous aurons besoin pour cela d'introduire la notion d'oscillation d'une fonction en un point, complétant ainsi celle d'oscillation d'une fonction réelle bornée sur un intervalle ouvert introduite dans l'énoncé de la Proposition 3.2. On doit cette notion au mathématicien (analyste) allemand Paul-Gustav du Bois-Reymond (1831-1889).

DÉFINITION 3.9 (oscillation d'une fonction (bornée) en un point). Soit I un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point et $x_0 \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle bornée. On définit l'*oscillation de f au point x_0* par

$$(3.66) \quad \text{osc}(f, x_0) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{I \cap [x_0 - 1/n, x_0 + 1/n]} f - \inf_{I \cap [x_0 - 1/n, x_0 + 1/n]} f \right)$$

(la suite concernée au membre de droite étant une suite positive décroissante, donc convergente vers une limite positive ou nulle).

REMARQUE 3.15 (oscillation ponctuelle et points de discontinuité d'une fonction réelle bornée sur un intervalle de \mathbb{R}). Il résulte de la Définition 3.9 que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction f réelle bornée de I dans \mathbb{R} s'exprime aussi :

$$(3.67) \quad \text{discont}[f; I] = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \left\{ x \in I; \text{osc}(f, x) \geq \frac{1}{p} \right\}.$$

THÉORÈME 3.1, PREUVE DE L'IMPLICATION RÉCIPROQUE. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Notre objectif est ici de montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f sur $[a, b]$ est négligeable au sens de la Définition 3.6. Pour cela, nous allons prouver que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble

$$(3.68) \quad A_p := \left\{ x \in I; \text{osc}(f, x) \geq \frac{1}{p} \right\}$$

est négligeable. Il en résultera que l'union de tous les ensembles A_p , $p \in \mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire, d'après (3.67), l'ensemble des points de discontinuité de f) sera également négligeable : en effet, supposons qu'il existe, pour chaque tel $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout ϵ strictement positif, une suite de segments $([a_{\epsilon/2^p, k}, b_{\epsilon/2^p, k}])_{k \in \mathbb{N}^*}$, dont l'union contient A_p et dont la somme des longueurs est au plus égale à $\epsilon/2^p$ (ce qui signifie que A_p est négligeable); l'union de tous les segments $[a_{\epsilon/2^p, k}, b_{\epsilon/2^p, k}]$ (pour k et p parcourant \mathbb{N}^*) contient donc l'union de tous les ensembles A_p pour $p \in \mathbb{N}^*$, tandis que la somme des longueurs de tous ces segments est au plus égale à la somme $\epsilon(1/2 + 1/4 + \dots) = \epsilon$.

Soit donc $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit σ_n la subdivision de $[a, b]$ de pas régulier égal à $(b-a)/n$. Désignons par M_n le nombre de segments $[x_{n,j}, x_{n,j+1}]$ entre deux nœuds consécutifs de cette subdivision σ_n , tels que $[x_{n,j}, x_{n,j+1}] \cap A_p \neq \emptyset$. Pour chaque tel segment $I_{n,j}$, il existe un point $\xi_{n,j} \in I_{n,j} \cap A_p$ et l'on a donc :

$$\sup_{I_{n,j}} f - \inf_{I_{n,j}} f \geq \text{osc}(f, \xi_{n,j}) \geq \frac{1}{p}.$$

On a donc, en introduisant les sommes de Darboux :

$$(3.69) \quad S[f; \sigma_n] - s[f; \sigma_n] \geq \sum_j (x_{n,j+1} - x_{n,j}) \frac{1}{p} = M_n \frac{b-a}{n} \frac{1}{p}.$$

Soit $\epsilon > 0$ arbitraire. Pour $n \geq n(p, \epsilon)$ assez grand, on sait, d'après le Théorème de Darboux (Théorème 3.2, voir (3.43)), que

$$S[f; \sigma_n] - s[f; \sigma_n] \leq \frac{\epsilon}{p}.$$

Pour $n \geq n(\epsilon, p)$, on a donc, compte tenu de (3.69) :

$$\frac{\epsilon}{p} \geq S[f; \sigma_n] - s[f; \sigma_n] \geq M_n \frac{b-a}{n} \frac{1}{p},$$

d'où :

$$M_n \frac{b-a}{n} \leq \epsilon.$$

L'union de tous les segments $[x_{n,j}, x_{n,j+1}]$ qui rencontrent A_p est donc de longueur au plus égale à ϵ dès que $n \geq n(\epsilon, p)$. Il en résulte bien, puisque ϵ est arbitraire, que A_p est négligeable. Il en est de même de l'ensemble $\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} A_p$. L'ensemble des points de discontinuité de f est donc négligeable lorsque la fonction réelle f est supposée Riemann-intégrable sur le segment $[a, b]$. \square

THÉORÈME 3.1, PREUVE DE L'IMPLICATION DIRECTE. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle bornée sur $[a, b]$ ($m \leq f \leq M$), telle que l'ensemble des points de discontinuité de f soit négligeable. Nous nous proposons de prouver ici qu'alors f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Puisque l'ensemble des points de discontinuité de f est union des ensembles A_p , $p \in \mathbb{N}^*$, définis en (3.68), chaque tel ensemble A_p , $p \in \mathbb{N}^*$, est par conséquent négligeable. Pour chaque $\epsilon > 0$, il est donc possible de construire une suite de segments $(I_{p,\epsilon,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$, que l'on peut même supposer disjoints, dont l'union contient A_p , et dont la somme des longueurs ne dépasse pas $\epsilon/(2(M-m))$ (cf. la Définition 3.6). Mieux : en examinant la suite $(\bigcup_{k=1}^K I_{p,\epsilon,k})_{K \in \mathbb{N}^*}$, suite croissante de sous-ensembles fermés de $[a, b]$ dont la suite des bornes inférieures converge en décroissant vers une limite $\alpha \geq a$ et la suite des bornes supérieures converge en croissant vers une limite $\beta \leq b$, on observe même qu'il est possible de construire, lorsque $\epsilon < 2(M-m)(b-a)$, une union finie de $M_{p,\epsilon} \geq 2$ segments $[a_{p,\epsilon,k}, b_{p,\epsilon,k}]$, consécutifs et disjoints, le premier d'origine a , le dernier d'extrémité b , tels que :

- d'une part l'ensemble A_p soit inclus dans l'union des segments $[a_{p,\epsilon,k}, b_{p,\epsilon,k}]$, $k = 0, \dots, M_{p,\epsilon} - 1$;
- d'autre part, on ait :

$$\sum_{k=0}^{M_{p,\epsilon}-1} (b_{p,\epsilon,k} - a_{p,\epsilon,k}) \leq \frac{\epsilon}{2(M-m)}.$$

Tous les segments $[b_{p,\epsilon,k}, a_{p,\epsilon,k+1}]$, pour k variant de $k = 0$ à $k = M_{p,\epsilon} - 2$, sont donc inclus dans le complémentaire de A_p . En tout point x d'un tel segment, on a par conséquent $\text{osc}(f, x) \leq 1/p$, ce qui implique (du fait de la définition (3.66) de l'oscillation locale en un point x) qu'il existe un segment $[x - \eta_x, x + \eta_x]$ (avec $\eta_x > 0$) contenant ce point x et tel que :

$$\sup_{[x-\eta_x, x+\eta_x]} f - \inf_{[x-\eta_x, x+\eta_x]} f \leq \frac{2}{p}.$$

On en déduit qu'il existe, pour chaque $k = 0, \dots, M_{p,\epsilon} - 2$, une subdivision du segment $[b_{p,\epsilon,k}, a_{p,\epsilon,k+1}]$, telle que sur chaque segment entre deux nœuds consécutifs de cette subdivision, l'oscillation de f sur ce segment soit majorée par $2/p$. On note maintenant $\sigma_{p,\epsilon}$ la subdivision de $[a, b]$ dont les nœuds sont les points $a_{p,\epsilon,k}$ et $b_{p,\epsilon,k}$, pour k variant de 0 à $M_{p,\epsilon} - 1$. La contribution à la différence des sommes de Darboux $S[f; \sigma_{p,\epsilon}] - s[f; \sigma_{p,\epsilon}]$ des segments $[a_{p,\epsilon,k}, b_{p,\epsilon,k}]$, $k = 0, \dots, M_{p,\epsilon} - 1$, est majorée par

$$(M-m) \sum_{k=0}^{M_{p,\epsilon}-1} (b_{p,\epsilon,k} - a_{p,\epsilon,k}) \leq (M-m) \times \frac{\epsilon}{2(M-m)} = \frac{\epsilon}{2}.$$

La contribution à la même différence des sommes de Darboux $S[f; \sigma_{p,\epsilon}] - s[f; \sigma_{p,\epsilon}]$ des segments cette fois $[b_{p,\epsilon,k}, a_{p,\epsilon,k+1}]$, $k = 0, \dots, M_{p,\epsilon} - 2$, est, elle, majorée par

$$\frac{2}{p} \sum_{k=0}^{M_{p,\epsilon}-2} (a_{p,\epsilon,k+1} - b_{p,\epsilon,k}) \leq \frac{2}{p} \times (b - a).$$

Si l'on choisit p suffisamment grand (tel que $2(b - a)/p \leq \epsilon/2$), on voit donc que

$$S[f; \sigma_{p,\epsilon}] - s[f; \sigma_{p,\epsilon}] \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Puisque tout ceci est possible avec un choix de $\epsilon > 0$ arbitraire, il résulte de l'implication (2) \implies (1) dans le théorème de Darboux (Théorème 3.2) que f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, ce que l'on voulait ici démontrer. \square

Ceci achève la preuve complète du Théorème 3.1, admis jusque là, et clôt ce chapitre dédié à une présentation de l'intégration au sens de Riemann.

Il s'avèrera utile ultérieurement, à ceux qui envisagent de continuer dans un cursus « Mathématiques », de confronter cette approche avec celle développée par Henri Lebesgue et Emile Borel au début du XX-ième siècle, fondée, elle, non plus sur le maillage de l'ensemble de départ $[a, b]$, mais cette fois sur un maillage de l'ensemble d'arrivée \mathbb{R} (penser par exemple aux cartes en relief et aux lignes de niveau). Cette approche « moderne » à la théorie de l'intégration sera présentée en L3. L'approche de Riemann reste cependant la plus « en phase » avec le calcul scientifique. Les théorèmes de Darboux et de Riemann (Théorèmes 3.2 et 3.3) demeurent en effet les seuls outils efficaces pour effectuer des calculs approchés d'intégrales dans la plupart des situations concrètes.

FIN DU COURS

Une liste d'exercices de TD (2011-2012, 2012-2013)

I. Exercices en relation avec le chapitre 1 des notes de cours¹

EXERCICE A.1 (suites arithmétiques, suites géométriques).

- (1) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite arithmétique de raison 2, telle que $u_5 = 7$. Calculer u_{100} .
- (2) Quelle est la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ?
- (3) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite géométrique de raison q strictement positive, telle que $u_3 = 2$ et $u_7 = 18$. Calculer u_{20} .
- (4) Quelle est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique ?

EXERCICE A.2 (suites réelles, extrait du DM 1, 2011-2012). Montrer à l'aide de la définition que la suite de terme général $u_n = 3n/(4n + 2)$ (pour $n \geq 0$) converge et calculer sa limite. Les réponses doivent être justifiées.

EXERCICE A.3 (opérations sur les limites de suites réelles, extrait du DM 1, 2011-2012). La suite de terme général u_n (pour n suffisamment grand), dans chaque cas suivant, est-elle divergente ? convergente ? Calculer sa limite le cas échéant :

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{4n^5}{6n^7 - 5n^3 + n^2 - 4} ; & u_n &= \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{n^2 + 1} ; \\
 u_n &= \frac{1}{n(\sqrt{n^2 + 2} - n)} ; & u_n &= (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) ; \\
 u_n &= \frac{2n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 3} - n} ; & u_n &= n^{1/n} ; \quad u_n = \sin(n).
 \end{aligned}$$

Les réponses doivent être justifiées.

EXERCICE A.4 (opérations sur les limites de suites réelles, extrait du DM 1 2012-2013). Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites suivantes (données

1. On rappelle que les notations \log et \ln désignent la même fonction, à savoir le logarithme népérien ; la notation \ln (plutôt que \log) sera privilégiée dans cette liste, conformément à ce qui a été fait dans les notes de cours.

EXERCICE A.9 (suites réelles). On considère les suites de terme général respectivement

$$\frac{2 + \cos n}{n}, \quad (2 + \cos n)n, \quad (-1)^n (2 + \cos n)n, \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

pour $n \geq 1$.

- (1) Les suites ci-dessus sont-elles bornées ?
- (2) Sont-elles convergentes ?

EXERCICE A.10 (suites réelles). Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n} + e^{-n}$.

- (1) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.
- (2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

EXERCICE A.11 (suites réelles). Pour tout entier positif n , on pose $u_n = \frac{3n+1}{2n+5}$. Montrer, en revenant à la définition, que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $3/2$.

EXERCICE A.12 (suites réelles). On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge.

EXERCICE A.13 (suites réelles). Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in]1, +\infty[\\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(u_n^2 + 7u_n)} - 1 \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

On distinguera les cas $u_0 < 2$, $u_0 = 2$ et $u_0 > 2$.

EXERCICE A.14 (suites réelles). On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\pi + \frac{1}{n}$.

- (1) La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est-elle bornée ?
- (2) La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ?
- (3) Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = \sin(u_n)$ converge vers 0.

EXERCICE A.15 (suites réelles). Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite de nombres réels définie par la condition initiale $u_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2}.$$

- (1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < 2$.
- (2) Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
- (3) En déduire que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

EXERCICE A.16 (lemme des gendarmes). Soit $(H_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

- (1) En utilisant une intégrale, montrer, pour tout $n \geq 1$, l'inégalité double

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

- (2) En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
- (3) Déterminer la limite de H_n .
- (4) Montrer que la suite de terme général $u_n := H_n - \ln(n)$ converge (indication : on montrera que $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante).

EXERCICE A.17 (suites réelles adjacentes).

- (1) Démontrer qu'une suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ converge si et seulement si $(u_{2n})_{n \geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ convergent vers une même limite.
- (2) Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge (indication : on pourra montrer que les suites $(u_{2n})_{n \geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ sont adjacentes).

EXERCICE A.18 (suites réelles adjacentes). Soient $0 < a < b$, soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ les deux suites définies par

$$u_0 = a, \quad v_0 = b, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que ces suites sont adjacentes.

EXERCICE A.19 (suites réelles adjacentes). On considère les deux suites de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!n} \quad (n \geq 1).$$

- (1) Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite, notée e .
- (2) Montrer que e est irrationnel.

EXERCICE A.20 (suites complexes, définition de la limite d'une suite).

- (1) Montrer que si la suite de nombres complexes $(u_n)_{n \geq 0}$ converge alors la limite est unique.
- (2) Montrer qu'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres complexes est convergente si et seulement si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n \geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ sont convergentes vers la même limite (voir aussi l'exercice A.17, question 1).
- (3) Étudier la convergence des suites $(u_n)_n$ de terme général

$$u_n = (-1)^n, \quad u_n = i^n \quad (n \geq 0), \quad u_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad (n \geq 1).$$

- (4) Montrer que $(1/\sqrt{n})_{n \geq 1}$ converge vers 0 en utilisant la définition de la limite.

EXERCICE A.21 (suites complexes). Étudier la convergence des suites de terme général z_n ci-dessous.

$$z_n = 4 + ni, \quad z_n = \frac{n}{n+3i} - \frac{ni}{n+1}, \quad z_n = \frac{n^2 i^n}{n^3 + 1}, \quad z_n = (-1)^n e^{in\pi}$$

$$z_n = e^{ni\frac{\pi}{4}}, \quad z_n = \frac{(1+i)^n}{2^n} \quad (n \geq 0) \quad z_n = e^{(-1)^n \frac{i\pi}{n}} \quad (n \geq 1).$$

EXERCICE A.22 (suites complexes, moyenne de Cesàro). Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$c_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}.$$

On dit que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge au sens de Cesàro si la suite $(c_n)_{n \geq 1}$ converge.

- (1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1} = ((-1)^n)_{n \geq 1}$ converge au sens de Cesàro vers une limite que l'on déterminera.
- (2) Montrer que si $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers l alors $(c_n)_{n \geq 1}$ est également convergente de limite l .

EXERCICE A.23 (suites de Cauchy).

- (1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de terme général $u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ n'est pas une suite de Cauchy.
- (2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de terme général $u_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ est de Cauchy.
- (3) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de terme général $u_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k}$ n'est pas une suite de Cauchy. Que peut-on dire de cette suite $(u_n)_{n \geq 1}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$?
- (4) Montrer qu'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant $|u_{n+1} - u_n| \leq 2^{-n}$ pour tout $n \geq 0$ est de Cauchy.

EXERCICE A.24 (suites de Cauchy). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2 + \frac{1}{k})^k}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy. En déduire qu'elle converge.

EXERCICE A.25 (suites de Cauchy). Soit f une application de $[0, 1]$ dans lui-même telle qu'il existe un nombre réel positif $0 < k < 1$ tel que

$$\forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Soit $a \in [0, 1]$. On considère la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_0 = a$, et $x_n = f(x_{n-1})$ pour tout $n \geq 1$.

- (1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$ et conclure que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy.
- (2) Montrer que $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ est l'unique point fixe de la fonction f .

EXERCICE A.26 (suites de Cauchy). Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes telle que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, |u_{p+q} - u_p - u_q| \leq 1.$$

- (1) Montrer que

$$\forall q \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^*, |u_{kq} - ku_q| \leq k - 1.$$

- (2) Montrer que, pour tout entier $r \geq 0$, on a $|u_{kq+r} - u_{kq}| \leq |u_r| + 1$.
- (3) En déduire que si k et r désignent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par l'entier $q > 0$, on a

$$\left| u_n - \frac{n}{q} u_q \right| \leq \frac{r}{q} |u_q| + |u_r| + k.$$

(4) En déduire que la suite $(u_n/n)_{n \geq 1}$ est convergente.

EXERCICE A.27 (borne supérieure, borne inférieure). Calculer $\sup \{u_p, p \geq n\}$, $\inf \{u_p, p \geq n\}$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$ pour les suites $(u_n)_n$ suivantes :

(1) $u_n = (-1)^n$ (pour $n \geq 0$);

(2) $u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ (pour $n \geq 1$);

(3) $u_n = \left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ (pour $n \geq 1$);

(4) $u_n = n^{(-1)^n}$ (pour $n \geq 1$).

EXERCICE A.28 (borne supérieure, borne inférieure). Soit p un nombre réel strictement positif. On pose :

$$A = \left\{ \frac{1}{1+|x|} \right\}; |x| < p, \quad B = \left\{ \frac{1}{1+|x|} \right\}; |x| > p.$$

(1) Déterminer $\max A$ et $\sup A$.

(2) Déterminer $\sup B$. L'ensemble B admet-il un maximum ?

II. Exercices en relation avec le chapitre 2 des notes de cours

EXERCICE A.29 (limites d'une fonction réelle). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Calculer les limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x).$$

EXERCICE A.30 (limites d'une fonction réelle). En revenant à la définition, démontrer :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 2.$$

EXERCICE A.31 (continuité des fonctions réelles). Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et $x_0 \in I$. Montrer que f est continue au point x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de I qui converge vers x_0 , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

EXERCICE A.32 (continuité des fonctions réelles). Étudier la continuité au point x_0 de \mathbb{R} de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(on discutera suivant la valeur de x_0).

