Séries Gevrey de type Arithmétique
Transcendance sans transcendance
– une ou plusieurs variables –
(d'après Yves André, Lucia di Vizio, ...)

Alain Yger

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ BORDEAUX 1, TALENCE 33405, FRANCE

E-mail address: Alain.Yger@math.u-bordeaux1.fr

Version du 26 avril 2013.

RÉSUMÉ. Ces exposés constituent une présentation des deux papiers d'Yves André [**And1**], [**And2**], en relation avec la théorie des $\mathcal{D}$-modules et des questions liées à l'algèbre et la géométrie algébrique des exponentielles polynômes à coefficients et fréquences algébriques en plusieurs variables. Parallèlement aux filtrations par le degré (conduisant en théorie des $\mathbb{C}\langle X, \partial/\partial X\rangle$-modules à des résultats impliquant l'holonomie tels le théorème de Bernstein-Sato), il s'agit dans cette présentation ≪ piétonne ≫ (et la plus ≪ self-contained ≫ que possible) des articles d'Y. André et (puis de L. di Vizio [**LdV**]) de voir comment l'introduction de contrôle au niveau de la ≪ taille ≫ conduit (en général par des méthodes fondées sur la méthode de Siegel) à mettre en évidence des phénomènes de ≪ rigidité ≫ échappant au cadres simplement algébrique ou géométrique.

Table des matières

CHAPITRE 1

Les outils et les résultats

Ce premier exposé vise à présenter (et à situer) les trois théorèmes essentiels de [**And1**] (*pureté en* 0, *pureté en* ∞ ou *dualité* dans le contexte Gevrey Arithmétique non nul, *permanence* dans le contexte Gevrey Arithmétique 0), en même temps qu'à introduire les divers outils nécessaires (G-fonctions, G et E-opérateurs, polygones de Newton-Ramis, pentes et facteurs déterminants,...) L'articulation essentielle que constituent celle entre les théorèmes de D. et G. Chudnovsky et de N. Katz (encore dans le contexte Gevrey Arithmétique 0, qui, lui, passe partiellement au cadre multivariables [**LdV**]) sera également énoncée. On introduira les classes Gevrey ainsi que quelques rappels sur les procédés de $1/s$-resommation (Borel-Mittag-Leffler) et le théorème de Fabry-Hurukura-Turritin (dont nous aurons besoin). On s'inspirera aussi de l'exemple des fonctions hypergéométriques suivant l'approche de Horn, exemple en adéquation avec l'approche Gevrey Arithmétique proposée ici.

1.1. Séries Gevrey, classe de Nilsson-Gevrey d'ordre réel

1.1.1. Classes Gevrey $\mathbb{C}[[z]]_s$ en une variable ($s \in \mathbb{R}$) ; spécificité du cas $s = p/q \in \mathbb{Q}$. Une série entière en une variable $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ est dite *série de Gevrey d'ordre* $s \in \mathbb{R}$ si et seulement si la série

$$y(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{(k!)^s} z^k$$

possède un rayon de convergence $R > 0$. On note cette classe pour l'instant $\mathbb{C}[[z]]_s$ (on suit ici les notations utilisées par exemple dans [**Ram1**]).

Plus tard, nous serons amenés à nous restreindre en fait au cas $s \in \mathbb{Q}$ (au lieu simplement de s réel), car notre principal objectif sera d'envisager les choses sous l'angle <u>arithmétique</u>. Ce seront en effet les séries entières à coefficients algébriques (dans $\overline{\mathbb{Q}}$, ou dans un corps de nombres spécifié $\mathbb{K}$) sur lesquelles nous nous focaliserons, en leur attachant une hauteur logarithmique (pour introduire par exemple, dans le contexte $s = 0$, les G-fonctions, les G et E-opérateurs différentiels, plus généralement les G-modules différentiels holonomes, *etc.*). Cette propriété d'<u>algébricité</u> des coefficients se trouvera alors préservée (au moins partiellement [1]) lorsque l'on remplacera la série formelle

$$f = \sum_{k\geq 0} a_k\, z^k \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]] \text{ ou } \mathbb{K}[[z]],$$

1. Il y aura bien sûr un problème avec la transcendance de valeurs de la fonction Γ aux points rationnels, mais l'essentiel tiendra de fait au caractère arithmétique de l'équation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, ainsi que de la formule des compléments $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$.

par les séries formelles

$$\sum_{k\geq 0}\frac{a_k}{(k!)^s}z^k\ (s\in\mathbb{Q}),\quad \sum_{k\geq 0}a_k\,\Gamma(1-sk)\,z^k\ (s\in\mathbb{Q}^-),\quad \sum_{k\geq 0}\frac{a_k}{\Gamma(1+sk)}\,z^k\ (s\in\mathbb{Q})$$

(images de la série formelle originelle par les *transformations de Mittag-Leffler formelles* $\widehat{\mathscr{M}_{1/s}}$) ou les séries formelles

$$\sum_{k\geq 0}\frac{a_{k+1}}{(k!)^s}\,z^k\ (s\in\mathbb{R}),\quad \sum_{k\geq 0}a_{k+1}\,\Gamma(1-sk)\,z^k\ (s\in\mathbb{Q}^-),\quad \sum_{k\geq 0}\frac{a_{k+1}}{\Gamma(1+sk)}\,z^k\ (s\in\mathbb{Q})$$

(images de la série formelle originelle par *les transformations de Borel formelles* $\widehat{\mathscr{B}}_{1/s}$).
De fait, envisager des ordres rationnels $s=p/q$ permet dans bien des cas (ce qui sera souvent commode) de ramener les problèmes aux cas des seuls trois ordres $s=0$, $s=1$, $s=-1$. En effet, si $|p|$ est un entier non nul, l'opération $\phi_{|p|}\ : f(z)\mapsto f(z^{|p|})$ échange $\mathbb{C}\{z\}_s$ et $\mathbb{C}\{z\}_{s/|p|}$, c'est-à dire

$$f\in\mathbb{C}\{z\}_s\Longleftrightarrow \phi_{|p|}(f)\in\mathbb{C}\{z\}_{s/|p|},\tag{1.1}$$

tandis que, étant donnés deux entiers $0\leq r\leq q-1$ ($q\in\mathbb{N}^*$), les opérations en quelque sorte « duales » (prises en bloc)

$$\psi_{r/q}:\ \sum_{k\geq 0}a_kz^k\longmapsto\sum_{k\geq 0}a_{qk+r}\,z^k,\ r=0,...,q-1,$$

permettent d'échanger $\mathbb{C}\{z\}_s$ et $\mathbb{C}\{z\}_{qs}$ au sens suivant :

$$f\in\mathbb{C}\{z\}_s\Longleftrightarrow\Big(\forall\, r=0,...,q-1,\ \psi_{r/q}(f)\in\mathbb{C}\{z\}_{sq}\Big).\tag{1.2}$$

Il résulte de (1.1) et (1.2) que l'on a, si $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$, l'équivalence :
(1.3)

$$f(z)=\sum_{k\geq 0}a_k\,z^k\in\mathbb{C}\{z\}_{p/q}\Longleftrightarrow\Big(\forall\, r=0,...,q-1,\ \sum_{k\geq 0}a_{kq+r}z^{k|p|}\in\mathbb{C}\{z\}_{\epsilon(p/q)}\Big)$$

si ϵ désigne la fonction signe.