EXERCICE A.33 (continuité des fonctions réelles).

(1) Montrer que la fonction indicatrice $\chi_{\mathbb{Q}}$ définie sur \mathbb{R} par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est discontinue en tout point de \mathbb{R} .

- (2) Déterminer la nature des points de discontinuité de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x \chi_{\mathbb{Q}}(x)$.

EXERCICE A.34 (continuité des fonctions réelles). Montrer que deux fonctions réelles continues sur \mathbb{R} qui coïncident sur \mathbb{Q} coïncident en fait sur \mathbb{R} tout entier.

EXERCICE A.35 (continuité des fonctions réelles). Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et à valeurs réelles telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

- (1) Calculer $f(0)$.
- (2) Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et pour $r \in \mathbb{Q}$, calculer $f(p)$, $f(1/p)$, $f(r)$ en fonction de $f(1)$.
- (3) On suppose de plus que f est continue sur \mathbb{R} . Montrer qu'il existe alors $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax.$$

- (4) En utilisant ce qui précède, déterminer toutes les fonctions $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continues sur $]0, +\infty[$ et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(xy) = f(x) + f(y)$$

(on pourra considérer pour ce faire la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f(e^x)$).

- (5) Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R} telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, g(xy) = xg(y) + yg(x).$$

- (a) Calculer $g(1)$, puis $g(-1)$, et en déduire que g est impaire (c'est-à-dire que $g(x) = -g(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).
- (b) Pour $x > 0$, on pose $h(x) = g(x)/x$.
- Exprimer $h(xy)$ en fonction de $h(x)$ et de $h(y)$;
 - en déduire l'expression de la fonction g .

EXERCICE A.36 (continuité des fonctions réelles). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R} et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x).$$

Montrer que f est constante sur \mathbb{R} .

EXERCICE A.37 (continuité des fonctions réelles). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \inf \{ |x - t|; t \in]0, 1] \}.$$

- (1) Montrer que f est bien définie en tout point de \mathbb{R} .
- (2) Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

- (3) En déduire que f est continue sur \mathbb{R} .
- (4) Déterminer l'expression de f sur chacun des intervalles : $] - \infty, 0]$, $]0, 1]$, $]1, +\infty[$.

EXERCICE A.38 (continuité des fonctions réelles). Soit f à valeurs réelles définie sur le segment $[a, b]$ (non réduit à un singleton) et $J = [c, d]$ avec $a < c < d < b$. Les deux assertions suivantes sont elles équivalentes ?

- (i) : la restriction $f|_J$ de f au segment J est continue (en tant que fonction de J dans \mathbb{R});
 - (ii) : la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur le segment J
- (si ce n'est pas le cas, donner un contre-exemple).

EXERCICE A.39 (continuité des fonctions réelles). On considère la fonction $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \geq 0, f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}.$$

- (1) Montrer que $f(]0, 1[) \subset]0, 1[$ et que $f(]1, +\infty[) \subset]1, +\infty[$.
- (2) Montrer que l'on peut bien définir une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de $]0, 1[$ par la condition initiale $x_0 \in]0, 1[$ et la relation de récurrence

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \geq 0.$$

- (3) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ ainsi définie est une suite croissante. En déduire qu'elle est convergente et trouver sa limite.

EXERCICE A.40 (continuité des fonctions réelles, extrait du DM 2, 2012-2013).

- (1) Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I , et soit $x_0 \in I$. On suppose que f est continue en x_0 et que $f(x_0)$ est strictement positif. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que

$$\forall x \in I \cap J, \quad f(x) > 0.$$

- (2) En déduire que si g et h sont deux fonctions réelles sur I , continues en x_0 , telles que $g(x_0) \neq h(x_0)$, alors il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$\forall x \in V, \quad g(x) \neq h(x).$$

EXERCICE A.41 (continuité des fonctions réelles, uniforme continuité, extrait du DM 1, 2011-2012).

- (1) Soit $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. En utilisant la définition, démontrer la continuité de la fonction f sur le segment $[0, a]$, $a > 0$. *Indication* : étudier la continuité de f au voisinage de chaque point x_0 de I_a (considérer les deux cas $x_0 = 0$ et $x_0 > 0$).
- (2) La fonction f est-elle uniformément continue sur le segment I_a ? Énoncer le résultat du cours correspondant.
- (3) La fonction f est-elle uniformément continue sur \mathbb{R}_+ ?
- (4) Donner un exemple d'une fonction g , continue sur \mathbb{R}_+ , uniformément continue sur tout segment I_a , $a > 0$, mais qui ne soit pas uniformément continue sur \mathbb{R}_+ tout entier.

Les réponses doivent être justifiées.

EXERCICE A.42 (théorème des valeurs intermédiaires (TVI)). Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et à valeurs réelles. Montrer que si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe au moins un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair; le polynôme P admet-il au moins une racine réelle?

EXERCICE A.43 (théorème des valeurs intermédiaires (TVI)). Soient p et q deux réels strictement positifs et f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} . En considérant la fonction réelle g définie sur $[a, b]$ par

$$\forall x \in [a, b], g(x) = pf(a) + qf(b) - (p+q)f(x),$$

montrer qu'il existe au moins un point $c \in [a, b]$ tel que

$$pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c).$$

EXERCICE A.44 (théorème des valeurs intermédiaires (TVI)). Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul fixé. Montrer qu'il existe au moins un point $x_p \in [0, 1]$ tel que

$$f\left(x_p + \frac{1}{p}\right) = f(x_p)$$

(on pourra considérer pour ce faire la fonction $g : x \in [0, 1] \mapsto f\left(x + \frac{1}{p}\right) - f(x)$).

EXERCICE A.45 (théorème des valeurs intermédiaires (TVI)). Soit $a > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R} telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \geq a|x - y|.$$

- (1) Montrer que f est injective.
- (2) Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, vérifier qu'il est impossible que $f(\mathbb{R})$ évite y_0 . En déduire que f réalise une application bijective continue et d'inverse continue de \mathbb{R} dans lui-même.

EXERCICE A.46 (théorème des valeurs intermédiaires, extréma de fonctions continues). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R} . Les quatre assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- (i) : l'image par f d'un intervalle ouvert de \mathbb{R} est encore un intervalle ouvert de \mathbb{R} ;
- (ii) : l'image par f d'un segment de \mathbb{R} est encore un segment de \mathbb{R} ;
- (iii) : l'image par f d'un sous-ensemble borné de \mathbb{R} est encore un sous-ensemble borné de \mathbb{R} ;
- (iv) : l'image réciroque par f d'un intervalle de \mathbb{R} est encore un intervalle de \mathbb{R} .

Si une assertion s'avère fautive, justifier le chaque fois par un contre-exemple.

EXERCICE A.47 (extréma de fonctions continues). Montrer qu'une fonction $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, continue sur $[0, +\infty[$ et tendant vers 0 lorsque x tend vers l'infini, est toujours bornée sur son intervalle de définition $[0, +\infty[$ et atteint toujours sa borne supérieure $\sup_{[0, \infty[} f$. Atteint-elle par contre toujours sa borne inférieure sur $[0, \infty[$? Si ce n'est pas le cas, exhiber un contre-exemple.

EXERCICE A.48 (extréma de fonctions continues). Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur \mathbb{R} et périodique (c'est-à-dire telle qu'il existe $T > 0$ avec $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), est bornée sur \mathbb{R} et atteint ses bornes.

EXERCICE A.49 (extréma de fonctions continues). Soit $f : [0, \infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue sur $]0, +\infty[$ telle que

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) < x.$$

- (1) Montrer que $f(0) = 0$.

- (2) Montrer que, quelque soient les réels a et b tels que $0 < a < b$, il existe $M_{a,b} \in [0, 1[$ tel que $f(x) \leq M_{a,b} x$ pour tout $x \in [a, b]$.

EXERCICE A.50 (extréma de fonctions continues réelles). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}.$$

- (1) Montrer que f est une fonction continue majorée et minorée.
 (2) Déterminer $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ et $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$. Ces bornes sont-elles atteintes ?

EXERCICE A.51 (extréma de fonctions continues réelles). Soient f et g deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$h(t) = \sup_{x \in [0,1]} (f(x) + t g(x)).$$

- (1) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) \in \mathbb{R}$ (auquel cas la fonction h est bien définie comme fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}) et qu'il existe toujours au moins un $x_t \in [0, 1]$ tel que

$$h(x_t) = f(x_t) + t g(x_t).$$

- (2) Soit $M = \sup_{x \in [0,1]} |g(x)|$. Ce sup est-il un max ?
 (3) Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}, f(x_t) + s g(x_t) \leq f(x_s) + s g(x_s)$$

et en déduire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}, |h(t) - h(s)| \leq M |t - s|,$$

c'est-à-dire que la fonction h est M -lipschitzienne sur \mathbb{R} .

EXERCICE A.52 (continuité, injectivité et monotonie). On considère la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- (1) Montrer que $g([0, 1]) \subset [0, 1]$.
 (2) Montrer que $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une application bijective.
 (3) Montrer que g n'est pas monotone sur $[0, 1]$ et que g n'est pas non plus continue sur $[0, 1]$ (se référer aussi à l'exercice A.33 ci-dessus).

EXERCICE A.53 (continuité, injectivité et monotonie).

- (1) Quel est le domaine de définition maximal de la fonction

$$x \mapsto (\ln(x + 1))^2 ?$$

- (2) La fonction f est-elle monotone sur ce domaine de définition maximal ?
 (3) Montrer que le domaine de définition maximal de f contient $[0, \infty[$ et déterminer $f([0, +\infty[)$. La restriction $f|_{[0, +\infty[}$ de f à $[0, +\infty[$ réalise-t-elle une bijection entre $[0, +\infty[$ et son image ? Si oui, déterminer l'application réciproque $f|_{[0, +\infty[}^{-1}$.

- (4) Montrer que le domaine de définition maximal de f contient aussi $] - 1, 0]$ et déterminer $f(] - 1, 0])$. La restriction $f_{|] - 1, 0]}$ de f à $[0, +\infty[$ réalise-t-elle une bijection entre $] - 1, 0]$ et son image ? Si oui, déterminer l'application réciproque $f_{|] - 1, 0]}^{-1}$.

EXERCICE A.54 (continuité, injectivité, fonction réciproque).

- (1) Existe-t-il une bijection continue entre $[0, 1[$ et \mathbb{R} ?
 (2) Soit la fonction $f : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \geq -1, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Déterminer l'image de f . Montre que f réalise une bijection entre $[-1, +\infty[$ et cette image $\text{Im } f$ et expliciter ensuite la fonction réciproque $f^{-1} : \text{Im } f \rightarrow [-1, +\infty[$.

- (3) Trouver le plus grand intervalle ouvert I de \mathbb{R} contenant 0 sur lequel la fonction

$$g_I : x \in I \mapsto \tan(x^3)$$

soit injective et réalise donc une bijection entre I et $g(I)$. Donner alors le domaine de définition de la fonction réciproque g_I^{-1} et l'image de cette fonction g_I^{-1} .

EXERCICE A.55 (monotonie, stricte monotonie). Montrer que

$$\forall t \in] - 1, +\infty[\setminus \{0\}, \frac{1}{1+t} < \ln(1+t) < t.$$

En déduire que les fonctions

$$x \in] - \infty, -1] \mapsto f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad x \in]0, +\infty[\mapsto g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

sont strictement monotones sur leurs domaines de définition respectifs.

EXERCICE A.56 (dérivabilité en un point d'une fonction réelle). Prolonger par continuité en 0, puis étudier la dérivabilité en ce même point, des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^2 \cos(1/x), \quad f_2 : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin(x) \sin(1/x).$$

EXERCICE A.57 (nombre dérivé, fonction dérivée). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
 (2) Montrer que f est dérivable en 0.
 (3) La fonction f' est-elle continue en 0 ?

EXERCICE A.58 (dérivabilité des fonctions réelles). Étudier la dérivabilité sur \mathbb{R} des fonctions suivantes :

- (1) $f(x) = |x|$,
 (2) $g(x) = x|x|$,
 (3) $h(x) = |x(x-2)|$.

EXERCICE A.59 (règles de calcul pour les fonctions dérivées). Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur les intervalles ouverts dans lesquels elles sont définies (après avoir précisé ces intervalles) :

- (1) $f(x) = \ln |\tan(x/2)|$;
- (2) $g(x) = \ln (\tan(1 + \sqrt{\sin(x^2)}))$;
- (3) $h(x) = \frac{1}{(x^2)^{1/3}} - \frac{1}{(x^3)^{1/2}}$;
- (4) $i(x) = x^x$.

EXERCICE A.60 (règles de calcul pour les fonctions dérivées). En dérivant n fois la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{3x}$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n.$$

EXERCICE A.61 (règles pour le calcul pour les fonctions dérivées). Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes (chacune à l'intérieur de son domaine de définition respectif) :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{1 + x^2(\sin(x))^2} & f_2(x) &= \frac{\exp(1/x) + 1}{\exp(1/x) - 1} \\ f_3(x) &= \ln \left(\frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)} \right) & f_4(x) &= (x(x-2))^{1/3}. \end{aligned}$$

EXERCICE A.62 (nombre dérivé, fonction dérivée, extrait du DM 2, 2012-2013). Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a + b = 1$. Le but de cet exercice est de démontrer que :

$$(A.1) \quad a \ln \left(\frac{1}{a} \right) + b \ln \left(\frac{1}{b} \right) \leq \ln(2).$$

Pour cela, on considère la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} f(x) &= -x \ln x - (1-x) \ln(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ f(0) &= f(1) = 0 \end{aligned}$$

- (1) Montrer que f est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$.
- (2) Montrer que

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = f(1-x)$$

Quelle propriété du graphe de f peut-on en déduire ?

- (3) Calculer la dérivée de f sur $]0, 1[$ et préciser son signe.
- (4) Exploiter les résultats précédents pour démontrer l'inégalité (A.1).

EXERCICE A.63 (nombre dérivé, fonction dérivée, extrait du DM 2, 2012-2013).

- (1) Montrer que pour tout couple (a, b) de réels vérifiant $a < b$ et toute fonction φ dérivable sur $[a, b]$ vérifiant $\varphi(b) > \varphi(a)$, il existe au moins un réel $\ell \in [a, b]$ vérifiant $\varphi(\ell) = \varphi(a)$ et $\varphi'(\ell) \geq 0$. *Indication : on pourra considérer un élément particulier de l'ensemble A des $x \in [a, b]$ tels que $\varphi(x) \leq \varphi(a)$.*

- (2) En déduire que si f est une fonction dérivable sur \mathbb{R} et non constante, alors sa dérivée prend des valeurs non nulles. *Indication : on pourra considérer $a < b$ tels que $f(a) \neq f(b)$, et la fonction φ définie sur $[a, b]$ par*

$$\varphi(x) := -x + \frac{2}{m}f(x)$$

$$\text{où } m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

- (3) Montrer que si f est une fonction dérivable sur \mathbb{R} de dérivée positive ou nulle, alors f est croissante. *Indication : on pourra utiliser une fonction φ définie comme à la question 2, avec a et b convenablement choisis.*

EXERCICE A.64 (dérivabilité et uniforme continuité). Montrer qu'une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} , et telle que la fonction dérivée f' soit bornée sur cet intervalle I , est uniformément continue sur I .

EXERCICE A.65 (fonction dérivée et TVI).

- (1) Donner un exemple de fonction réelle dérivable sur \mathbb{R} dont la dérivée n'est pas continue.
- (2) Soit f une fonction réelle dérivable dans un intervalle ouvert I de \mathbb{R} . Montrer que f' vérifie sur I le théorème des valeurs intermédiaires, même si elle n'est pas continue (théorème de Darboux).

EXERCICE A.66 (théorème de Rolle). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur \mathbb{R} , admettant deux limites égales (finies ou infinies, mais égales) en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que la fonction f' s'annule sur \mathbb{R} en au moins un point.

EXERCICE A.67 (théorème de Rolle). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b deux nombres réels. Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ admet au plus trois racines réelles distinctes.

EXERCICE A.68 (théorème de Rolle). Montrer, à l'aide du théorème de Rolle, que, si $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme

$$P_n(X) = \frac{d^n}{dX^n} [(1 - X^2)^n]$$

est un polynôme de degré n dont les n racines sont toutes réelles, simples, et appartiennent à $[-1, 1]$.

EXERCICE A.69. Montrer que si une fonction réelle définie et dérivable sur \mathbb{R} s'annule en $k \geq 2$ nombres réels distincts, alors sa fonction dérivée s'annule en au moins $k-1$ nombres réels distincts. En déduire que si p est une fonction polynomiale d'une variable à coefficients réels, de degré supérieur ou égal à 2, et dont toutes les racines sont réelles, il en va de même de la fonction polynomiale dérivée p' .

EXERCICE A.70 (théorème de Rolle). Soit f une fonction dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , telle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Montrer que la dérivée de f s'annule nécessairement en au moins un point de \mathbb{R} .

EXERCICE A.71 (théorème de Rolle et accroissements finis).

- (1) Donner une version explicite du théorème de Rolle sur les segments $[1, 2]$ puis $[2, 3]$ pour la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)$.

- (2) On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 - (x^2)^{1/3}$. Montrer que f' ne s'annule pas sur $[-1, 1]$; pourquoi cela ne contredit pas le théorème de Rolle.
- (3) Donner une version explicite du théorème des accroissements finis pour la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ sur le segment $[-1, 2]$.

EXERCICE A.72 (accroissements finis). Soit f la fonction de $[0, 2]$ dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1/x & \text{si } x \in]1, 2]. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable $]0, 2[$, à droite en 0 et à gauche en 2, et donner sur le segment $[0, 2]$ une version explicite du théorème des accroissements finis.

EXERCICE A.73 (accroissements finis). Soit f une fonction à valeurs complexes définie et dérivable sur $]0, 1[$. On suppose qu'il existe un réel strictement positif a tel que, pour tout $x \in]0, 1[$, $|f'(x)| < a$. Montrer, en utilisant le critère de Cauchy, que la suite $(f(1/n))_{n \geq 1}$ converge vers une limite finie.

EXERCICE A.74 (accroissements finis). Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert borné non vide de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable non bornée sur cet intervalle. Montrer qu'il est impossible que f' soit bornée sur I . Réciproquement, si f' est une fonction de I dans \mathbb{R} , dérivable sur I et de dérivée non bornée sur cet intervalle ouvert, peut-on affirmer que f est aussi une fonction non bornée? Donner un contre-exemple si ce n'est pas le cas.

EXERCICE A.75 (accroissements finis). Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction réelle dérivable sur $[a, b[$. On suppose $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = +\infty$.

- (1) Montrer que f' n'est pas bornée sur $[a, b[$.
- (2) Peut-on dire que $\lim_{x \rightarrow b-} f'(x) = +\infty$? On étudiera pour cela la fonction $x \in [-1, 0[\mapsto \sin(1/x) - 1/x$.

EXERCICE A.76 (accroissements finis).

- (1) En étudiant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, estimer inférieurement et supérieurement la différence $\sqrt{100.1} - 10$.
- (2) En étudiant la fonction $x \mapsto \exp(-x^2)$, estimer inférieurement et supérieurement la différence $1 - \exp(-0.024)$.