1.1.2. Le cas $s<0$; le passage de $(0,s)$ à $(\infty,-s)$ *via* la transformation de Laplace $\mathscr{L}$. Lorsque $s<0$, dire qu'une série formelle $\sum_{k\geq 0}a_kz^k$ appartient à $\mathbb{C}[[z]]_s$ équivaut à dire que sa somme $z\mapsto\sum_{k\geq 0}a_kz^k$ définit une fonction entière F telle que

$$\exists B>0,\ |F(z)|=O(e^{B|z|^{-1/s}})\quad\forall\, z\in\mathbb{C},$$

c'est-à-dire un élément de l'algèbre de fonctions entières à poids radial $A_{|z|^{-1/s}}(\mathbb{C})$.
En particulier, si $s=-1$, la classe $\mathbb{C}[[z]]_{-1}$ s'identifie à la classe des fonctions entières F de type exponentiel, donc (de part l'isomorphisme réalisé par la *transformation de Fourier-Borel* $T\in H'(\mathbb{C})\leftrightarrow(z\mapsto\langle T(\zeta),e^{\zeta z}\rangle)$), à la classe des fonctionnelles analytiques : dire que $f=\sum_{k\geq 0}a_kz^k\in\mathbb{C}[[z]]_{-1}$ équivaut donc à dire qu'il existe une fonctionnelle analytique $T\in H'(\mathbb{C})=A_{|z|}(\mathbb{C})$ telle que $a_k=\langle T_f,\zeta^k\rangle/k!$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Si K désigne le plus petit porteur holomorphiquement convexe de cette fonctionnelle analytique T_f (voir par exemple [**BG2**], Theorem 1.3.5), la

fonction entière $F(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ est précisément alors la transformée de Fourier-Borel de T_f, et sa transformée de Laplace

$$\mathscr{L}\Big[\sum_{k\geq 0} a_k z^k\Big] \ : z \mapsto \int_0^\infty e^{-tz}\, F(t)\, dt$$

(définie et holomorphe dans un demi-plan $\mathrm{Re}\, z > R$ avec pourvu que $K \subset D(0, R)$) se prolonge en une fonction holomorphe dans le complémentaire du porteur K. On note que pour z dans le demi-plan $\mathrm{Re}\, z > R$, on a

$$\mathscr{L}\Big[\sum_{k\geq 0} a_k z^k\Big](z) = \sum_{k\geq 0} \frac{k!\, a_k}{z^{k+1}} = \sum_{k\geq 0} \frac{a_k\, \Gamma(1+k)}{z^{k+1}} = \frac{1}{z} \sum_{k\geq 0} \frac{a_k\, \Gamma(1+k)}{z^k} \tag{1.4}$$

et que la série formelle $\sum_{k\geq 0} \Gamma(1+k)\, a_k\, z^{-k}$ ainsi obtenue (transformée de la série originelle $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ par la transformation du type Mittag-Leffler

$$\sum_{k\geq 0} a_k z^k \mapsto \sum_{k\geq 0} a_k\, \Gamma(k+1)\, z^k,$$

suivie de la substitution $z \to 1/z$) est cette fois dans $\mathbb{C}[[1/z]]_1$.

Plus généralement, lorsque $s < 0$, étant donné un élément $f = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ de $\mathbb{C}[[z]]_s$, on peut lui attacher la fonction entière $F(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ (appartenant cette fois à l'algèbre à poids $A_{|z|^{-1/s}}(\mathbb{C})$). On introduit ensuite l'opérateur de ramification $\rho_{-s} : z \to z^{-s}$ sur la surface de Riemann du logarithme et la fonction multiforme

$$F \ : z \mapsto F(z^{-s}) = F \circ \rho_{-s}(z),$$

définie sur cette même surface de Riemann. La relation formelle

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k\, \Gamma(1-sk)}{z^{-sk+1}} &= \int_0^\infty F(\rho_{-s}(t))\, e^{-tz}\, dt = \int_0^\infty \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, t^{-sk}\Big)\, e^{-tz}\, dt \\ &= -\frac{1}{s} \int_0^\infty \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, u^k\Big)\, e^{-u^{-1/s} z}\, u^{-1/s-1}\, du \end{aligned} \tag{1.5}$$