EXERCICE A.77 (accroissements finis). Appliquer soit la formule ou l'inégalité des accroissements finis, soit l'une de ses variantes, pour démontrer les quatre inégalités suivantes :

- (1) $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$ pour x et y réels quelconques ;
- (2) $\ln(1 + x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$;
- (3) $e^x \geq 1 + x$ pour tout x réel ;
- (4) $x/(1 + x^2) \leq \arctan(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

EXERCICE A.78 (accroissements finis). Soient x et y deux nombres réels tels que $0 < x < y$. Montrer que l'on a

$$x < \frac{y - x}{\ln(y) - \ln(x)} < y.$$

EXERCICE A.79 (accroissements finis). Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x)} \right) = 0.$$

EXERCICE A.80 (accroissements finis). Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[-1, 1]$, telle que $f(-1) = f(1) = 0$. On note $f'(-1)$ et $f'(1)$ respectivement les dérivées à droite en -1 et à gauche en 1 . On pose

$$\forall x \in]-1, 1[, g(x) = \frac{f(x)}{1-x^2}.$$

- (1) Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité sur $[-1, 1]$. On note $\tilde{g} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ le prolongement continu de g à $[-1, 1]$. Expliciter $\tilde{g}(1)$ et $\tilde{g}(-1)$ en fonction des données de l'énoncé.
- (2) Montrer qu'il existe au moins un point $c \in]-1, 1[$ tel que

$$g'(c) = -\frac{1}{4}(f'(1) + f'(-1)).$$

- (3) La fonction

$$F : x \in]-1, 1[\mapsto \frac{1}{1-x^2}$$

est-elle bornée sur $] - 1, 1[$?

- (4) Même question pour f .
- (5) Même question pour g .

EXERCICE A.81 (accroissements finis).

- (1) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 1/x^a$, montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, on a l'inégalité

$$\frac{1}{k^{a+1}} < \frac{1}{a} \left(\frac{1}{(k-1)^a} - \frac{1}{k^a} \right).$$

- (2) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ de terme général

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^{a+1}}, \quad n \geq 2.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge vers une limite finie.

- (3) En appliquant maintenant le théorème des accroissements finis à la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x)$, montrer que pour tout k dans \mathbb{N}^* , on a l'inégalité $\ln(k+1) - \ln(k) < 1/k$.
- (4) Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ la suite de terme général

$$v_n = \sum_{k=1}^n 1/k, \quad n \geq 1.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$.

EXERCICE A.82 (règle de Bernoulli-l'Hôpital). Appliquer la règle de Bernoulli-l'Hôpital pour calculer les cinq limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{x}{x-1} \right), & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{x}{x \sin(x)} \right), & \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \left((x - \pi) \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right), & \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} \left((\tan(x))^{\tan(2x)} \right). \end{aligned}$$

EXERCICE A.83 (formule de Taylor-Young à l'ordre 1). Soit f une fonction définie dans un voisinage ouvert de x_0 et dérivable en x_0 . Calculer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h^2) - f(x_0 + h)}{h} \right).$$

EXERCICE A.84 (formule de Taylor-Young à l'ordre 1, théorème de Rolle). Soit f une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur $[0, 1]$. On suppose que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et que $f(0) = f(1) = 0$.

- (1) Montrer que f reste de signe constant sur $]0, 1[$.
- (2) En déduire que $f'(0)f'(1) \leq 0$.

EXERCICE A.85 (formules de Taylor-Young et de Taylor-Lagrange). Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur I .

- (1) Donner l'expression du polynôme de Taylor de f à l'ordre n en un point $x_0 \in I$.
- (2) Rappeler l'énoncé des formules de Taylor-Young et de Taylor-Lagrange pour la fonction f au point x_0 , en indiquant soigneusement les hypothèses.

EXERCICE A.86 (formules de Taylor-Young et de Taylor-Lagrange).

- (1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - x^3/6 \leq \sin(x) \leq x - x^3/6 + x^5/120$.
- (2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - x^2/2 \leq \ln(1+x) \leq x$.
- (3) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2}e^x.$$

EXERCICE A.87 (formules de Taylor-Young et de Taylor-Lagrange).

- (1) Soit n un entier strictement positif. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral au voisinage de 0 à l'ordre n pour la fonction $\cos(x)$.
- (2) En déduire que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k / (2k)!$ a une limite quand n tend vers l'infini, et calculer cette limite.

EXERCICE A.88 (développements limités (DL)). Calculer les développements limités en 0 à l'ordre n des fonctions définies comme suit au voisinage de 0 :

- (1) $f(x) = \cos(x^2) + \sin(x)$ avec $n = 6$.
- (2) $f(x) = \cos(2x)\sqrt{1+x}$ avec $n = 3$.
- (3) $f(x) = (1+x+x^2)/(1-x-x^2)$, avec $n = 4$.
- (4) $f(x) = (\sin(x^3))^{1/3}$, avec $n = 13$.
- (5) $f(x) = (1+x)^{100} / ((1-2x)^{40}(1+2x)^{60})$, avec $n = 2$.
- (6) $f(x) = \ln(1+x \sin(x))$, avec $n = 4$.
- (7) $f(x) = e^{\cos(x)}$, avec $n = 4$.
- (8) $f(x) = (1+\cos(x))^{1/3}$, avec $n = 4$.
- (9) $f(x) = x/(e^x - 1)$, avec $n = 4$.
- (10) $f(x) = (1+x)^{1/x}$, avec $n = 3$ (on aura posé $f(0) = e$).

EXERCICE A.89 (développements limités (DL)). Soit la fonction polynomiale $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + 3x + 1$. Donner le développement limité de f à l'ordre 4 au point 0 ainsi qu'au point 2.

EXERCICE A.90 (développements limités (DL)).

(1) Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1 + \sin(x)} \operatorname{sh}(x)$.

(2) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de

$$x \mapsto \arcsin(\ln^2(x)).$$

EXERCICE A.91 (développements limités (DL), extrait du DM 2, 2011-2012). Montrer que la partie régulière d'un développement limité en 0 d'une fonction paire ne contient que des termes de degré pair.

EXERCICE A.92 (développements limités (DL), extrait du DM 2, 2011-2012). On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\operatorname{argsh}(x)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(1) Montrer que f satisfait l'équation différentielle :

$$(x^2 + 1)y'(x) + xy(x) = 1.$$

(2) En déduire le développement limité de f à l'ordre 7 en 0.

EXERCICE A.93 (développements limités (DL), tangente géométrique à un graphe). Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 2)$.

(1) Calculer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

(2) Donner la tangente à la courbe représentative de f au voisinage du point $x = 0$. Donner la position de la courbe par rapport à cette tangente et représenter sommairement le graphe de f au voisinage du point 0.

EXERCICE A.94 (développements limités (DL), tangente géométrique à un graphe, extrait du DM 2, 2011-2012).

(1) Étudier la parité de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ sur $] -\pi/2, \pi/2[$. Que peut-on dire du DL de $x \mapsto \tan(x)$ en 0 (voir l'exercice A.91 ci-dessus) ?

(2) Calculer le DL de $x \mapsto \tan(x)$ en 0 à l'ordre 5.

(3) On pose

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)}$$

pour $x \in] -\pi/2, 0[\cup] 0, \pi/2[$. Montrer que f admet une limite en 0 que l'on calculera.

(4) D'après la question précédente, f est prolongeable par continuité en 0. Montrer que la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0, et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.

EXERCICE A.95 (intégration de développements limités). Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt = \ln(3), \quad \lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} = \ln(2).$$

EXERCICE A.96 (développements limités (DL), tangente géométrique à un graphe, fonction réciproque). On considère la fonction f sur \mathbb{R} définie par : $f(x) = (e^x - 1)/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

- (1) Démontrer que f est dérivable sur \mathbb{R} , et calculer $f'(x)$ pour tout x .
- (2) Montrer que f est en fait deux fois dérivable sur \mathbb{R} , et donner $f''(0)$.
- (3) Écrire la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 pour f . Préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.
- (4) Déterminer les variations de la fonction $\phi : x \mapsto x e^x - e^x + 1$. En déduire que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- (5) Déterminer l'intervalle image J de la fonction f , et montrer que la fonction réciproque $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ de f est deux fois dérivable sur J .

EXERCICE A.97 (calculs de limites *via* les DL). Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{1}{1+x^2} - \cos(x) \right) \frac{1}{x^2} \right) \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x \ln(1+x^2)} \right) \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x} \right) \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\sinh^2(x)} \right) \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{e^{ax} + e^{bx}}{2} \right)^{1/x} \right), \quad a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

EXERCICE A.98 (calculs de limites *via* les DL, extrait du DM 2, 2011-2012). Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(x)}{x - \sin(x)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2 \ln(1 + 1/x)) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\cos(x)} - e^{-x^2}}{(\sin(x))^2} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh(x) \cos(x) - 2}{x^4} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{(\sin(x))^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

EXERCICE A.99 (asymptotes à un graphe). Rechercher les asymptotes aux graphes des fonctions suivantes (on en précisera d'abord les domaines de définition) :

- (1) $f : x \mapsto \frac{x}{1+e^{1/x}}$.
- (2) $g : x \mapsto [(x^2 - 2)(x + 3)]^{1/3}$.

III. Exercices en relation avec le chapitre 3 des notes de cours

EXERCICE A.100 (sommes de Riemann).

- (1) Soit $x > 0$. Calculer $\sum_{p=0}^{n-1} e^{px/n}$ en fonction de x .
- (2) Montrer que la limite suivante existe :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{n} \sum_{p=0}^{n-1} e^{px/n} \right).$$

(3) En déduire que

$$\int_{[0,x]} e^t dt = e^x - 1, \quad \forall x > 0.$$

EXERCICE A.101 (sommées de Riemann).

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Établir les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n \sin\left(\frac{x}{2n}\right) \sin\left(\frac{px}{n}\right) &= \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{x}{2n}\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{2n}x\right) \right) \\ \sum_{p=1}^n \sin\left(\frac{x}{2n}\right) \cos\left(\frac{px}{n}\right) &= \frac{1}{2} \left(-\sin\left(\frac{x}{2n}\right) + \sin\left(\frac{2n+1}{2n}x\right) \right). \end{aligned}$$

(2) Utiliser ces résultats pour établir les formules

$$\int_{[0,x]} \sin(t) dt = 1 - \cos(x), \quad \int_{[0,x]} \cos(t) dt = -\sin(x), \quad \forall x > 0.$$

EXERCICE A.102 (sommées de Riemann). Soit $a \in \mathbb{R}$.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Scinder en facteurs irréductibles le polynôme $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

(2) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^{2n} - 1 = (a^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(a^2 - 2a \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right).$$

(3) On suppose $a^2 \neq 1$. À l'aide des sommées de Riemann, montrer que :

$$I(a) = \int_{[0,\pi]} \ln(a^2 - 2a \cos(t) + 1) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1 \\ 2\pi \ln |a| & \text{si } |a| > 1. \end{cases}$$

EXERCICE A.103 (sommées de Riemann, sommées de Darboux). Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}; & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^4}; & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right); \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}; & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}; & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} e^{\frac{k+2n}{n}}. \end{aligned}$$

EXERCICE A.104 (sommées de Riemann, sommées de Darboux). Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{k^2 - k} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

EXERCICE A.105 (monotonie de la prise d'intégrale de Riemann). On pose :

$$I = \int_{[0,1]} e^{-x^2} dx, \quad J = \int_{[0,2]} e^{x^2} dx, \quad K = \int_{[0,1]} e^{-x^2} \sin(x) dx.$$

Montrer que :

(1) $0 \leq I \leq 1$;

- (2) $I \leq J$;
 (3) $|K| \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

EXERCICE A.106 (monotonie de la prise d'intégrale de Riemann). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_{[0, \pi/4]} (\tan(x))^n dx.$$

- (1) Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.
 (2) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est minorée. Que peut-on en déduire ?

EXERCICE A.107 (monotonie de la prise d'intégrale de Riemann). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

- (1) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.
 (2) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_{[n, n+1]} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

- (3) Montrer

$$\forall n \geq 2, \int_1^n \frac{dx}{x^2} \leq u_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2}.$$

- (4) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge, lorsque n tend vers l'infini, vers un nombre L appartenant au segment $[1, 2]$.

EXERCICE A.108 (sommes de Riemann, théorème fondamental de l'analyse). Soit $f \in C^1([a, b], \mathbb{C})$. On pose $x_k = a + k \left(\frac{b-a}{n}\right)$ pour $k = 0, \dots, n$. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) f'(x_k).$$

EXERCICE A.109 (théorème fondamental de l'analyse). Soit f une fonction continue de $[-1, 1]$ dans \mathbb{C} . Démontrer que la fonction F définie par $F(x) = \int_0^{\sin x} f(t) dt$ est dérivable sur $] -1, 1[$ (ainsi qu'à droite en -1 et à gauche en 1) et calculer sa dérivée.

EXERCICE A.110 (théorème fondamental de l'analyse). Pour tout $x > 0$ on pose :

$$F(x) := \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

- (1) Quel est le signe de F sur \mathbb{R}_+^* ?
 (2) Étudier la continuité et la dérivabilité de F sur \mathbb{R}_+^* . Calculer $F'(x)$.
 (3) Donner le DL de F au voisinage de $x = 1$ à l'ordre 3.

EXERCICE A.111 (changement de variables dans les intégrales). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue périodique, de période $T > 0$. Montrer que la quantité $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) dx$ ne dépend pas de α .

EXERCICE A.112 (intégration par parties, changement de variables dans les primitives). Soit $a \in]0, +\infty[$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel x positif, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^a + 1)^n}.$$

- (1) Déterminer une relation de récurrence entre $I_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$.
- (2) On suppose $a = 2$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n(x) = \int_0^{\arctan(x)} (\cos(t))^{2(n-1)} dt.$$

EXERCICE A.113 (intégration par parties, changement de variables dans les calculs de primitives).

- (1) Calculer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos(x)}.$$

- (2) Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ (avec $a < b$) telle que

$$\forall x \in [a, b], f(a + b - x) = f(x).$$

Exprimer $\int_a^b x f(x) dx$ en fonction de $\int_a^b f(x) dx$.

- (3) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{x dx}{1 + \sin(x)}.$$

EXERCICE A.114 (changement de variables dans les calculs de primitives). Calculer les intégrales suivantes (on pourra effectuer des changements de variables).

$$D_1 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx ; \quad D_2 = \int_0^1 e^x \cos(e^x) dx ; \quad D_3 = \int_e^3 \frac{1}{x(\ln x)^3} dx ;$$

$$D_4 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x + 1)} dx ; \quad D_5 = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx ; \quad D_6 = \int_{1/2}^2 \frac{\ln x}{1 + x^2} dx.$$

(poser $t = \ln x$ dans D_1 , D_3 et D_4 ; poser $x = \sin u$ dans D_5 ; poser $y = 1/x$ dans D_6).

EXERCICE A.115 (changement de variables dans les calculs de primitives). Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx ; \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^3 x dx ; \quad I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx.$$

Pour le calcul de I_1 , on posera $t = \sin x$. Deviner la suite. Que peut-on dire en général ?

EXERCICE A.116 (intégration par parties, changement de variables dans les calculs de primitives). Calculer les intégrales suivantes :

$$K_1 = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx ; \quad K_2 = \int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx ; \quad K_3 = \int_0^{\pi/2} x \sin x dx ;$$

$$K_4 = \int_{-1}^1 (\arccos x)^2 dx ; \quad K_5 = \int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx ; \quad K_6 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx.$$

EXERCICE A.117 (intégration par parties). Calculer les intégrales suivantes (on pourra intégrer par parties).

$$C_1 = \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx ; \quad C_2 = \int_0^1 \arctan x dx ;$$

$$C_3 = \int_0^1 (x^2+1) \cos x dx ; \quad C_4 = \int_1^2 (3x^2+x+1) \ln x dx.$$

EXERCICE A.118 (intégration par parties, fonctions réglées).

- (1) Pour $f \in C^1([a, b], \mathbb{C})$, démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$.
- (2) Démontrer le même résultat pour une fonction f en escalier sur $[a, b]$.
- (3) Démontrer le même résultat pour une fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$.

EXERCICE A.119 (intégration de polynômes trigonométriques par linéarisation (rappels de S1)). Calculer par linéarisation (formules d'Euler, voir le cours de semestre 1, [Ymis], section 2.3.4) la valeur des intégrales

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx \quad \text{et} \quad J_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^4 x dx.$$

EXERCICE A.120 (changement de variables dans les intégrales, intégrales de fractions rationnelles). Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx, \quad J = \int_{1/2}^3 \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$K = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)} dx, \quad L = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1+\cos(x)}{(\sin(x))^2} dx.$$

EXERCICE A.121 (première formule de la moyenne). Soit f une fonction continue sur le segment $I = [a, b]$ avec $a < b$. On considère une fonction g positive et Riemann-intégrable sur I , telle que $\int_{[a,b]} g(x) dx > 0$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que

$$\int_{[a,b]} f(x) g(x) dx = f(c) \int_{[a,b]} g(x) dx.$$

Annales 2011-2012, texte et corrigé du DS 1, 1h30

Exercice I.

Soit a un nombre réel. Calculer la somme $\sum_{k=0}^n a^k$ de la suite géométrique de raison a .

On rappelle l'identité remarquable

$$1 - X^{n+1} = (1 - X)(1 + X + \cdots + X^n).$$

En spécifiant $X = a$, on a

$$1 - a^{n+1} = (1 - a)(1 + a + \cdots + a^n) = (1 - a) \times \sum_{k=0}^n a^k.$$

Si $a \neq 1$, on a donc, en divisant par $1 - a \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Si $a = 1$, on a

$$\sum_{k=0}^n 1^k = n + 1.$$

- (1) En déduire le calcul de la somme $\sum_{k=n}^m a^k$ pour $m \geq n$.

Si $m \geq n$, on a, en mettant a^n en facteur dans la somme,

$$\sum_{k=n}^m a^k = a^n \sum_{k=0}^{m-n} a^k.$$

En utilisant le résultat établi à la question précédente, on a donc

$$\sum_{k=n}^m a^k = \begin{cases} a^n \times \left(\frac{1 - a^{m-n+1}}{1 - a} \right) = \frac{a^n - a^{m+1}}{1 - a} & \text{si } a \neq 1 \\ m - n + 1 & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

- (2) (Question de cours) Donner la définition d'une suite de Cauchy.

Une suite de nombres complexes $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite de Cauchy si et seulement si elle obéit au critère de Cauchy :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall m > n \geq N(\epsilon), |u_m - u_n| < \epsilon.$$

- (3) Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(3+e^{-k})^k}$ est une suite de Cauchy.

Pour $m > n$, on a, puisque $e^{-k} \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 \leq u_m - u_n &= \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{(3 + e^{-k})^k} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{3^k} = \sum_{k=n+1}^m (1/3)^k \\ &= (1/3)^{n+1} \times \frac{1 - (1/3)^{m-n}}{1 - 1/3} \\ &= \frac{3}{2} \times (1/3)^{n+1} \times (1 - (1/3)^{m-n}) \\ &\leq \frac{3}{2} \times (1/3)^{n+1} = \frac{1}{2} \times (1/3)^n. \end{aligned}$$

Ceci résulte du résultat établi au **(2)**, que l'on utilise ici en prenant $a = 1/3$, en conservant m , et en remplaçant n par $n + 1$. Il a fallu utiliser aussi (pour établir la dernière inégalité) le fait que $0 \leq (1/3)^{n-m} \leq 1/3$ (puisque $m - n \in \mathbb{N}^*$), donc que $1 - (1/3)^{n-m} \leq 1$.