permet, par le biais formel de la transformation de Laplace $\mathscr{L}$, suivie de l'opération de ramification inverse $\rho_{-1/s}$, de transformer la série formelle $\sum_{k\geq 0} a_k\, z^k \in \mathbb{C}[[z]]_s$ en la série de Puiseux formelle $z^{1/s} \sum_{k\geq 0} a_k\, \Gamma(1-sk)\, z^{-k}$ qui fait surgir un élément de $\mathbb{C}[[1/z]]_{-s}$. On voit ainsi comment la transformation de Laplace $\mathscr{L}$ opère un échange entre $(0, s)$ et $(\infty, -s)$.

1.1.3. Le cas $s > 0$ et la $1/s$-resommation de Borel ou Mittag-Leffler. Si $f \in \mathbb{C}[[z]]_s$ pour $s > 0$, la série $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ ne converge évidemment plus (il n'y a plus sommabilité), mais par contre sa transformée de Borel formelle définit, elle, une série entière de rayon de convergence strictement positif. Cette transformée de Borel formelle $\widehat{\mathscr{B}}_{1/s}[f]$ se déduit en effet de la transformée de Borel formelle classique $\widehat{\mathscr{B}} = \widehat{\mathscr{B}}_1$ par

$$\widehat{\mathscr{B}}_{1/s}(f) = (\rho_{1/s} \circ \widehat{\mathscr{B}} \circ \rho_s)(f)$$

(ρ_s désignant l'opérateur de ramification consistant à remplacer formellement z par z^s, une fois que l'on s'est placé sur la surface de Riemann du logarithme). On a donc :

$$\widehat{\mathscr{B}}_{1/s}\Big(\sum_{k\geq 0} a_k z^k\Big) = \sum_{k\geq 0} \frac{a_{k+1}}{\Gamma(1+sk)}\, z^k. \tag{1.6}$$

La série formelle $f = \sum_{k\geq 0} a_k z^k \in \mathbb{C}[[z]]_s$ est alors dite $1/s$-sommable dans une direction donnée θ du plan complexe (voir par exemple la section 2.3 de [**Ram1**]) si et seulement si la somme de la série $\widehat{\mathscr{B}}_{1/s}(f)$ (holomorphe *a priori* dans un disque de centre 0 et de rayon strictement positif par hypothèses puisque $f \in \mathbb{C}[[z]]_s$) se prolonge en une fonction holomorphe et de croissance en $O(e^{B|z|^{1/s}})$ dans un secteur ouvert d'ouverture strictement inférieure à π bissecté par la demi-droite issue de l'origine et de direction θ. La somme de la série divergente f, resommée cette fois précisément dans une telle direction θ, est alors définie par

$$\mathrm{Resom}_\theta[f](z) := \rho_{1/s}\Big[\frac{1}{s}\int_\theta \widehat{\mathscr{B}}_{1/s}(f)(u)\, e^{-u^{1/s}/z}\, u^{1/s-1}\, du\Big](z). \tag{1.7}$$

Il faut noter que l'expression

$$\rho_{1/s}\Big[\frac{1}{s}\int_\theta \widehat{\mathscr{B}}_{1/s}(f)(u)\, e^{-u^{1/s}/z}\, u^{1/s-1}\, du\Big](z)$$

figurant au membre de droite de (1.7) n'est pas, elle, formelle. Elle induit de fait un développement asymptotique en $1/z$ à l'origine lorsque l'on se rapproche de 0 précisément dans cette direction θ. Ce qui reste ici formel est la manipulation formelle des séries et de la transformation de Laplace conduisant à la formule (1.7). On notera l'analogie du membre de droite de (1.7) avec celui du membre de droite de (1.5) (lorsque cette fois $s > 0$ au lieu de $s < 0$ comme dans la sous-section précédente) lorsque la demi-droite θ se trouve spécifiée être la demi-droite $[0, +\infty[$ du plan. Ainsi, formellement, on retrouve

$$a_0 + \mathrm{Resom}_\theta[f](z) = a_0 + \sum_{k\geq 0} a_{k+1}\, z^{k+1} = f(z).$$