Pour rendre $|u_m - u_n| = u_m - u_n < \epsilon$ lorsque $m > n$, il suffit donc de faire en sorte que $(1/3)^n < 2\epsilon$. Si l'on prend

$$m > n \geq N(\epsilon)$$

avec $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$N(\epsilon) > \frac{\ln(1/(2\epsilon))}{\ln 3},$$

on aura bien, pour $m > n \geq N(\epsilon)$,

$$|u_m - u_n| \leq \frac{1}{2} 3^{-n} < \frac{1}{2} \times (2\epsilon) = \epsilon.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifie donc le critère de Cauchy.

Exercice II

(1) (*Question de cours*)

Donner la définition de $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ($\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$) et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ($\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$) d'une suite $(u_n)_n$ de nombres réels.

Si la suite $(u_n)_n$ est une suite de nombres réels majorée, on appelle $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ou $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$ la limite de la suite décroissante minorée :

$$\left(\sup_{k \geq n} u_k \right)_n.$$

C'est aussi la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ lorsque l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ est non vide (par exemple lorsque la suite $(u_n)_n$ est aussi minorée). Si la suite $(u_n)_n$ n'est pas majorée, on convient que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Si la suite $(u_n)_n$ est une suite de nombres réels minorée, on appelle $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ou $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$ la limite de la suite croissante majorée :

$$\left(\inf_{k \geq n} u_k \right)_n.$$

C'est aussi la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ lorsque l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ est non vide (par exemple lorsque la suite $(u_n)_n$ est aussi majorée). Si la suite $(u_n)_n$ n'est pas minorée, on convient que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

- (2) Soit $u_n = \sin \frac{n\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n} \right)$, $n \geq 1$. Déterminer $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Comme $|\sin(1/n)| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n} \right) = 0,$$

et, par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Comme $|\sin(n\pi/4)| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est le produit d'une suite bornée par une suite convergente (vers 1) ; la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est donc une suite bornée en valeur absolue, admettant donc une limite supérieure et une limite inférieure, toutes deux dans \mathbb{R} (cf. la question de cours **(1)** ci-dessus). Si $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et convergeant vers un nombre réel l , on a nécessairement $l \in [-1, 1]$ (car cette suite extraite se présente comme le produit d'une suite bornée en valeur absolue par 1, en l'occurrence la suite $(\sin(\varphi(n)\pi/4))_{n \geq 1}$, par une suite convergeant vers 1). L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est donc inclus dans $[-1, 1]$.

Pour $n = 8k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$), on a

$$\sin \frac{n\pi}{4} = \sin \frac{(8k+2)\pi}{4} = \sin \left(2k\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

La suite extraite $(u_{8k+2})_{k \geq 0}$ a donc précisément pour limite 1 (qui est justement la plus grande valeur d'adhérence que l'on pouvait espérer pour la suite $(u_n)_{n \geq 1}$). Le nombre 1 est donc bien la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, et l'on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Pour $n = 8k + 6$ ($k \in \mathbb{N}$), on a

$$\sin \frac{n\pi}{4} = \sin \frac{(8k+6)\pi}{4} = \sin \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2} \right) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1.$$

La suite extraite $(u_{8k+6})_{k \geq 0}$ a donc précisément pour limite -1 (qui est justement la plus petite valeur d'adhérence que l'on pouvait espérer

pour la suite $(u_n)_{n \geq 1}$. Le nombre -1 est donc bien la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et l'on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1.$$

Exercice III

On rappelle que, pour tout $x \geq 0$ on a $1 + x \leq e^x$.

(1) Soient z_1, z_2, \dots des nombres complexes. En écrivant

$$\prod_{k=1}^{p+1} (1 + z_k) - 1 = \left(\prod_{k=1}^p (1 + z_k) - 1 \right) (1 + z_{p+1}) + z_{p+1},$$

montrer, par récurrence sur p , que

$$\left| \prod_{k=1}^p (1 + z_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^p (1 + |z_k|) - 1,$$

et en déduire que

$$\left| \prod_{k=1}^p (1 + z_k) - 1 \right| \leq e^{\sum_{k=1}^p |z_k|} - 1.$$

Notons, pour $p \in \mathbb{N}^*$, (\mathcal{A}_p) l'assertion :

$$\left| \prod_{k=1}^p (1 + z_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^p (1 + |z_k|) - 1 \quad \forall z_1, \dots, z_p \in \mathbb{C}.$$

L'assertion \mathcal{A}_1 est vraie car

$$|(1 + z_1) - 1| = |z_1| = 1 + |z_1| - |z_1| \quad \forall z_1 \in \mathbb{C}.$$

On suppose que pour p donné dans \mathbb{N}^* , l'assertion \mathcal{A}_p est vraie et l'on montre qu'alors \mathcal{A}_{p+1} l'est aussi. Cette assertion \mathcal{A}_p sera alors héréditaire. Elle sera ainsi prouvée pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ (c'est là le principe du raisonnement par récurrence).

Montrons donc \mathcal{A}_{p+1} en supposant \mathcal{A}_p vraie. Soient z_1, \dots, z_{p+1} , une liste de $p+1$ nombres complexes. On a, en utilisant l'indication, puis deux fois l'inégalité triangulaire, enfin, au second membre de la seconde ligne, le fait

que \mathcal{A}_p soit supposée vraie pour passer à la ligne suivante :

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^{p+1} (1 + z_k) - 1 \right| &= \left| \left(\prod_{k=1}^p (1 + z_k) - 1 \right) (1 + z_{p+1}) + z_{p+1} \right| \\ &\leq \left| \prod_{k=1}^p (1 + z_k) - 1 \right| \times |1 + z_{p+1}| + |z_{p+1}| \\ &\leq \left(\prod_{k=1}^p (1 + |z_k|) - 1 \right) (1 + |z_{p+1}|) + |z_{p+1}| \\ &= \prod_{k=1}^{p+1} (1 + |z_k|) - 1 - |z_{p+1}| + |z_{p+1}| \\ &= \prod_{k=1}^{p+1} (1 + |z_k|) - 1. \end{aligned}$$

L'assertion \mathcal{A}_{p+1} est bien démontrée modulo le fait que \mathcal{A}_p est vraie, ce qui valide la preuve de \mathcal{A}_p pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ (par récurrence).

On a, en utilisant le résultat rappelé en préambule de l'exercice :

$$\prod_{k=1}^p (1 + |z_k|) \leq \prod_{k=1}^p e^{|z_k|} = e^{|z_1|} \times \dots \times e^{|z_p|} = e^{|z_1| + \dots + |z_p|} = e^{\sum_{k=1}^p |z_k|}$$

puisque $e^{a+b} = e^a \times e^b$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ (même en fait lorsque a et b sont complexes). En retranchant 1 aux deux membres, on a donc :

$$\left| \prod_{k=1}^p (1 + z_k) - 1 \right| \leq e^{\sum_{k=1}^p |z_k|} - 1.$$

(2) (Question de cours) *Énoncer le critère de Cauchy pour une suite de nombres complexes $(u_k)_{k \geq 0}$.*

Une suite de nombres complexes $(u_k)_{k \geq 0}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si elle est de Cauchy, c'est-à-dire vérifie le critère de Cauchy :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall m > n \geq N(\epsilon), |u_m - u_n| < \epsilon.$$

(3) Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite de nombres complexes vrifiant

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^n |u_k| \right) \leq M < +\infty.$$

(a) Montrer que la suite $n \mapsto \sup_{p \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=n}^{k=n+p} |u_k| \right)$ est décroissante et converge vers 0.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n+1}^{n+1+p} |u_k| \leq \sum_{k=n}^{n+p+1} |u_k| \leq M.$$

En prenant la borne supérieure sur $p \in \mathbb{N}$, on en déduit

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=n+1}^{n+1+p} |u_k| \right) \leq \sup_{p \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| \right) \leq \sup_{p \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| \right) \leq M.$$

La suite

$$n \mapsto \sup_{p \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=n}^{k=n+p} |u_k| \right)$$

est donc bien décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite λ positive ou nulle. Si l'on avait $\lambda > 0$, la suite croissante majorée

$$\left(\sum_{k=0}^n |u_k| \right)_{n \geq 0} = (U_n)_{n \geq 0}$$

ne vérifierait pas le critère de Cauchy car on aurait :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sup_{p \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n+p} |u_k| - \sum_{k=0}^{n-1} |u_k| \right| = \sup_{p \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| \right) \geq \lambda > 0 ;$$

(B.1)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existerait en effet $m(n) = n + p(n) > n$ (dans \mathbb{N}) tel que

$$|U_{m(n)} - U_n| \geq \lambda/2$$

(ce qui exprime bien que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ n'est pas de Cauchy) : si en effet ce n'était pas le cas, il y aurait au moins un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n+p} |u_k| - \sum_{k=0}^{n-1} |u_k| \right| \leq \lambda/2,$$

ce qui serait en contradiction avec (B.1). Mais la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ converge (car croissante et majorée). Elle vérifie donc le critère de Cauchy. Avoir supposé $\lambda > 0$ conduit ainsi à une contradiction. Donc $\lambda = 0$.

(b) En utilisant le résultat obtenu la question 1., montrer que

$$\left| \prod_{k=0}^{n+p} (1 + u_k) - \prod_{k=0}^n (1 + u_k) \right| \leq e^M \left(e^{\sum_{k=n}^{k=n+p} |u_k|} - 1 \right).$$

Pour $p = 0$, l'inégalité est vraie car le membre de gauche est nul. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on observe que

$$\prod_{k=0}^{n+p} (1 + u_k) = \prod_{k=0}^n (1 + u_k) \times \prod_{k=n+1}^{n+p} (1 + u_k).$$

On a donc, en utilisant la mise en facteur, puis l'inégalité établie au à fin de la question (1) pour passer de la ligne 1 à la ligne 2, enfin,

une fois encore, l'inégalité rappelée en préambule de l'exercice pour passer cette fois de la ligne 2 à la ligne 3 :

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=0}^{n+p} (1 + u_k) - \prod_{k=0}^n (1 + u_k) \right| &= \prod_{k=0}^n |1 + u_k| \times \left| \prod_{k=n+1}^{n+p} (1 + u_k) - 1 \right| \\ &\leq \prod_{k=0}^n (1 + |u_k|) \times (e^{\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|} - 1) \\ &\leq e^{\sum_{k=0}^n |u_k|} \times (e^{\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|} - 1) \\ &\leq e^M \times (e^{\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|} - 1) \\ &\leq e^M \times (e^{\sum_{k=n}^{n+p} |u_k|} - 1). \end{aligned}$$

(c) En déduire que la suite $(\prod_{k=0}^n (1 + u_k))_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy et conclure que cette suite converge vers une limite l telle que $|l| \leq e^M$.

On pose $\Pi_n := \prod_{k=0}^n (1 + u_k)$. On a établi à la question précédente que

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, |\Pi_{n+p} - \Pi_n| &\leq e^M \times (e^{\sum_{k=n}^{n+p} |u_k|} - 1) \\ &\leq e^M \times (e^{\sup_{p \in \mathbb{N}} (\sum_{k=n}^{n+p} |u_k|)} - 1) \end{aligned}$$

(B.2)

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{p \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| \right) \right) = 0$$

(cf. la question **(3a)**) et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{w_n} - 1) = 0$$

pour une suite $(w_n)_{n \geq 0}$ quelconque de nombres réels (la fonction exponentielle est continue en 0 et vaut 1 en ce point), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{\sup_{p \in \mathbb{N}} (\sum_{k=n}^{n+p} |u_k|)} - 1) = 0.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe donc $N(\epsilon)$ tel que, pour tout

$$(n \geq N(\epsilon)) \implies (0 \leq e^{\sup_{p \in \mathbb{N}} (\sum_{k=n}^{n+p} |u_k|)} - 1 < \epsilon e^{-M}).$$

En reportant dans (B.2), on en déduit

$$\forall n \geq N(\epsilon), \forall p \in \mathbb{N}^*, |\Pi_{n+p} - \Pi_n| < \epsilon.$$

La suite de nombres complexes $(\Pi_n)_{n \geq 0}$ vérifie donc le critère de Cauchy, donc converge vers une limite finie $l \in \mathbb{C}$. Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\Pi_n| \leq \prod_{k=0}^n (1 + |u_k|) \leq \prod_{k=0}^n e^{|u_k|} = e^{\sum_{k=0}^n |u_k|} \leq e^M$$

on a aussi, en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, $|l| \leq e^M$.

Annales 2011-2012, texte et corrigé du DS 2, 1h30

Exercice I.

Questions de cours. *Énoncer le théorème des accroissements finis et l'inégalité des accroissements finis.*

Le théorème (ou « formule ») des accroissements finis concerne les fonctions à valeurs réelles et s'énonce ainsi : si $[a, b]$ est un segment de \mathbb{R} non réduit à un point et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors :

$$\exists c \in]a, b[\text{ t.q. } f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

(cf. le Corollaire 2.6 du polycopié de cours).

L'inégalité des accroissements finis concerne, elle, le cadre plus général des fonctions à valeurs complexes et s'énonce ainsi : si $[a, b]$ est un segment de \mathbb{R} non réduit à un point et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors on a l'inégalité :

$$|f(b) - f(a)| \leq (b - a) \sup_{x \in]a, b[} |f'(x)|$$

(cf. le Théorème 2.8 du polycopié de cours).

Soit f une fonction complexe continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$ telle que f' soit bornée.

- (1) Montrer que f est uniformément continue sur $]a, b[$.
- (2) Montrer que f est bornée sur $]a, b[$.
- (3) La fonction f se prolonge-t-elle par continuité aux bornes a, b ?

- (1) Pour tout x et y dans $]a, b[$, on a, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$(C.1) \quad |f(x) - f(y)| \leq |x - y| \times \sup_{t \in]x, y[} |f'(t)| \leq |x - y| \times \sup_{t \in]a, b[} |f'(t)|.$$

Comme f' est ici supposée bornée sur $]a, b[$, on a

$$\sup_{t \in]a, b[} |f'(t)| = M \in [0, +\infty[.$$

Si $M = 0$, la fonction f est, d'après (C.1), constante sur $]a, b[$, et par conséquent uniformément continue sur cet intervalle ouvert. Si $M > 0$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a, toujours d'après (C.1),

$$\forall x, y \in]a, b[,$$

$$\left(|x - y| < \eta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{M} \right) \implies \left(|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{M} \times M = \epsilon \right),$$

ce qui prouve encore que f est uniformément continue sur $]a, b[$ (cf. la Définition 2.9 du polycopié de cours).

- (2) Soit x_0 un point arbitraire de $]a, b[$ (on suppose que $]a, b[$ est non vide, sinon il n'y a rien à démontrer). Pour tout $x \in]a, b[$, on a, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$(C.2) \quad |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \times \sup_{t \in]a, b[} |f'(t)| = M|x - x_0| \leq M(b - a),$$

où $M := \sup_{t \in]a, b[} |f'(t)|$. Comme $||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)|$ pour tout $x \in]a, b[$, on déduit de (C.2) que

$$\forall x \in]a, b[, |f(x)| \leq |f(x_0)| + M(b - a),$$

donc que f est bornée sur $]a, b[$.

- (3) Si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'éléments de $]a, b[$ convergeant vers a , la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} (donc vérifie le critère de Cauchy). On en déduit, puisque

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, |f(x_n) - f(x_p)| \leq M|x_n - x_p|$$

(où $M := \sup_{t \in]a, b[} |f'(t)|$) d'après (C.1), que :

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \left(n \geq N(\epsilon) \text{ et } p \geq N(\epsilon) \right) \\ \implies \left(|x_n - x_p| \leq \frac{\epsilon}{M} \right) \implies \left(|f(x_n) - f(x_p)| \leq \epsilon \right). \end{aligned}$$

La suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ est donc une suite de nombres complexes vérifiant aussi le critère de Cauchy, donc convergeant (d'après le théorème de Cauchy) vers une limite $l[(f(x_n))_{n \geq 0}]$. Si $(\tilde{x}_n)_{n \geq 0}$ est une autre suite de points de $]a, b[$ convergeant aussi vers a , la suite $(x_n - \tilde{x}_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 ; il en est alors de même, toujours d'après le fait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \leq M|x_n - \tilde{x}_n|$$

(cf. (C.1)), pour la suite $(f(x_n) - f(\tilde{x}_n))_{n \geq 0}$. Ceci montre que

$$l[(f(x_n))_{n \geq 0}] = l[(f(\tilde{x}_n))_{n \geq 0}],$$

et, par conséquent, que le nombre complexe $l[(f(x_n))_{n \geq 0}]$ ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$. Si l'on pose donc

$$f(a) := l[(f(x_n))_{n \geq 0}],$$

où $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite quelconque de points de $]a, b[$ convergeant vers a , on définit bien un prolongement par continuité de f sur l'intervalle $[a, b[$: en effet, la fonction ainsi prolongée est bien continue en a (si l'on invoque le critère séquentiel de la Définition 2.3 du polycopié de cours). Le même raisonnement s'applique concernant le moyen de prolonger f en une fonction continue sur $]a, b]$.

Exercice II.

Dans cet exercice, on se propose d'étudier la nature de la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \sin(\ln n)$.

- (1) Soit $n_k = \lceil e^{2k\pi} \rceil + 1$, où $[u]$ désigne la partie entière de u c'est-à-dire le plus grand entier p tel que $p \leq u$. En remarquant tout d'abord que

$\sin(\ln(e^{2k\pi})) = 0$, puis en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \mapsto \sin x$ et ensuite à la fonction $x \mapsto \ln x$, montrer que

$$|u_{n_k}| \leq |\ln(n_k) - \ln(e^{2k\pi})| \leq e^{-2k\pi},$$

et conclure que 0 est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$.

L'inégalité des accroissements finis, que l'on applique ici à la fonction $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, couplée avec le fait que la fonction $\sin' = \cos$ est bornée sur \mathbb{R} en valeur absolue par 1, implique :

$$(C.3) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, |\sin x - \sin y| \leq |x - y| \times \sup_{t \in \mathbb{R}} |\cos t| \leq |x - y|.$$

En particulier, si $k \in \mathbb{N}$ et $x = \ln n_k$, $y = \ln(e^{2k\pi}) = 2k\pi$ (on observe que $n_k = [e^{2k\pi}] + 1 > e^{2k\pi}$, donc que $x > y$ du fait de la stricte croissance de la fonction \ln sur $]0, +\infty[$), on a :

$$(C.4) \quad |\sin(\ln n_k) - \sin(2k\pi)| = |\sin(\ln n_k)| = |u_{n_k}| \leq |\ln n_k - \ln(e^{2k\pi})|.$$

Sur l'intervalle $]e^{2k\pi}, n_k[$, la fonction \ln est dérivable, de dérivée la fonction strictement décroissante $t \mapsto 1/t$, et l'on a :

$$\forall t \in]e^{2k\pi}, n_k[, |\ln'(t)| = |1/t| \leq \frac{1}{e^{2k\pi}} = e^{-2k\pi}.$$

L'inégalité des accroissements finis, appliquée cette fois à la fonction \ln sur $]e^{2k\pi}, n_k[$, implique :

$$(C.5) \quad \begin{aligned} |\ln n_k - \ln(e^{2k\pi})| &\leq |n_k - e^{2k\pi}| \times \sup_{t \in]e^{2k\pi}, n_k[} |\ln'(t)| \\ &\leq e^{-2k\pi} |n_k - e^{2k\pi}| \leq e^{-2k\pi} \end{aligned}$$

puisque

$$|n_k - e^{2k\pi}| = n_k - e^{2k\pi} = [e^{2k\pi}] + 1 - e^{2k\pi} \in]0, 1[$$

(du fait de la définition de $[e^{2k\pi}]$). En reportant l'inégalité (C.5) au second membre de l'inégalité (C.4), on obtient bien l'inégalité demandée. Comme la suite $(e^{-2k\pi})_{k \geq 0}$ tend vers 0, la suite $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ (qui est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$) tend vers 0. Ainsi 0 est limite d'une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, et est donc bien valeur d'adhérence de cette suite (cf. la Définition 1.14 du polycopié de cours).

- (2) Refaire le raisonnement précédent avec la suite $m_k = [e^{2k\pi + \pi/2}] + 1$ et en déduire que 1 est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$. Conclure.

On applique comme dans la question précédente l'inégalité des accroissements finis pour la fonction \sin (inégalité (C.3)), mais cette fois avec $x = \ln m_k$ et $y = \ln(e^{2k\pi + \pi/2}) = 2k\pi + \pi/2$ (on observe ici encore que $y < x$ du fait de la définition de $m_k = [e^{2k\pi + \pi/2}] + 1$ et de la stricte croissance de la fonction \ln sur $]0, +\infty[$). On en déduit :

$$(C.6) \quad \begin{aligned} |\sin(\ln m_k) - \sin(2k\pi + \pi/2)| &= |\sin(\ln m_k) - 1| = |u_{m_k} - 1| \\ &\leq |\ln m_k - \ln(e^{2k\pi + \pi/2})|. \end{aligned}$$

Sur l'intervalle ouvert $]e^{2k\pi + \pi/2}, m_k[$, la fonction \ln est dérivable, de dérivée $t \mapsto 1/t$, strictement décroissante sur cet intervalle. On a donc, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction \ln sur le segment

$$(C.7) \quad \begin{aligned} & [e^{2k\pi+\pi/2}, m_k] : \\ & |\ln m_k - \ln(e^{2k\pi+\pi/2})| \leq |m_k - e^{2k\pi+\pi/2}| \times \sup_{t \in]e^{2k\pi+\pi/2}, m_k[} |\ln'(t)| \\ & \leq e^{-2k\pi-\pi/2} |m_k - e^{2k\pi+\pi/2}| \leq e^{-2k\pi-\pi/2} \end{aligned}$$

puisque

$$|m_k - e^{2k\pi+\pi/2}| = m_k - e^{2k\pi+\pi/2} = [e^{2k\pi+\pi/2}] + 1 - e^{2k\pi+\pi/2} \in]0, 1[$$

(du fait de la définition de $[e^{2k\pi+\pi/2}]$). En reportant l'inégalité (C.7) au second membre de l'inégalité (C.6), on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, |u_{m_k} - 1| \leq e^{-2k\pi-\pi/2}.$$

Comme la suite $(e^{-2k\pi-\pi/2})_{k \geq 0}$ tend vers 0, la suite $(u_{m_k})_{k \geq 0}$ (qui est encore une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$) tend vers 1. Ainsi 1 est limite d'une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, et est donc bien valeur d'adhérence de cette suite. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ possède au moins deux valeurs d'adhérence distinctes (0 et 1) et ne peut donc converger. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc une suite divergente.

- (3) *Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$?* Indication : pour $\vartheta \in [0, 2\pi]$, considérer la suite d'entiers $n_k^\vartheta = [e^{2k\pi+\vartheta}] + 1$.

En répétant mot pour mot le raisonnement fait dans la question précédente (mais avec cette fois θ au lieu de $\pi/2$ et donc $n_k^\theta = [e^{2k\pi+\theta}] + 1$ à la place de $m_k = [e^{2k\pi+\pi/2}] + 1$), on montre que

$$\forall k \geq 0, |u_{n_k^\theta} - \sin(\ln(e^{2k\pi+\theta}))| = |u_{n_k^\theta} - \sin \theta| \leq e^{-2k\pi-\theta}.$$

On en déduit que $\sin \theta$ est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ (car il existe une suite extraite de cette suite, en l'occurrence la suite $(u_{n_k^\theta})_{k \geq 0}$ convergeant vers $\sin \theta$, du fait que la suite $(e^{-2k\pi-\theta})_{k \geq 0}$ converge vers 0 quelque soit θ dans $[0, 2\pi]$). L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ contient donc tout le segment $[-1, 1]$, image de \mathbb{R} par l'application \sin . Comme $|u_n| \leq 1$ pour tout n (puisque u_n est un sinus), l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est exactement égal à $[-1, 1]$.

Exercice III.

1. Question de cours. Énoncer le théorème de Rolle.

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(a) = f(b)$ et que f soit dérivable sur $]a, b[$. Alors :

$$\exists c \in]a, b[\quad \text{t.q.} \quad f'(c) = 0$$

(cf. le Théorème 2.5 du polycopié de cours).

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur le segment $[a, b]$ telle que f'' soit dérivable sur $]a, b[$. Soient $x_0 < x_1 < x_2$, 3 points distincts du segment $[a, b]$.

2. Montrer qu'il existe un polynôme P de degré 2 tel que

$$P(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, 2.$$

1. Notons ainsi que $n_k^0 = n_k$ et que $n_k^{\pi/2} = m_k$.

Indication : chercher P sous la forme

$$P(x) = a(x - x_0)(x - x_1) + b(x - x_0)(x - x_2) + c(x - x_1)(x - x_2).$$

Si l'on pose

$$a = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}, \quad b = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad c = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$

on observe immédiatement que le polynôme P ainsi construit satisfait les conditions exigées. Ces valeurs de a, b, c s'obtiennent en substituant respectivement x_2, x_1, x_0 à l'inconnue x dans :

$$f(x) = P(x) = a(x - x_0)(x - x_1) + b(x - x_0)(x - x_2) + c(x - x_1)(x - x_2)$$

(on observe chaque fois que deux des trois produits figurant dans l'expression de P telle qu'elle est proposée induisent 0 après cette substitution).

Dans toute la suite, P est fixé comme ci-dessus et, de plus, on fixe un point $x \in [a, b]$, distinct des trois nombres x_0, x_1, x_2 .

3. Comment faut-il choisir le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la fonction :

$$g : t \in [a, b] \mapsto f(t) - P(t) - \alpha(t - x_0)(t - x_1)(t - x_2)$$

s'annule en x ?

Il faut choisir α tel que

$$f(x) - P(x) - \alpha(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = 0,$$

soit

$$(C.8) \quad \alpha = \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}.$$

On choisit partir de maintenant α comme à la question ci-dessus, de sorte que g s'annule en quatre points distincts.

4. Vérifier que g est de classe C^2 sur $[a, b]$ et que g'' est dérivable sur $]a, b[$.

La fonction polynomiale

$$Q : t \in \mathbb{R} \mapsto P(t) + \alpha(t - x_0)(t - x_1)(t - x_2)$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . La fonction g , qui s'écrit comme différence de la fonction f (de classe C^2 sur $[a, b]$ et telle que f'' est dérivable sur $]a, b[$) et de cette fonction polynomiale Q , est donc (comme f) de classe C^2 sur $[a, b]$, avec de plus g'' dérivable sur $]a, b[$.

– Montrer que g' s'annule en trois points distincts de $]a, b[$.

La fonction g s'annule aux trois points x_0, x_1, x_2 (puisque $f(x_j) = P(x_j)$ pour $j = 0, 1, 2$, par construction même du polynôme P via le choix des trois coefficients a, b, c à la question **2**) et s'annule aussi au point x (supposé distinct de ces trois points) de par le choix du paramètre α à la question **3**. Cette fonction g s'annule donc en (au moins) quatre points distincts de $[a, b]$, en l'occurrence x_0, x_1, x_2, x . D'après le théorème de Rolle, entre deux quelconques (mais consécutifs) de ces quatre points, la fonction g' admet au moins un zéro. Comme quatre points (dans \mathbb{R}) délimitent trois intervalles ouverts contigus (deux-à-deux disjoints) I_{11}, I_{12}, I_{13} (chacun ayant pour

extrémités deux de ces quatre points), la fonction g' s'annule en au moins trois points distincts de $]a, b[$. On applique pour justifier cela le théorème de Rolle à chacun des trois intervalles ouverts contigus I_{1j} , $j = 1, 2, 3$, délimités par les quatre points x_0, x_1, x_2, x ; la fonction g' admet ainsi au moins un zéro dans chacun de ces trois intervalles ouverts contigus (donc deux-à-deux disjoints) I_{11}, I_{12}, I_{13} .

– *Montrer que g'' s'annule en deux points distincts de $]a, b[$.*

La fonction g' (continue sur $[a, b]$) s'annule en trois points distincts de $]a, b[$ (établi au point précédent). Ces trois points distincts délimitent deux intervalles contigus disjoints I_{21} et I_{22} (inclus dans $]a, b[$). D'après le théorème de Rolle, appliqué cette fois à la fonction g' continue sur $[a, b]$ (donc sur les segments $\overline{I_{21}}$ et $\overline{I_{22}}$), dérivable sur chacun des deux intervalles ouverts contigus I_{21}, I_{22} , et nulle aux bornes de chacun d'eux. La fonction g'' s'annule au moins une fois dans chacun de ces deux intervalles ouverts, ce qui implique, puisque I_{21} et I_{22} sont disjoints (car contigus), que g'' s'annule en au moins deux points de $]a, b[$ (un dans I_{21} , un dans I_{22}).

5. *En déduire qu'il existe $c_x \in]a, b[$ tel que*

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{6} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f^{(3)}(c_x).$$

Si x est l'un des trois points x_0, x_1, x_2 , les deux fonctions

$$t \mapsto f(t) - P(t)$$

et

$$t \mapsto \frac{1}{6} (t - x_0)(t - x_1)(t - x_2)$$

s'annulent en x et l'on peut prendre pour c_x n'importe quel point de $]a, b[$ pour obtenir la relation demandée. On peut donc supposer que x est différent de x_0, x_1, x_2 , ce qui nous met dans les conditions des questions 3 et 4. Si g est précisément la fonction construite à la question 3, on a établi à la question 4 que g était (comme f) de classe C^2 sur $[a, b]$, avec g'' dérivable sur $]a, b[$ et s'annulant en au moins deux points distincts de $]a, b[$, que nous noterons α et β . Le théorème de Rolle est encore applicable (à $g'' : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ cette fois) et assure que $g^{(3)}$ s'annule en au moins un point de $]a, b[$, donc de $]a, b[$. Mais on observe que

$$\forall t \in]a, b[, g^{(3)}(t) = f^{(3)}(t) - 6\alpha$$

(car la dérivée troisième d'une fonction polynomiale de degré 2 est identiquement nulle tandis que la dérivée troisième de $t \rightarrow t^3$ vaut la fonction constante partout égale à 6). On peut donc affirmer :

$$\exists c = c_x \in]a, b[, \quad \text{t.q.} \quad \alpha = \frac{f^{(3)}(c_x)}{6}.$$

En reportant l'expression de α donnée en (C.8), on obtient bien encore la relation :

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{6} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f^{(3)}(c_x).$$

exigée.

Annales 2012-2013, texte et corrigé du DS 1, 1h30

Exercice I

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n + \ln(n) + 1}{(\sqrt{n} + 5)^2} \right), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Les calculs devront être dans chaque cas justifiés.

Dans le premier cas, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{n + \ln(n) + 1}{(\sqrt{n} + 5)^2} = \frac{n \left(1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{5}{\sqrt{n}} \right)^2} = \frac{1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{5}{\sqrt{n}} \right)^2}$$

(on met ici en facteur au numérateur et au dénominateur le terme que l'on pense être prépondérant dans chacune de ces deux expressions lorsque n tend vers l'infini). En utilisant le fait que les suites $(\ln(n)/n)_{n \geq 1}$, $(1/n)_{n \geq 1}$ et $(5/\sqrt{n})_{n \geq 1}$ convergent toutes les trois vers 0 et le résultat concernant les opérations sur les limites (Proposition 1.4 du polycopié), on trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n + \ln(n) + 1}{(\sqrt{n} + 5)^2} \right) = 1.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \exp(n \ln(1 + 1/n)) = \exp\left(\frac{\ln(1 + 1/n)}{1/n}\right).$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = \left(\frac{d}{dx} [\ln(1+x)] \right)(0) = 1,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e^1 = e$$

puisque la fonction exponentielle est continue en 1.

Exercice II

On rappelle que l'on a, pour tout nombre réel a différent de 1, pour tout entier $n \geq 0$,

$$1 + a + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels. On définit la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ de terme général

$$v_n = \frac{u_0 + 2u_1 + \cdots + 2^n u_n}{2^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (1) Vérifiez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_0}{2^{n+2}} + \frac{u_1 - u_0}{2^{n+1}} + \frac{u_2 - u_1}{2^n} + \cdots + \frac{u_{n+1} - u_n}{2}.$$

En déduire que si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de nombres positifs ou nuls, il en est de même pour la suite $(v_n)_{n \geq 0}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_0 + 2u_1 + \cdots + 2^{n+1}u_{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{u_0}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n u_{k+1} 2^k \\ v_n &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n u_k 2^k. \end{aligned}$$

En soustrayant ces deux égalités, on trouve bien la formule demandée. Si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et constituée de nombres positifs, on a $u_0 \geq 0$ et $u_{k+1} - u_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule que l'on vient d'établir (en tenant compte de la forme du second membre) on voit que $v_{n+1} - v_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$, donc que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est croissante. Comme $v_0 = u_0/2$, on a aussi $v_n \geq v_0 = u_0/2 \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (2) Montrer que si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est majorée par une constante $M > 0$, il en est de même pour la suite $(v_n)_{n \geq 0}$.

Si $u_k \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n \leq M \times \frac{1 + 2 + \cdots + 2^n}{2^{n+1}} = M \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{1}{2^{n+1}} \leq M.$$

- (3) Déduire des résultats établis aux questions 1 et 2 que si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante et majorée de nombres positifs ou nuls, les deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont toutes deux convergentes vers des limites réelles positives ou nulles. Si $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et majorée (et constituée de nombres positifs ou nuls), il en est de même de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ d'après les deux items précédents. Or toute suite de nombres réels croissante et majorée est convergente (cf. la Proposition 1.2 du polycopié). Les deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$, toutes les deux croissantes et majorées, sont donc toutes les deux convergentes vers des limites réelles. Comme ces deux suites sont toutes les deux des suites de nombres positifs ou nuls, les limites respectives de ces suites sont toutes les deux positives ou nulles.
- (4) Expliciter avec des quantificateurs logiques le fait qu'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels converge vers 0. On a :

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \\ \iff &\left(\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \left(n \geq N(\epsilon) \implies \left(|u_n| \leq \epsilon \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Exercice III

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels telle que

$$\sup \{|u_n|; n \in \mathbb{N}\} = M < +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{u_{3n}}{3} \right) = L \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

- (1) Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles bornées. Pourquoi existe-t-il au moins une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ (de la suite donnée $(u_n)_{n \geq 0}$) qui converge vers une limite réelle finie ? On note dans la suite $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{\varphi(n)})$.

Théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles bornées (Théorème 1.1 du polycopié) : « l'ensemble des valeurs d'adhérence (dans \mathbb{R}) d'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels bornée en valeur absolue est non vide (c'est le segment $[\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n, \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n]$). » Ici la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombres réels bornée en valeur absolue (par M , c'est la première des hypothèses dans l'en tête de l'exercice). Cette suite admet donc, d'après ce théorème, au moins une valeur d'adhérence $l \in \mathbb{R}$, ce qui signifie (Définition 1.9 des valeurs d'adhérence d'une suite de nombres réels dans le polycopié) qu'il existe au moins une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ (de la suite donnée $(u_n)_{n \geq 0}$) qui converge vers cette valeur d'adhérence l .

- (2) En utilisant la seconde hypothèse figurant dans (*), vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{3\varphi(n)}) = 3(L - l).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = l$ et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_{\varphi(n)} + \frac{u_{3\varphi(n)}}{3} \right) = L$$

(comme suite extraite de la suite $(u_n + u_{3n}/3)_{n \geq 0}$ qui est censée converger vers L), la suite $(u_{3\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers $3(L - l)$ d'après la Proposition relative aux opérations sur les limites de suites de nombres réels (Proposition 1.4 du polycopié).

- (3) Montrer par récurrence sur l'entier k que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{3^k \varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers limite finie $l_k \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers l'infini et que la suite $(l_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de nombres réels ainsi obtenue vérifie

$$l_0 = l \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad l_{k+1} = 3(L - l_k).$$

En utilisant la première hypothèse figurant dans (*), vérifier que l'on a aussi $|l_k| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Le résultat que l'on demande de montrer par récurrence est vrai pour $k = 0$ avec $l_0 = l$. Supposons qu'il soit vrai à un ordre $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que, pour cette valeur de k , la suite $(u_{3^k \varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers une limite réelle l_k . On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_{3^k \varphi(n)} + \frac{u_{3^{k+1} \varphi(n)}}{3} \right) = L$$

(toujours comme suite extraite de la suite $(u_n + u_{3n}/3)_{n \geq 0}$ qui est censée converger vers L), d'où l'on déduit, toujours d'après la Proposition relative

aux opérations sur les limites de suites de nombres réels (Proposition 1.4 du polycopié), que la suite $(u_{3^{k+1} \varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers $3(L - l_k) = l_{k+1} \in \mathbb{R}$. La propriété (P_k) que l'on demandait de prouver par récurrence est donc bien héréditaire et (P_k) est ainsi vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{3^k \varphi(n)})_{n \geq 0}$ est une sous-suite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$; comme cette dernière suite, elle est bornée en valeur absolue par M et, par conséquent, sa limite l_k aussi.

- (4) Dédurre de la relation entre l_k et l_{k+1} établie à la question 3 que

$$\forall k \in \mathbb{N}, l_{k+1} - 3L/4 = (-3) \times (l_k - 3L/4).$$

En déduire $l_k = (-3)^k(l - 3L/4) + 3L/4$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $((-3)^k)_{k \geq 0}$ est-elle une suite bornée? Montrer que le fait que l'on ait $|l_k| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ implique $l = 3L/4$. La relation demandée

$$l_{k+1} - 3L/4 = (-3)(L - 3L/4)$$

équivalent à

$$l_{k+1} = 3(L - l_k),$$

comme on le vérifie immédiatement. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} l_k - 3L/4 &= (-3)(l_{k-1} - 3L/4) = (-3)^2(l_{k-2} - 3L/4) = \dots = \\ \dots &= (-3)^k(l - 3L/4), \end{aligned}$$

d'où

$$l_k = (-3)^k(l - 3L/4) + 3L/4 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(la suite $(l_k)_{k \geq 0}$ est ce que l'on appelle une suite *arithmético-géométrique*, cf. votre cours de S1). La suite $((-3)^k)_{k \geq 0}$ n'est pas une suite bornée en valeur absolue (ou en module, c'est pareil, puisque les suites sont ici réelles) car c'est une suite géométrique de raison -3 et que $|-3| > 1$. Pour que la suite $(l_k)_{k \geq 0}$ reste donc bornée en valeur absolue (comme c'est le cas en fait ici d'après ce qui a été établi à la question précédente), il faut que $l - 3L/4 = 0$, soit $l = 3L/4$ (auquel cas la suite $(l_k)_{k \geq 0}$ est de fait stationnaire à cette valeur $3L/4$).