On constate ainsi que, si $f \in \mathbb{C}[[z]]_s$ se trouve être $1/s$-sommable dans une direction θ du plan, sa transformée de Borel $\widehat{\mathscr{B}}_{1/s}[f][z]$ se trouve être en relation *via* encore une transformation du type Laplace $\mathscr{L}_\theta$ avec la série $\mathrm{Resom}_\theta[f](1/z)$. Cette transformée de Borel $\widehat{\mathscr{B}}_{1/s}[f][z]$ n'est certes pas dans $\mathbb{C}[[z]]_{-s}$ puisque la série $\sum_{k\geq 0} a_k\, z^k$ n'a pas *a priori* de rayon de convergence non nul, mais peut néanmoins être dans ce cas resommée en $\mathrm{Resom}_\theta[f]$, ce que l'on peut voir comme une « parade » au fait que la série originelle soit divergente (et ait en général dans pareil cas un rayon de convergence nul). Comme dans le cas $s < 0$, on constate encore que dans le cas $s > 0$, la transformation de Laplace opère une dualité entre les paires $(0, s)$ et $(\infty, -s)$, pourvu que l'on fasse entrer en jeu le processus de $1/s$-resommation. Ces remarques (autant dans le cas $s < 0$ étudié précédemment que dans le cas $s > 0$) nous permettrons de mieux situer intuitivement l'énoncé à venir de ce qui sera dans le cadre arithmétique le théorème de dualité d'Y. André (théorème 1.8 plus loin).

1.1.4. Le cas Gevrey multi-variables (de multi-ordre $s \in \mathbb{R}^n$). On peut aussi envisager le cadre de séries entières en n variables (et remplacer s par un multi-ordre $(s_1, ..., s_n) \in \mathbb{R}^n$). Une série formelle $\sum_{n\geq 0} a_k z^k$ est dite *Gevrey de* *multi-ordre* $(s_1, ..., s_n) \in \mathbb{R}^n$ si la série entière

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{a_k}{\prod\limits_{l=1}^{n} (k_l!)^{s_l}} z^k$$

a un multi-rayon de convergence $(R_1, ..., R_n)$, avec $R_l > 0$ pour tout $l = 1, ..., n$. Ceci s'exprime aussi, lorsque $(s_1, ..., s_n) \in]0, \infty[^n$, par :

$$\exists\, r_1 > 0, ...,\ \exists r_n > 0,\ \exists C > 0,\ \text{t.q. } \forall\, k \in \mathbb{N}^n,\ |a_k| \leq C r^k \prod_{l=1}^{n} \Gamma(1 + s_l k_l).$$

En particulier, les transformations de Mittag-Leffler ou de Borel formelles

$$\begin{aligned}
&\sum_{k_1 \geq 0} \cdots \sum_{k_n \geq 0} a_k\, z^k \longmapsto \sum_{k_1 \geq 0} \cdots \sum_{k_n \geq 0} \frac{a_k}{\prod_1^k (k_l!)^{s_l}}\, z^k \\
&\sum_{k_1 \geq 0} \cdots \sum_{k_n \geq 0} a_k\, z^k \longmapsto \sum_{k_1 \geq 0} \cdots \sum_{k_n \geq 0} \frac{a_k}{\prod_1^k \Gamma(1 + s_l k)}\, z^k \\
&\sum_{k_1 \geq 0} \cdots \sum_{k_n \geq 0} a_k\, z^k \longmapsto \sum_{k_1 \geq 0} \cdots \sum_{k_n \geq 0} \frac{a_{k+e_{l'}}}{\prod_1^k (k_l!)^{s_l}}\, z^k,\ l' = 1, ..., n, \\
&\sum_{k_1 \geq 0} \cdots \sum_{k_n \geq 0} a_k\, z^k \longmapsto \sum_{k_1 \geq 0} \cdots \sum_{k_n \geq 0} \frac{a_{k+e_{l'}}}{\prod_1^k \Gamma(1 + s_l k)}\, z^k, \quad l' = 1, ..., n,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$((e_1, ..., e_n)$ désignant la base canonique de $\mathbb{R}^n)$. On verra plus loin (section (1.2) ci-dessous) pourquoi les séries hypergéométriques (suivant le point de vue de Horn) illustrent bien cette notion de série Gevrey d'ordre (*resp.* multi-ordre) réel (*resp.* dans $\mathbb{R}^n$) prescrit. De fait, il conviendrait même plutôt d'introduire une notion Gevrey $\mathbb{C}\{z\}_S$ relativement à un réseau S de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{Q}^n$ pour respecter le contexte arithmétique), auquel cas le passage de $s \in \mathbb{R}^*$ à $1/s$ en dimension 1 se trouverait remplacé cette fois par la prise de réseau dual $S \mapsto S^*$; le choix pour S du réseau construit sur la base canonique ne serait alors qu'un cas particulier de ce modèle plus général.

1.1.5. Les classes de Nilsson-Gevrey d'ordre $s \in \mathbb{R}$ prescrit. La notion de série de Gevrey d'ordre $s \in \mathbb{R}$ est ensuite étendue en une classe plus générale (on verra dans la section suivante que c'est l'exemple des séries formelles en une ou plusieurs variables, vues comme solutions de systèmes différentiels hypergéométriques holonomes, qui motive l'introduction de cette classe), la *classe de Nilsson Gevrey-d'ordre s* (en une variable) ou la *classe de Nilsson-Gevrey de multi-ordre* $(s_1, ..., s_n) \in \mathbb{R}^n$ (en n variables). On note dans tous les cas cette classe $\mathrm{NG}\{z\}_s$.

Dans le cas $n = 1$, il s'agit de la classe dont les éléments sont les combinaisons linéaires finies (à coefficients complexes) des expressions formelles

$$z^\alpha\, (\log z)^\nu\, y_{\alpha,\nu}(z),$$

où α désigne un nombre complexe, ν un entier naturel, et y une série de Gevrey d'ordre s. Lorsque l'on évoque la convergence d'une telle série Nilsson-Gevrey d'ordre $s \in \mathbb{R}$, il faut l'envisager évidemment sous l'angle multiforme.

Dans le cas particulier où $s = p/q$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, notons qu'il résulte de (1.3) que l'on a l'équivalence :

$$y(z) \in \mathrm{NG}\{z\}_{p/q} \Longleftrightarrow y(z^{|p/q|}) \in \mathrm{NG}\{z\}_{\epsilon(p/q)}. \tag{1.9}$$

L'extension au cadre de plusieurs variables est immédiate (le multi-ordre $(s_1, ..., s_n)$ remplace alors l'ordre et l'on prend $\alpha \in \mathbb{C}^n$, $\nu \in \mathbb{N}^n$). Pour une expression du type

$$z^\alpha y_\alpha(z),$$

où y est une série de Gevrey d'ordre s (ou de multi-ordre $(s_1, ..., s_n)$) on parle de *série de Puiseux-Gevrey d'ordre* s (ou de multi-ordre $(s_1, ..., s_n)$).

1.2. L'exemple des séries hypergéométriques

Les séries hypergéométriques constituant le modèle le plus évident mettant en situation les classes de Gevrey ou de Nilsson-Gevrey d'ordre $s \in \mathbb{R}$ précisé, nous en rappelerons ici la présentation issue de l'approche développée par Horn en 1885 dans [**Horn**]. La présentation moderne dont on s'inspire ici est issue de [**GKZ**] et bien résumée (pour l'essentiel de nos besoins) par exemple dans [**PST**]. Nous profitons de cet exemple pour faire une brève incursion dans le contexte de plusieurs variables.