- (5) Dédurre de ce qui précède que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est égal à $\{3L/4\}$. Que peut-on dire du comportement du terme général u_n lorsque n tend vers $+\infty$? Si l est une valeur d'adhérence réelle de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ (il en existe d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass), on a nécessairement $l = 3L/4$ (d'après ce qui a été établi à la question précédente). L'ensemble des valeurs d'adhérence réelles de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ se réduit donc au singleton $\{3L/4\}$. D'après la proposition 1.10 du cours (ni $-\infty$, ni $+\infty$ ne sont valeurs d'adhérence car la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est supposée bornée en valeur absolue par M), la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ qui n'a que $3L/4$ comme seule valeur d'adhérence dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est convergente vers cette valeur $3L/4$.

Annales 2012-2013, texte et corrigé du DS 2, 1h30

Exercice I

- (1)
- Énoncer le théorème de Rolle.*

Il s'agit du Théorème 2.5 du polycopié : « si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur le segment $[a, b]$ (non réduit à un point) et dérivable sur $]a, b[$, avec de plus $f(a) = f(b)$, il existe au moins un point c de $]a, b[$ où $f'(c) = 0$. »

- (2)
- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Montrer que $f(x) \neq f(a)$ pour tout $x \in]a, b[$.*

On va raisonner par l'absurde. Si $x \in]a, b[$ était tel que $f(x) = f(a)$, le théorème de Rolle, appliqué à la fonction f sur le segment $[a, x]$, impliquerait qu'il existe au moins un $c_x \in]a, x[$ tel que $f'(c_x) = 0$. Ceci serait contradictoire avec l'hypothèse selon laquelle f' ne s'annule pas sur $]a, b[$. Le résultat est donc démontré par l'absurde¹.

- (3)
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, p fois dérivable sur $]a, b[$, s'annulant en $p + 1$ points distincts de $[a, b]$. Montrer qu'il existe au moins un $c \in]a, b[$ tel que $f^{(p)}(c) = 0$ (on commencera par traiter le cas où $p = 1$).*

On raisonne par récurrence (ou hérédité), comme d'habitude en trois étapes.

1. On valide l'assertion au cran initial (assertion $\mathcal{P}(1)$ VRAIE).

On raisonne pour commencer avec $p = 1$ et l'on suppose donc f dérivable sur $]a, b[$ et telle que f s'annule en deux points distincts de $[a, b]$, ξ_1 et ξ_2 (on pourrait avoir *a priori* $\xi_1 = a$ et $\xi_2 = b$); le théorème de Rolle s'applique à f sur $[\xi_1, \xi_2] \subset [a, b]$ et il existe donc $c \in]\xi_1, \xi_2[\subset]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$; le résultat est acquis dans ce cas.

2. On formule (et admet) l'assertion ($\mathcal{P}(p)$ VRAIE) pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Forts du fait que le résultat est vrai pour $p = 1$ (assertion $\mathcal{P}(1)$ VRAIE), nous allons raisonner par récurrence et supposer le résultat vrai pour p fixé dans \mathbb{N}^* , pour tout segment $[\alpha, \beta]$, pour toute fonction réelle continue

1. On pouvait aussi raisonner différemment, même si ce n'était pas tout à fait dans l'esprit de l'exercice : en invoquant cette fois non plus le théorème de Rolle, mais la Proposition 2.12 du polycopié (qui en découle en fait *via* la formule des accroissements finis), on sait que si f' ne s'annule pas sur $]a, b[$, f est strictement monotone sur cet intervalle (strictement croissante ou strictement décroissante suivant que l'on ait toujours $f' > 0$ dans $]a, b[$ ou $f' < 0$ dans $]a, b[$); il est donc impossible que $f(x) = f(a)$ puisque $f(a) = \lim_{\{\xi \rightarrow a; \xi > a\}} f(\xi)$ par continuité de f en a . Cet argument était aussi accepté.

sur $[\alpha, \beta]$, p fois dérivable sur $] \alpha, \beta[$, s'annulant en $p + 1$ points distincts de $[\alpha, \beta]$ (ce sera l'assertion $(\mathcal{P}(p)$ VRAIE)).

3. On prouve $(\mathcal{P}(p)$ VRAIE) \implies $(\mathcal{P}(p+1)$ VRAIE). Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$, $p + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$ et telle que f s'annule en $p + 2$ points distincts de $[a, b]$, notés $a \leq \xi_1 < \dots < \xi_{p+2} \leq b$. D'après le théorème de Rolle, f' s'annule en un point $\xi_{1,2}$ de $] \xi_1, \xi_2[$, ainsi qu'en un point $\xi_{p+1,p+2}$ de $] \xi_{p+1}, \xi_{p+2}[$. Comme la fonction f' s'annule aussi en un point $\xi_{j,j+1} \in] \xi_j, \xi_{j+1}[\subset]a, b[$ pour tout j dans $\{2, \dots, p\}$, elle s'annule en $p - 1 + 2 = p + 1$ points distincts de $[\xi_{1,2}, \xi_{p+1,p+2}] \subset]a, b[$ et est continue sur ce segment $[\xi_{1,2}, \xi_{p+1,p+2}]$ (car f' est encore dérivable sur $]a, b[$, puisque f est au moins $2 > 1$ fois dérivable sur $]a, b[$). On peut appliquer l'hypothèse de récurrence (assertion $(\mathcal{P}(p)$ VRAIE)) à f' sur $[\xi_{1,2}, \xi_{p+1,p+2}]$; comme f' s'annule $p + 1$ fois sur ce segment et y est continue et dérivable à l'ordre p en son intérieur, $(f')^{(p)} = f^{(p+1)}$ doit s'annuler au moins une fois dans $] \xi_{1,2}, \xi_{p+1,p+2}[$, donc dans $]a, b[$, ce que l'on voulait. On vient donc de vérifier :

$$\text{assertion } (\mathcal{P}(p) \text{ VRAIE}) \implies \text{assertion } (\mathcal{P}(p+1) \text{ VRAIE}).$$

Comme l'assertion $(\mathcal{P}(1)$ VRAIE) a été validée à l'étape 1, le résultat est prouvé par récurrence.

Exercice II

- (1) Montrer que la fonction $f : x \in] - 1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$ est indéfiniment dérivable sur $] - 1, +\infty[$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, sa fonction dérivée d'ordre k est la fonction

$$x \mapsto (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

La fonction $x \in] - 1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$ est C^∞ sur $] - 1, +\infty[$ comme composée de la fonction affine $x \in] - 1, +\infty[\mapsto 1+x \in]0, +\infty[$ et de la fonction $\ln : X \in]0, +\infty[\mapsto \ln(X)$, toutes les deux C^∞ sur leurs domaines de définition, de dérivées respectives $x \mapsto 1$ et $X \mapsto 1/X$. La première dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $] - 1, +\infty[$ est, d'après la règle de Leibniz (cf. le cours de MISMI de semestre 1 ([**Ymis**], section 3.5), la fonction $x \in] - 1, +\infty[\mapsto (1+x)^{-1}$. Les dérivées successives de cette dernière fonction sur $] - 1, +\infty[$ sont les fonctions

$$\begin{aligned} x \in] - 1, +\infty[&\mapsto (-1)(-2) \cdots (-k)(1+x)^{-k-1} \\ &= (-1)^k k! (1+x)^{-k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

La dérivée d'ordre k de la fonction $x \in] - 1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$ sur $] - 1, +\infty[$ est donc bien la fonction

$$x \in] - 1, +\infty[\mapsto (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

(car il faut remonter d'un cran l'ordre de dérivation utilisé pour sa première dérivée, à savoir la fonction $x \in] - 1, +\infty[\mapsto (1+x)^{-1}$).

- (2) Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $a, b \in I$ avec $a < b$ et $p \in \mathbb{N}$. Écrire, pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I , la formule de Taylor-Lagrange entre a et b à l'ordre $p + 1$.

Il s'agit d'énoncer ici la formule (2.49) du Théorème 2.10 du cours :
 « si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} , et si $a < b$ sont deux points de I et p un entier positif, il existe au moins un nombre $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(p+1)}(c)}{(p+1)!} (b-a)^{p+1}. \quad \gg$$

- (3) En prenant $I =]-1, +\infty[$, $a = 0$, $b = 1$ et pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convenable, déduire des deux questions précédentes que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \ln 2.$$

En faisant comme indiqué et en appliquant la formule rappelée à la question 2, on voit que :

$$\begin{aligned} \exists c \in]0, 1[, \ln(2) &= \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} + \frac{1}{(p+1)!} \frac{(-1)^p p!}{(1+c)^{p+1}} \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^p}{(p+1)(1+c)^{p+1}}. \end{aligned}$$

On en déduit, puisque $c \geq 0$,

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{1}{p+1}.$$

Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} 1/(p+1) = 0$, le lemme des gendarmes implique que l'on a

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \ln 2.$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice III

- (1) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction F continue sur un intervalle de \mathbb{R} et à valeurs réelles.

C'est le Théorème 2.1 du cours (reposant sur la méthode algorithmique dite de *dichotomie* qu'il fallait citer ici : « si I est un intervalle de \mathbb{R} , $a < b$ deux points de I et f une fonction continue de I dans \mathbb{R} , alors f prend au moins une fois entre a et b toute valeur c appartenant au segment d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$. »).

- (2) Soit $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré impair. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(a) = 0$.

On peut supposer, quitte à remplacer P par $-P$, que le coefficient du terme dominant t^{2k+1} de P est strictement positif. Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$$

(car le degré de P est impair et que $(-\infty)^{2k+1} = -\infty$ tandis que l'on a $(+\infty)^{2k+1} = +\infty$, et que l'on sait d'autre part qu'une fonction polynomiale réelle est équivalente à sa fonction monomiale de plus haut degré au voisinage de $\pm\infty$). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, P doit prendre au moins une fois toute valeur entre $-R$ et R lorsque $R > 0$ est arbitraire, donc en particulier la valeur 0.

(3) Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, |f^{(k)}(x)| \leq |P(x)|,$$

où P désigne, comme à la question précédente, une fonction polynomiale à coefficients réels de degré impair. Dédurre de la question 2 qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est cette fonction f et ce nombre réel a que l'on conserve jusqu'à la fin de l'exercice.

Comme P s'annule en un point a (d'après le résultat établi question 2) et que $|f^{(k)}(a)| \leq |P(a)| = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(4) Soit $b > a$. Écrire, lorsque $p \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $p+1$ pour la fonction f entre a et b . En déduire l'inégalité :

$$|f(b)| \leq \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in [a,b]} |P(x)| \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

On demandait ici d'énoncer, pour une fonction C^∞ sur $I = \mathbb{R}$ (à valeurs ici réelles, mais elle pourrait tout aussi bien être à valeurs complexes), l'inégalité (2.54) du Théorème 2.11 du cours : « si a, b , avec $a < b$ sont deux points de I et $p \in \mathbb{N}$,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in]a,b[} |f^{(p+1)}(x)|. \quad \gg$$

Comme ici $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, \dots, p$, et ce pour tout $p \in \mathbb{N}$, et que $|f^{(p+1)}(x)| \leq |P(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par hypothèses, on en déduit, pour ce qui est de notre contexte :

$$|f(b)| \leq \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(p+1)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in [a,b]} |P(x)| \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

(5) Soit, pour $b > a$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p = (b-a)^{p+1}/(p+1)!$. Montrer qu'il existe un entier positif K tel que pour $p \geq K$, $0 < u_{p+1} \leq u_p/2$. En déduire $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = 0$.

On a

$$\forall p \in \mathbb{N}, \frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{b-a}{p+1}.$$

Si $p \geq \sup(0, 2(b-a) - 1) = K$, on a donc $u_{p+1} \leq u_p/2$ (ou encore $u_p \leq u_{p-1}/2$). Par récurrence, on en déduit, pour tout $p \geq K$,

$$0 \leq u_p \leq (1/2)^{p-K} u_K.$$

Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} (1/2)^{p-K} u_K = 0$, le lemme des gendarmes implique, du fait de l'encadrement ci-dessus, que la suite $(u_p)_{p \geq 0}$ converge vers 0.

- (6) *Déduire des résultats établis aux questions 4 et 5 que pour tout $b > a$, $f(b) = 0$.*

En prenant la limite dans l'inégalité

$$|f(b)| \leq \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in [a,b]} |P(x)| = u_p \sup_{x \in [a,b]} |P(x)| \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

lorsque p tend vers l'infini, on trouve $f(b) = 0$ pour $b > a$.

- (7) *Soit $b < a$. En écrivant comme aux questions précédentes l'inégalité de Taylor-Lagrange à un ordre arbitraire pour la fonction $x \mapsto f(2a-x)$ entre a et $2a-b > a$ et en raisonnant comme à la question 6, montrer que l'on a encore $f(b) = 0$.*

Les nombres dérivés successifs en a de la fonction composée $x \mapsto f(2a-x)$ sont nuls car, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^k}{dx^k} [f(2a-x)] = (-1)^k f^{(k)}(2a-x)$$

d'après la règle de Leibniz et que $[f^{(k)}(2a-x)]_{x=a} = f^{(k)}(a) = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} |[f(2a-x)]_{x=2a-b}| = |f(b)| &\leq \frac{(a-b)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in [a, 2a-b]} |f^{(p+1)}(2a-x)| \\ &\leq \frac{(a-b)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in [b, a]} |P(x)| \quad \forall p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

En prenant cette fois $u_p := (b-a)^{p+1}/(p+1)!$, on raisonne comme aux questions 5 et 6 et l'on montre que $f(b) = 0$ si $b < a$.

- (8) *Déduire des deux questions précédentes que f est identiquement nulle sur \mathbb{R} .*

On a établi $f(b) = 0$ si $b > a$ (à la question 6) et $f(b) = 0$ si $b < a$ (à la question 7). On sait aussi que $f(a) = 0$ par hypothèses, donc $f \equiv 0$ sur \mathbb{R} .

Annales 2012-2013, texte et corrigé du DS Terminal, 3h00

EXERCICE I

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par récurrence pour $n \geq 1$ par

$$u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{n + u_n}{n^2} \quad \forall n \geq 1.$$

- (1) Calculer u_2 et u_3 . On a en appliquant la formule reliant u_{n+1} à u_n que $u_2 = (1 + 1)/1 = 2$ et $u_3 = (2 + 2)/4 = 1$.
- (2) Montrer, en raisonnant par récurrence sur n , que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite à termes positifs. On a $u_1 = 1 \geq 0$. L'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$ (à savoir « $u_n \geq 0$ ») est donc vérifiée au cran initial ($n = 1$). Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un cran fixé $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui signifie $u_n \geq 0$. Alors $u_{n+1} = (n + u_n)/n^2 = 1/n + u_n/n^2 \geq 1/n > 0$, ce qui montre que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie. L'assertion « $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ » est bien ainsi prouvée par récurrence.
- (3) Montrer que $u_n \geq 1/(n - 1)$ pour tout $n \geq 2$, puis en déduire que $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \geq 2$. D'après la formule exprimant u_{n+1} à partir de u_n , on a

$$u_n = \frac{n - 1 + u_{n-1}}{(n - 1)^2} = \frac{1}{n - 1} + \frac{u_{n-1}}{(n - 1)^2} \quad \forall n \geq 2.$$

Comme $u_{n-1} \geq 0$ pour tout $n \geq 2$ (d'après la question 2), on a bien $u_n \geq 1/(n - 1)$ pour tout $n \geq 2$. On a donc, toujours d'après la formule liant u_{n+1} à u_n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n + u_n}{n^2} - u_n = \frac{1}{n} - \frac{n^2 - 1}{n^2} u_n \\ &\leq \frac{1}{n} - \frac{n^2 - 1}{n^2} \frac{1}{n - 1} = \frac{1}{n} - \frac{n + 1}{n^2} = -\frac{1}{n^2} \leq 0 \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

- (4) Déduire de la question 3 que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite majorée par 2, décroissante à partir de $n = 2$. On a $u_1 = 1 \leq 2$, puis $u_2 = 2$. D'après le résultat établi à la question 3, la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante; elle est donc majorée par son premier terme, à savoir $u_2 = 2$. Comme $u_1 = 1$, tous les u_n , pour $n \geq 1$, sont majorés par 2. La décroissance à partir de $n = 2$ a été vue juste au dessus.
- (5) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et calculer sa limite. Toute suite décroissante minorée (ici par 0) est convergente (Proposition 1.2 du cours). Donc la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est convergente vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$

et, bien sûr, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge aussi vers l . On a donc (de par le résultat concernant les opérations sur les limites de suites, Proposition 1.4 du cours)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + u_n \times \frac{1}{n^2} \right) = 0 + l \times 0 = 0.$$

La suite $(u_{n+1})_{n \geq 1}$, donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, converge vers $l = 0$.

(6) *Montrer, en utilisant les résultats établis aux questions 3 et 4, que :*

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{n-1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{(n-1)^2}.$$

La première inégalité a été établie à la question 3. D'autre part

$$u_n \leq \frac{n-1+u_{n-1}}{(n-1)^2} \leq \frac{n-1+2}{(n-1)^2} = \frac{n+1}{(n-1)^2}$$

puisque $u_{n-1} \leq 2$ pour tout $n \geq 2$.

(7) *En déduire un équivalent pour u_n lorsque n tend vers $+\infty$.* Comme $1/(n-1) \sim 1/n$ et $(n+1)/(n-1)^2 \sim 1/n$ lorsque n tend vers l'infini, le terme u_n qui se trouve encadré par $1/(n-1)$ et $(n+1)/(n-1)^2$ est aussi équivalent à $1/n$ (lemme de gendarmes).

On définit la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ en posant $v_n = (1+u_n)^n$ pour tout $n \geq 1$.

resume *Rappeler le DL à l'ordre 1 en 0 de la fonction*

$$x \in]-1, +\infty[\mapsto f(x) = \ln(1+x).$$

Il s'agit juste d'exprimer ici que f est dérivable en $x = 0$, de nombre dérivé $f'(0) = 1/1 = 1$ en ce point. Le DL demandé est donc :

$$\log(1+h) = \log 1 + h + o(h) = h + o(h).$$

resume *Exploiter la formule $x^n = \exp(n \ln x)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$) pour réexprimer v_n lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$. On a, en exploitant la relation suggérée, lorsque n tend vers l'infini :*

$$\begin{aligned} v_n &= \exp(n \log(1+u_n)) = \exp(n(u_n + o(u_n))) \\ &= \exp(n(u_n + o(1/n))) = \exp(nu_n + o(1)). \end{aligned}$$

Comme $u_n \sim 1/n$ lorsque n tend vers l'infini, la suite $(nu_n)_{n \geq 1}$ converge vers 1 et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e^1 = e$ du fait que la fonction exponentielle est continue en $x = 1$.

EXERCICE II

Soit $n \geq 2$ un entier fixé et $f_n :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x > -1, \quad f_n(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}.$$

(1) *Montrer que f_n est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et calculer $x \mapsto f_n'(x)$. La fonction f_n est définie sur $]-1, +\infty[$. Elle est dérivable sur cet intervalle ouvert comme quotient de deux fonctions polynomiales (donc C^∞ sur \mathbb{R}), la fonction figurant au dénominateur ne s'annulant pas sur $]-1, +\infty[$. Le calcul de la dérivée se fait en utilisant les règles de calcul pour la dérivée*

d'un quotient (vues dans le cours de MISMI ainsi qu'en Terminale); on obtient, pour $x > -1$:

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{u_n(x)}{v_n(x)} \right] = \frac{u'_n(x)v_n(x) - u_n(x)v'_n(x)}{v_n^2(x)} \\ &= \frac{nx^{n-1}(1+x)^n - n(x^n+1)(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} \\ &= n \frac{x^{n-1}(1+x) - x^n - 1}{(1+x)^{n+1}} = \frac{n(x^{n-1} - 1)}{(1+x)^{n+1}}. \end{aligned}$$

- (2) Montrer que f_n réalise son minimum sur $[0, +\infty[$ en un unique point de $[0, +\infty[$ que l'on déterminera et calculer la valeur de ce minimum. La fonction f'_n s'annule en un seul point, $x = 1$. Comme $f'_n < 0$ lorsque $x^{n-1} < 1$, i.e. $x < 1$, f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$. Comme $f'_n > 0$ lorsque $x^{n-1} > 1$, i.e. $x > 1$, f_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Il y a donc un (unique) point où f_n réalise son minimum sur $[0, +\infty[$, le point $x = 1$, la valeur du minimum de f_n en ce point étant égale à $2/2^n = 2^{1-n}$.

- (3) En déduire que

$$\forall x \geq 0, \quad (1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n),$$

puis que

$$\forall a \geq 0, \forall b \geq 0, \quad (a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n).$$

On a, d'après les résultats établis à la question 2 :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \frac{1}{f_n(x)} \leq \frac{1}{2^{1-n}} = 2^{n-1}.$$

Il en résulte donc

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad (1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n).$$

Si $a \geq 0$ et $b > 0$, on a, en prenant $x = a/b$ dans l'inégalité précédente :

$$(1+a/b)^n \leq 2^{n-1}(1+a^n/b^n).$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par b^n , on trouve bien

$$(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n).$$

Cette inégalité subsiste si $a \geq 0$ et $b = 0$ puisque $2^{n-1} \geq 1$. Elle est donc valide en fait pour tout a, b dans $[0, +\infty[$.

EXERCICE III

Soient $a < b$ deux nombres réels.

- (1) Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions supposées dans un premier temps de classe C^1 sur $[a, b]$, et telles que $f'(t) \leq g'(t)$ pour tout $t \in [a, b]$. Rappeler le théorème fondamental de l'analyse pour une fonction h de classe C^1 sur un segment de \mathbb{R} et démontrer que

$$f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x) \quad \text{lorsque} \quad a \leq x < y \leq b.$$

Il s'agit du résultat suivant (théorème 2.12 du cours) : si h est une fonction à valeurs réelles ou complexes de classe C^1 sur le segment $[x, y]$ (non réduit à un point), alors

$$h(y) - h(x) = \int_x^y h'(t) dt.$$

Si $[x, y] \subset [a, b]$, on applique ce résultat à la fonction $h = (g - f)|_{[x, y]}$. On a

$$(g(y) - f(y)) - (g(x) - f(x)) = \int_x^y (g'(t) - f'(t)) dt.$$

Or l'intégrale de Riemann sur un segment d'une fonction continue positive est positive du fait de la propriété de monotonie de la prise d'intégrale. On a donc

$$(g(y) - f(y)) - (g(x) - f(x)) \geq 0,$$

ce qui est l'inégalité voulue.

- (2) On considère $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ comme dans la question **1**, mais on suppose maintenant seulement que ces deux fonctions sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, telles que $f'(t) \leq g'(t)$, cette fois seulement pour tout $t \in]a, b[$. Énoncer la formule des accroissements finis pour une fonction réelle h définie sur un segment de \mathbb{R} non réduit à un point, puis, en l'appliquant à la fonction $g - f$, montrer que lorsque $a \leq x < y \leq b$, on a encore $f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x)$.

On utilise ici la formule des accroissements finis (corollaire 2.6 du cours) : si h est une fonction réelle continue sur un segment $[x, y]$, dérivable sur $]x, y[$, il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$h(y) - h(x) = h'(c) (y - x).$$

On prend ici $h = (g - f)|_{[x, y]}$. Il existe $c_{x, y} \in]x, y[\subset]a, b[$ tel que

$$(g(y) - f(y)) - (g(x) - f(x)) = (y - x) (g'(c_{x, y}) - f'(c_{x, y})).$$

Comme $f' \leq g'$ sur $]a, b[$, on a donc $f'(c_{x, y}) - g'(c_{x, y}) \leq 0$, ce qui donne l'inégalité demandée.

- (3) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe deux constantes α et β telles que $f'(t) \in [\alpha, \beta]$ pour tout $t \in]a, b[$. Soient encore x et y dans $[a, b]$ tels que $x < y$. Montrer que

$$\alpha \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \beta.$$

On utilise comme à la question **2** la formule des accroissements finis sur $[x, y]$ (corollaire 2.6 du cours) ; notons que l'on aurait pu aussi utiliser le théorème fondamental de l'analyse comme à la question **1**, mais il aurait fallu être plus soigneux avec les cas $x = a$ ou $y = b$ et utiliser en plus la continuité de f en ces points. On prend ici $h = f|_{[x, y]}$. On a donc

$$f(y) - f(x) = f'(c) (y - x).$$

Or $y - x > 0$ et $f'(c) \in [\alpha, \beta]$ par hypothèses. On a donc

$$\alpha \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \leq \beta.$$

(4) Soit $f : x \in] - \pi/2, \pi/2[\mapsto \tan x$.

– Calculer $f'(x)$ pour $x \in] - \pi/2, \pi/2[$ et montrer que $f'(x) \geq 1$ pour tout $x \in] - \pi/2, \pi/2[$. La dérivée de la fonction

$$x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

sur $] - \pi/2, \pi/2[$ est

$$x \mapsto \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \geq 1$$

en utilisant la règle de calcul donnant la dérivée d'un quotient (cf. le cours de MISMI ou de Terminale).

– En déduire que $|\tan x| \geq |x|$ pour tout $x \in] - \pi/2, \pi/2[$. La fonction \tan est paire sur $] - \pi/2, \pi/2[$. Il suffit donc de prouver l'inégalité pour $x \in]0, \pi/2[$. D'après la formule des accroissements finis, on a, pour un certain $c_x \in]0, x[$,

$$\tan x - \tan 0 = \tan'(c_x)(x - 0) = x \tan'(c_x) \geq x.$$

On a donc $\tan x \geq x$ sur $]0, \pi/2[$. Par parité, on a $|\tan x| \geq |x|$ sur $] - \pi/2, \pi/2[$.

EXERCICE IV

Le but de l'exercice est de prouver la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de terme général

$$u_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}} \right) - n.$$

(1) Calculer, en exprimant l'expression dont on prend la limite comme une somme de Riemann,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \right).$$

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}}.$$

On reconnaît à droite une somme de Riemann pour la fonction

$$x \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

(la subdivision est ici régulière et de pas $1/n$). Comme le pas de la subdivision utilisée tend ici vers 0 lorsque n tend vers l'infini, il résulte du

théorème 3.3 du cours (sur la convergence des sommes de Riemann) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \right) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \left[2\sqrt{1+t} \right]_0^1 = 2(\sqrt{2} - 1).$$

- (2) Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour la fonction exponentielle entre $a = 0$ et $b = h > 0$ et en déduire :

$$\forall n \geq 1, \forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \left| e^{\frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \right| \leq \frac{e}{2n^2}.$$

La formule de Taylor-Lagrange demandée est :

$$\exp(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2} \exp c_h$$

(avec c_h entre 0 et h). puisque $\exp' = \exp$ sur \mathbb{R} et que $\exp(0) = 1$. On a donc, en prenant $h(n, k) = 1/\sqrt{n^2 + kn}$,

$$e^{\frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} = \frac{1}{2} \frac{1}{n^2 + kn} e^{c_{h(n,k)}} \leq \frac{e^{c_{h(n,k)}}}{2n^2}.$$

Comme $c_{h(n,k)} \in [0, h(n, k)] \subset [0, 1]$ et que la fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R} , donc sur $[0, 1]$, on a $e^{c_{h(n,k)}} \leq e^1 = e$. On a donc bien l'inégalité demandée.

- (3) Déduire des questions 1 et 2 que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et calculer sa limite. On a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}} - 1 \right).$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, puis en ajoutant les inégalités obtenues à la question 2 (pour $k = 0, \dots, n-1$), on trouve :

$$\left| u_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \right| \leq n \times \frac{e}{2n^2} = \frac{e}{2n}.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ a donc la même limite que la suite des sommes de Riemann introduite à la question 1. Elle est donc convergente vers $2(\sqrt{2} - 1)$ d'après le résultat établi à la question 1.

EXERCICE V

Soient $a < b$ deux nombres réels, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ deux fonctions continues.

- (1) Montrer si $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$, on a

$$m \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq M \int_a^b g(t) dt.$$

On a

$$\forall t \in [a, b], m g(t) \leq f(t) g(t) \leq M g(t).$$

En utilisant la monotonie de l'opération de prise d'intégrale de Riemann, on a bien l'inégalité demandée par intégration sur $[a, b]$ de l'inégalité ponctuelle précédente.

- (2) Dédurre de la question 1 qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt.$$

Si $\int_a^b g(t) dt = 0$, on a aussi $\int_a^b f(t)g(t) dt = 0$ d'après l'encadrement établi à la question précédente. Les deux membres de la formule que l'on demande d'établir sont nuls et l'on peut donc prendre pour c n'importe quel point de $[a, b]$. Si $\int_a^b g(t) dt > 0$, on a, d'après l'inégalité établie à la question 1 :

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt} \leq M.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires et ses conséquences (Théorème 2.1, puis Théorème 2.3 du cours), toute valeur entre m et M (incluses) est prise par f sur $[a, b]$. Il existe donc bien $c \in [a, b]$ réalisant la relation voulue.

- (3) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$I(\alpha) = \int_0^1 (1+t)^\alpha e^t dt.$$

Exprimer $I(\alpha + 1)$ en fonction de $I(\alpha)$ lorsque α est un nombre réel fixé. On utilise la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I(\alpha + 1) &= \int_0^1 (1+t)^{\alpha+1} e^t dt \\ &= \left[(1+t)^{\alpha+1} e^t \right]_0^1 - (\alpha + 1) \int_0^1 (1+t)^\alpha e^t dt \\ &= 2^{\alpha+1} e - 1 - (\alpha + 1) I(\alpha). \end{aligned}$$

- (4) Dédurre des questions 2 et 3 que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $c_\alpha \in [0, 1]$ tel que

$$I(\alpha)(2 + \alpha + c_\alpha) = 2^{\alpha+1} e - 1.$$

D'après le résultat établi à la question 2 (en prenant $f(t) = 1 + t$ et $g(t) = (1 + t)^\alpha e^t$), on voit qu'il existe $c_\alpha \in [0, 1]$ tel que

$$I(\alpha + 1) = (1 + c_\alpha) I(\alpha).$$

En reportant dans la formule établie à la question 3, on trouve donc

$$I(\alpha)(1 + c_\alpha + \alpha + 1) = 2^{\alpha+1} e - 1.$$

C'est la formule voulue.

Bibliographie

- [Eis] M. Eisermann, L'algorithme **Pagerank** de **Google** : une promenade sur la toile.
<http://www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/enseignement/google-promenade.pdf>
- [Lag] J.L. Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques*, seconde édition, Courcier, Paris, 1813.
<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2299441/f7>
- [MatL1] Mathématiques L1, Laurent Larazzini et Jean-Pierre Marco *ed.*, nouvelle édition + **eText**, Pearson Education, Paris, 2012.
- [MatToutenUn] Mathématiques Tout-en-Un pour la Licence, niveau L1, J.P. Ramis et A. Warusfel *ed.*, Dunod, Paris, 2006.
- [Scilab] **Scilab**, logiciel libre téléchargeable sur le site :
<http://www.scilab.org>
Voir en particulier le module lycées :
<http://www.scilab.org/fr/education/lycee>
- [Ymis] A. Yger, Mathématiques de base, Cours MISMI, 2007-2008.
<http://math.u-bordeaux1.fr/~yger/coursmismi.pdf>

Index

- Abel
 - procédé sommatoire de, 122
- accroissements finis
 - formule des, 50
 - formule généralisée des, 51
 - inégalité des, 52
- accumulation, point d', 16, 21
- addition
 - dans \mathbb{R} , 8
- adhérence
 - d'un sous-ensemble de \mathbb{R} , 25
 - valeur d', pour une suite, 13
- adjacentes
 - critère des suites, 12
 - suites, 12
- affine
 - application de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , 39
- algébrico-géométrique, suite, 6
- arc tangente
 - développement limité de la fonction, en $x_0 = 0$, 77
- archimédien, \mathbb{R} est, 9
- associativité
 - d'une opération, 9
- asymptotique
 - direction, d'une branche infinie d'une courbe plane, 86
- asymptote
 - oblique, 86
- Bernoulli
 - Johann, 54
- binôme
 - formule du, 71
 - formule généralisée du, 71
- binomial
 - coefficient, 71
 - coefficient, généralisé, 72
- Bolzano, Bernard, 16
- Bolzano-Weierstraß, théorème de
 - dans \mathbb{C} , 20
 - dans \mathbb{R} , 16
- Bonnet
 - Pierre, 120
- bornée (en valeur absolue), suite, 13
- bornés
 - type d'intervalles de \mathbb{R} , 28
- borne inférieure (inf)
 - d'un sous-ensemble minoré de \mathbb{R} , 4
- borne supérieure (sup)
 - d'un sous-ensemble majoré de \mathbb{R} , 4
- branche infinie
 - d'une courbe plane, 85
- Cantor, Georg, 17
- Cauchy
 - Augustin-Louis, 21
 - critère de, 21
 - critère de convergence de, 22
- Cauchy, suite de nombres complexes de, 21
- Cauchy-Schwarz
 - inégalité de, 103
- changement de variables
 - dans le calcul d'intégrale au sens de Riemann, 119
 - dans le calcul de primitive, 118
- Chasles
 - Michel, 105
 - relation de, 105
 - relation de, formulation algébrique, 116
- classe C^k
 - fonctions de, sur un intervalle ouvert de \mathbb{R} , 61
- commutativité
 - d'une opération, 9
- compact, de \mathbb{R} , 25
- comparaison
 - échelle de, 69
 - logarithme, puissances, exponentielle, 58
- composition
 - règle de, 48
- concave
 - fonction réelle, sur un intervalle ouvert, 45
- conique, 87
- continue
 - injective, fonction réelle, 35
- continuité

- d'une fonction en un point, 28
- d'une fonction sur un intervalle de \mathbb{R} , 28, 29
- d'une fonction sur un sous-ensemble A de \mathbb{R} , 29
- continuité uniforme, 37
 - module de, 37
- convergence
 - d'une suite de réels vers un réel, 6, 10
- convexe
 - fonction réelle, sur un intervalle ouvert, 45
 - sous-ensemble de \mathbb{R} , 28
- corps commutatif, 9
- critère
 - pour la limite d'une fonction en un point, 27
- croissante, fonction réelle, 30
- cuspidal ou cusp
 - point stationnaire, 81
- cycloïdales
 - courbes, 84
- Darboux
 - Gaston, 110
 - sommes de, d'une fonction réelle bornée sur un segment, 110
 - théorème de, 36
- DDI, 1
- décimal
 - développement illimité, 1
- décimales, 1
- décroissante, fonction réelle, 30
- demi-tangente
 - à droite, à gauche, 44
- dénombrable
 - \mathbb{R} n'est pas, 13
- dérivé
 - nombre, d'une fonction à valeurs complexes, en point $x_0 \in \mathbb{R}$, 39
- dérivée à gauche ou à droite
 - d'une fonction à valeurs complexes en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, 44
- dérivées
 - successives en un point, 60
- dérivés
 - nombres successifs, d'une fonction complexe en un point de \mathbb{R} , 60
- dérivabilité
 - d'une fonction à valeurs complexes sur un intervalle de \mathbb{R} , 47
 - d'une fonction à valeurs complexes, en un point x_0 de \mathbb{R} ,
- développement limité
 - d'un produit, 74
 - d'un quotient, 75
 - d'une somme, 74
 - de la composée de deux fonctions, 76
 - en $\pm\infty$, dans l'échelle des $x \mapsto 1/x^k$, $k \in \mathbb{N}$, 78
 - en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, dans l'échelle des fonctions puissance, 69
 - intégration terme-à-terme d'un, 77
- développements limités
 - opérations sur les, 73 39
- diagonal, procédé, 17
- dichotomie
 - algorithme de, 32
- difféomorphisme
 - de classe C^1 , entre deux segments de \mathbb{R} , 119
- différentiabilité
 - d'une fonction en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, 40
- différentiation
 - versus* intégration, 89
- différentielle
 - d'une fonction en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, 40
- discontinuité
 - de première espèce, de seconde espèce, 29
 - saut de, 31
- distributivité
 - d'une opération par rapport à une autre, 9
- divergente, suite, 10
- du Bois-Reymond
 - Paul-Gustav, 123
- Dürer, Albrecht, 84
- ellipse, 87
- emboîtés, propriété des segments, 11
- entière, partie, 1
- épicycloïde, 84
- équivalentes
 - fonctions complexes, au voisinage de $x_0 \in [-\infty, +\infty]$, 59
- escalier
 - fonction en, 89
- exponentielle, fonction
 - DL en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, 72
- extrémum
 - d'une fonction réelle continue sur un segment, 34
 - local, d'une fonction réelle, 49
- extraite, suite, 14
- fermé, de \mathbb{R} , 25
- Fibonacci
 - suite de, 6
- fixe
 - point, d'une fonction continue d'un segment de \mathbb{R} dans lui-même, 33
 - point, d'une fonction strictement contractante de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , 22
- fluxion, calcul fluxionnel, 39
- fonctions trigonométriques
 - développements limités des, 73

- gendarmes, lemme des, 11
- Goursat, Edouard, 54
- Heine
 - Eduard, 38
 - théorème de, 38
- Hölder
 - inégalité de, 103
 - Otto, 103
- hyperbole, branche d', 87
- hypocycloïde, 84
- hypotrocoïde, 84
- inflexion
 - point d', 83
- intégrable
 - fonction complexe sur un segment, au sens de Riemann, 104
 - fonction réelle sur un segment, au sens de Riemann, 93
- intégrale
 - d'une fonction en escalier sur un segment de \mathbb{R} , 91
- intégration
 - versus* différentiation, 89
- interpolation, 39
- intervalle
 - de \mathbb{R} , 28
 - fermé borné, de \mathbb{R} , 11
- inverse, fonction, 35
- Lagrange
 - Joseph-Louis, 63
 - polynôme d'interpolation de, 65
- Landau
 - Edmund, 57
 - notation de, pour les suites, 60
 - notations de, pour les fonctions, 57
- Leiniz
 - Gottfried Wilhelm, 48
- L'Hôpital
 - Guillaume-François, marquis de Saint Mesme, 54
 - règle de, 54
- limite
 - à droite, d'une fonction en un point, 27
 - à gauche, d'une fonction en un point, 27
 - d'une fonction f en un point adhérent à son domaine de définition, 26
 - inférieure, d'une suite de réels, 14
 - supérieure, d'une suite de réels, 14
- linéaire (\mathbb{R} -linéaire)
 - application de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , 39
- Liouville
 - classe de, 118
 - Joseph, 118
- logarithme, fonction
 - DL en un point $x_0 \in]0, +\infty[$, 72
- Machin
 - formule de, 12
 - John, 12
- maillage
 - d'un segment de \mathbb{R} , 89
- maximum (max)
 - d'un sous-ensemble majoré de \mathbb{R} , 4
 - d'une fonction réelle continue sur un segment, 34
- minimum, 4
- minimum (min)
 - d'un sous-ensemble minoré de \mathbb{R} , 4
 - d'une fonction réelle continue sur un segment, 34
- Minkowski
 - Hermann, 103
 - inégalité de, 103
- monotone
 - croissante ou décroissante, fonction réelle, 30, 36
 - fonction réelle strictement, 30, 35, 36
 - Riemann-intégrabilité d'une fonction, sur un segment, 101
- moyenne
 - première formule de la, 120
 - seconde formule de la, 121
 - valeur, d'une fonction en escalier sur un segment de \mathbb{R} , 91
- multiplication
 - dans \mathbb{R} , 9
- négligeable
 - fonction, devant une autre, au voisinage d'un point de $[-\infty, +\infty]$, 57
 - sous-ensemble de \mathbb{R} , 109
- nœud
 - d'un maillage, 89
- neutre, élément, 9
- non bornés
 - types d'intervalles de \mathbb{R} , 28
- non-stationnaire
 - point d'une courbe plane paramétrée, pour une valeur x_0 du paramètre, 79
- notation $f = O(g)$, 58
- notation $f = o(g)$, 57
- notation $f \underset{x_0}{\sim} g$, 59
- opérations sur \mathbb{R}
 - et prise de limite finie, 10
- ordinaire
 - point, 82
- ordre
 - du développement de Taylor avec reste intégral, 68
 - du développement de Taylor-Lagrange, 64
 - du développement de Taylor-Young, 62
- ordre supérieur

- dérivée ou nombre dérivé d', 60
- oscillation
 - d'une fonction réelle, en un point, 123
 - d'une fonction réelle, sur un intervalle ouvert de \mathbb{R} , 95
- ouvert
 - intervalle de \mathbb{R} , 28
- ouvert, de \mathbb{R} , 25
- pantographe, 85
- parabole, 87
- parabolique
 - direction, 86
- parties
 - formule d'intégration par, 117
 - formule d'intégration par, discrète, 122
- pas
 - d'un maillage, 89
- pavé
 - de \mathbb{R} , 28
- pavé fermé
 - de \mathbb{R} , 11
- point cuspidal ou cusp
 - de première espèce, 83
 - de seconde espèce, 84
- puissance, fonctions
 - échelle des, 69
 - DL en un point x_0 , 71
- puissances croissantes
 - algorithme de division des polynômes suivant les, 74
- rebroussement
 - de première espèce, 83
 - de seconde espèce, 84
- rectangles
 - approximation de l'intégrale d'une fonction continue par la méthode des, 98
- réglée
 - fonction réelle, sur un segment de \mathbb{R} , 95, 99
- régulier
 - maillage, 89
 - pas, 89
 - point d'une courbe plane paramétrée, pour une valeur x_0 du paramètre, 79
- reste intégral
 - formule de Taylor avec, 67
- Riemann
 - Bernhard, 93
 - caractérisation de l'intégrabilité au sens de, pour les fonctions complexes sur un segment, 109
 - critère d'intégrabilité, pour une fonction réelle sur un segment, 94
 - intégrable au sens de, fonction réelle sur un segment, 93
 - intégrale au sens de, fonction complexe sur un segment, 104
 - sommes de, d'une fonction complexe bornée sur un segment, 113
 - sommes de, d'une fonction continue sur un segment, 97
- Rolle
 - Michel, 48
 - théorème de, 48
- segment
 - de \mathbb{R} , 11, 28
- selle, point, 49
- semi-ouvert
 - intervalle de \mathbb{R} , 28
- séquentiel
 - critère pour la limite d'une fonction en un point, 26
- singulier
 - point d'une courbe plane paramétrée, pour une valeur x_0 du paramètre, 79
- spirographe, 84
- stéréographique, projection, 20
- stationnaire
 - point d'une courbe plane paramétrée, pour une valeur x_0 du paramètre, 79
- strictement monotone, fonction réelle, 30
- strophoïde droite, 87
- subdivision
 - d'un segment de \mathbb{R} , 89
- suite extraite, 14
- tangente
 - application affine, d'une fonction en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, 40
- tangente géométrique
 - à une courbe paramétrée en un point non-stationnaire, 78
 - à une courbe paramétrée en un point stationnaire, 79, 81
 - à une courbe paramétrée en un point tel que $f'(x_0) \neq 0$, 42
 - au graphe d'une fonction en un point, 41
- Taylor
 - Brook, 61
- Taylor, série de
 - partie principale à un ordre donné, 61
 - reste à un ordre donné, 61
- Taylor-Lagrange
 - formule de, 63
 - formule de, décentrée, 65
 - inégalité de, 66
- Taylor-Young
 - développement limité de, 70
 - formule de, 61
- tendre
 - vers $+\infty$, pour une suite de réels, 18
 - vers $-\infty$, pour une suite de réels, 18
- théorème fondamental de l'analyse, 67, 117

- trapèzes
 - approximation de l'intégrale d'une fonction continue par la méthode des, 98
- triangulaire, inégalité, 9
- TVI, 31
- uniforme
 - limite, d'une suite de fonctions en escalier, 95
- uniforme, continuité, 37
- unité, élément, 9
- valeurs intermédiaires
 - théorème des, 31
- variation, taux de
 - d'une fonction à valeurs complexes autour d'un nombre $x_0 \in \mathbb{R}$, 40
- Weierstraß, Karl, 16
- Young
 - William Henry, 61
- Zénon
 - paradoxe de, 7, 21

Exercice I

1. Questions de cours.

(a) Donner la définition d'une suite de Cauchy.

Corrigé. Une suite $(u_n)_n$ est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un entier naturel N_ε tel que $p \geq N_\varepsilon, q \geq N_\varepsilon, (p, q) \in \mathbb{N}$, implique $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$.

(b) Énoncer le critère (ou théorème) de Cauchy pour les suites numériques.

Corrigé. Une suite de nombres complexes est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

2. Montrer que la suite $n \mapsto u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ n'est pas une suite de Cauchy (considérer $u_{2n} - u_n$).

Corrigé. On a $u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \left(\frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}$, chaque terme de la somme étant $\geq \frac{1}{2n}$. Elle ne vérifie donc pas le critère de Cauchy.

3. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes vérifiant, pour tout entier n , $|u_{n+1} - u_n| \leq q^n$ avec $q \in [0, 1[$. Montrer que cette suite converge.

Corrigé. Supposons que n et m sont deux entiers naturels tels que $m \geq n$. Alors, en écrivant $u_m - u_n = u_m - u_{m-1} + u_{m-1} - u_{m-2} + \dots + u_{n+1} - u_n$, il vient $|u_m - u_n| \leq \sum_{k=1}^{m-n} |u_{n+k} - u_{n+k-1}| \leq \sum_{k=1}^{m-n} q^{n+k} = q^n \sum_{k=0}^{m-n} q^k = q^n \frac{1-q^{m-n+1}}{1-q} \leq \frac{q^n}{1-q}$. Si $\varepsilon > 0$ est donné, puisque $q < 1$, il existe n tel que $\frac{q^n}{1-q} \leq \varepsilon$, ce qui montre que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy donc converge.

Exercice II

1. Donner le développement limité à l'origine, à l'ordre n , de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{(\cos x) - (1-x^2/2)}{x^3}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. En déduire la tangente, et la position par rapport à celle-ci, à l'origine, de la courbe d'équation $y = f(x)$.

Corrigé. Le développement limité de $\cos x$ à l'origine est $\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Par suite, $\cos x - (1 - x^2/2) = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$, et il vient $f(x) = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k x^{2k-3}}{(2k)!} + x^{2n-2} \varepsilon(x)$. On a donc $f(x) = \frac{x}{4!} - \frac{x^3}{6!} + x^4 \varepsilon(x)$, ce qui montre que la droite d'équation $y = \frac{x}{4!}$ est tangente à la courbe à l'origine, et que, pour x assez petit, la courbe est au dessous de sa tangente si $x > 0$ et au dessus sinon.

2. Étudier les branches infinies de la courbe d'équation $y = (x-2)e^{1/x}$. On déterminera les éventuelles asymptotes et la position de la courbe par rapport à celles-ci.

Corrigé. Cette courbe a une branche infinie lorsque x tends vers $\pm\infty$ et lorsque x tends vers 0 par valeurs supérieures. Lorsque x tends vers 0, $x > 0$, y tends vers $-\infty$ et la courbe admet la demi-droite $x = 0$, $y < 0$, comme asymptote ; de plus la courbe se trouve à droite de son asymptote.

Étudions maintenant les branches lorsque x tends vers $\pm\infty$. Le développement limité de l'exponentielle donne $y = (x - 2) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon \left(\frac{1}{x} \right) \right)$, avec $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$. On a donc $y = x - 1 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon \left(\frac{1}{x} \right)$. Ceci montre que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, et que la courbe est au dessous de l'asymptote si $x \rightarrow +\infty$ et au dessus sinon.

Exercice III

1. *Questions de cours.*

(a) Soit A une partie de \mathbb{R} et f une fonction de A dans \mathbb{C} . Que signifie « f est uniformément continue » ?

Corrigé. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, $(x, y) \in A \times A$, $|x - y| \leq \eta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

(b) Toute fonction continue f définie sur un intervalle de \mathbb{R} est-elle uniformément continue ? Justifier la réponse par un exemple, et énoncer un théorème donnant une condition suffisante pour l'uniforme continuité d'une telle fonction.

Corrigé. Non : la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, 1]$ mais n'est pas uniformément continue sur cet intervalle. Un théorème du cours dit que toute fonction continue sur un **segment** est uniformément continue.

Soit f une fonction réelle uniformément continue sur $[0, +\infty[$. Soit $\delta > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq 1$. Soit $x > 0$ fixé.

2. Vérifier qu'il existe un unique entier n_x tel que $\frac{x}{\delta} \leq n_x < \frac{x}{\delta} + 1$.

Corrigé. Tout intervalle semi-ouvert $]a, b]$ ou $[a, b[$ de longueur 1 contient exactement un entier.

3. En écrivant $f(x) - f(0) = \sum_{k=0}^{n_x-1} \left(f \left(\frac{(k+1)x}{n_x} \right) - f \left(\frac{kx}{n_x} \right) \right)$, montrer que $|f(x) - f(0)| \leq \frac{x}{\delta} + 1$.

Corrigé. Comme $\left| \frac{(k+1)x}{n_x} - \frac{kx}{n_x} \right| = \frac{x}{n_x} \leq \delta$, on a $\left| f \left(\frac{(k+1)x}{n_x} \right) - f \left(\frac{kx}{n_x} \right) \right| \leq 1$, et la formule donne $|f(x) - f(0)| \leq n_x \leq \frac{x}{\delta} + 1$.

4. En déduire qu'il existe deux constantes $a > 0$ et $b > 0$ telles que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $|f(x)| \leq ax + b$.

Corrigé. La question précédente donne $|f(x)| \leq \frac{x}{\delta} + 1 + |f(0)|$, et on peut prendre $a = \frac{1}{\delta}$ et $b = 1 + |f(0)|$.

5. La fonction exponentielle est-elle uniformément continue sur $[0, +\infty[$?

Corrigé. Non car elle ne vérifie pas la conclusion de la question précédente (comparaison exponentielle et polynôme).

6. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est-elle uniformément continue sur $[0, +\infty[$?

Corrigé. La dérivée de cette fonction est $\frac{1}{1+x}$. Elle est donc majorée par 1 sur $[0, +\infty[$. Le théorème des accroissements finis donne alors, pour $(x, y) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[$, $|\ln(1+x) - \ln(1+y)| \leq |x - y|$ ce qui montre que $x \mapsto \ln(1+x)$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice IV

1. *Questions de cours.* Soit f une fonction Riemann-intégrable sur un segment $[a, b]$.

(a) Que peut-on dire de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$?

Corrigé. Cette fonction est continue sur $[a, b]$.

(b) Donner une condition suffisante portant sur f pour que la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ soit dérivable en un point x_0 . Que vaut alors cette dérivée ?

Corrigé. Cette fonction est dérivable en x_0 si f est continue en ce point et sa dérivée vaut $f(x_0)$.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+ =]0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$.

L'objectif de l'exercice est d'étudier la fonction F que l'on ne cherchera pas à calculer.

2. Étudier le signe, la continuité et la dérivabilité de la fonction F .

Corrigé. Si $x \geq 1$, $\frac{\ln t}{1+t} \geq 0$ sur $[1, x]$ et $F(x) \geq 0$. Si $0 < x < 1$, $\frac{\ln t}{1+t} \leq 0$ sur $[x, 1]$ et $F(x) = -\int_x^1 \frac{\ln t}{1+t} dt \geq 0$. Comme $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, F est dérivable sur cet intervalle.

3. *Que vaut $F'(x)$?*

Corrigé. $F'(x) = \frac{\ln x}{1+x}$.

4. (a) *Question de cours. Énoncer, pour une fonction h , la formule de Taylor-Young en un point x_0 à l'ordre $p+1$, en précisant les hypothèses sur h .*

Corrigé. Soit h une fonction de classe \mathcal{C}^p définie sur un intervalle $[a, b]$ et $x_0 \in]a, b[$. On suppose que $f^{(p)}$ est dérivable au point x_0 . Alors, pour $x \in [a, b]$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + (x-x_0)^{p+1} \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

(b) *Donner le développement limité à l'ordre 3 de F au point 1.*

Corrigé. Un calcul direct donne $F(1) = 0$, $F'(1) = 0$, $F''(1) = 1/2$ et $F^{(3)}(1) = -1$. Le développement limité est donc

$$F(x) = \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3 \varepsilon(x).$$

5. Soit $\varphi(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$, $t > 0$. En utilisant une intégration par parties, montrer que, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = (\ln x)(\ln(1+x)) - \int_1^x \varphi(t) dt.$$

Corrigé. Immédiat avec $u = \ln x$ et $v = \ln(1+x)$.

6. *En déduire que F est prolongeable par continuité en 0.*

Corrigé. Lorsque $x \rightarrow 0$, $\ln(1+x)$ est équivalent à x , et, par suite $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)(\ln(1+x)) = 0$. Pour la même raison, la fonction φ se prolonge par continuité au segment $[0, 1]$, ce qui implique que $x \mapsto \int_1^x \varphi(t) dt$ est continue sur $[0, 1]$ (Première question de cours). Ainsi F se prolonge en 0 par $F(0) = -\int_0^1 \varphi(t) dt$.

7. *En utilisant un changement de variables montrer que, pour $x > 0$, $F(1/x) = \int_1^x \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \right) \ln u du$.*

Corrigé. Il suffit de poser $t = \frac{1}{u}$ dans $F(1/x) = \int_1^{1/x} \frac{\ln t}{1+t} dt$: $F(1/x) = \int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)} du$.

8. *En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{\ln^2 x} = 1/2$.*

Corrigé. Le résultat de la question précédente s'écrit $F(x) = -F(1/x) + \int_1^x \frac{\ln u}{u} du = -F(1/x) + \frac{1}{2} (\ln x)^2$, d'où le résultat en vertu de la question 5.

9. On pose $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln t dt$, $k \in \mathbb{N}$.

(a) *En utilisant le développement limité à l'ordre n de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ montrer que*

$$F(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k(x) + \int_1^x \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1} \ln t}{1+t} dt.$$

Corrigé. Le développement limité à l'ordre n de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est $\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k + \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$, d'où la formule.

(b) *En calculant $I_k(x)$, en déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, $\left| F(0) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \right| \leq \int_0^1 t^{n+1} \ln(1/t) dt$.*

Corrigé. En intégrant par parties, il vient $I_k(x) = \frac{x^{k+1} \ln x}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^2}$, d'où

$$F(0) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1} \ln t}{1+t} dt,$$

ce qui donne le résultat puisque $\left| \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1} \ln t}{1+t} \right| \leq t^{n+1} \ln(1/t)$.

(c) Conclure que $F(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_1^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

Corrigé. La fonction $t \mapsto t \ln t$ se prolonge par continuité au segment $[0, 1]$. Par un théorème du cours elle y est donc bornée par une constante $M > 0$. La question précédente donne donc $\left| F(0) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \right| \leq M \int_0^1 t^n dt = \frac{M}{n+1}$, ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| F(0) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \right| = 0$.

Exercice V

1. Question de cours.

(a) Donner la définition d'une subdivision d'un segment $[a, b]$ et, pour une fonction f définie sur $[a, b]$, d'une somme de Riemann de f associée à cette subdivision.

Corrigé. On appelle subdivision du segment $[a, b]$ une suite finie $\mathcal{S} = (a_i)_{i=0}^n$ de points de $[a, b]$ telle que $a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$. On appelle somme de Riemann de f associée à la subdivision \mathcal{S} toute somme de la forme $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)(a_{i+1} - a_i)$ où $z_i \in [a_i, a_{i+1}]$.

(b) Énoncer le théorème reliant les sommes de Riemann d'une fonction intégrable sur un segment $[a, b]$ et son intégrale.

Corrigé. Le théorème dit que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute subdivision \mathcal{S} de pas $\leq \delta$, toute somme de Riemann σ de f associée à \mathcal{S} vérifie $\left| \sigma - \int_{[a,b]} f \right| \leq \varepsilon$.

2. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ en en déduire que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} - \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n \frac{k(n-k)}{n^2} \leq \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}.$$

Corrigé. La formule des accroissements finis donne $\ln(1+x) = x \frac{1}{1+c}$ avec $c \in]0, x[$ ce qui donne $\ln(1+x) \leq x$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} \frac{1}{(1+c)^2}$ avec $c \in]0, x[$ d'où on tire $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

On obtient alors les inégalités demandées en appliquant cette inégalité aux points $x = \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$ et en additionnant les inégalités obtenues.

3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k(n-k)}{n^2} = \int_0^1 x(1-x) dx$.

Corrigé. En effet, $\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)}$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k(n-k)}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)$ et il suffit d'appliquer le théorème sur les sommes de Riemann.

4. En admettant que $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \pi/8$, en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{n-1}}{n^2} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{2(n-2)}}{n^2} \right) \dots \left(1 + \frac{\sqrt{(n-2)2}}{n^2} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{(n-1)}}{n^2} \right) = e^{\pi/8}.$$

Corrigé. En effet, la question précédente montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} = \pi/8$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n \frac{k(n-k)}{n^2} = 0$, et la question 2. donne alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right) = \pi/8$, et il suffit alors de prendre l'exponentielle de $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right)$.

FIN