Une *série de Puiseux hypergéométrique* (en n variables) au sens de Horn est une série formelle de la forme

$$y(z) = z^\alpha \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k z^k, \tag{1.10}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^n$ est tel que $\mathrm{Re}\, \alpha \in ([0, 1[)^n$ et les coefficients a_k sont régis par le système de relations récursives

$$a_{k+e_l} = a_k \mathscr{R}_l(\alpha + k) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^n,\ \forall\, l = 1, ..., n. \tag{1.11}$$

où $\mathscr{R}_1, ..., \mathscr{R}_n$ sont des éléments de $\mathbb{C}(X_1, ..., X_n)$ et $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique du réseau $\mathbb{Z}^n$. Si l'on écrit (sous forme réduite)

$$\mathscr{R}_l(X) = \frac{P_l(X)}{Q_l(X + e_l)},\ l = 1, ..., n,$$

on constate qu'une telle série de Puiseux hypergéométrique (1.10) vérifie formellement le système différentiel

$$\Big[z_l P_l(z\partial/\partial z) - Q_l(z\partial/\partial z)\Big](y(z)) \equiv 0, \quad l = 1, ..., n. \tag{1.12}$$

Si l'on note $\theta_z = z\,\partial/\partial z$ (on verra l'importance de ce couplage ultérieurement [2]), on relie donc la série de Puiseux hypergéométrique à un certain idéal à gauche dans l'algèbre de Weyl $\mathbb{C}\langle X, \partial/\partial X\rangle$, à savoir l'idéal engendré par les opérateurs différentiels $X_l P_l(\theta_X) - Q_l(\theta_X)$, $l = 1, ..., n$.

2. D'ores et déjà, on peut remarquer que, dans le changement de variables $X \mapsto Y = 1/X$ (à une variable), l'opérateur θ_X est transformé en $-\theta_Y$, et par conséquent se trouve de fait invariant sous cette transformation. Comme dans ces exposés on sera souvent amené l'étude du comportement en 0 et à l'infini de solutions d'équations à l'infini (et à utiliser pour cela le balancier $s \leftrightarrow -s$), il est important dès à présent de matérialiser cet opérateur ≪ invariant ≫ θ_X. Il jouera en particulier aussi un rôle en plusieurs variables, lié à sa robustesse sous l'effet de changement de cartes monoidaux, comme on en rencontre constamment dans les compactifications de $\mathbb{T}^n$ réalisées comme des variétés toriques.

Le fait que le système (1.12) admette des solutions formelles se présentant sous la forme de séries de Puiseux de la forme (1.10) impose des contraintes, la plus évidente de toutes étant (lorsque $n > 1$) la condition de compatibilité suivante :

$$\mathscr{R}_l(X + e_{l'})\mathscr{R}_{l'}(X) = \mathscr{R}_{l'}(X + e_l)\mathscr{R}_l(X), \quad 1 \leq l, l' \leq n.$$

En fait, ces contraintes de compatibilité étant supposées remplies, il en surgit d'autres. C'est le théorème (purement combinatoire) de Ore-Sato ([**GGR**], I, sections 2 et 3) qui de fait les fait apparaitre, car il révèle que si la série de Puiseux (1.10) obéit à un jeu de relations inductives du type (1.11), alors les coefficients $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ sont d'une forme bien particulière, qui nous fait immédiatement rebondir sur la classe de Gevrey introduite dans la section 1.1 précédente ; en effet, on doit avoir, si tel est le cas

$$a_k = t^k \times U(k) \times \prod_{j=1}^{p} \Gamma\big(\langle A_j, k + \alpha\rangle + c_j\big), \tag{1.13}$$

où $t \in (\mathbb{C}^*)^n$, $U \in \mathbb{C}(X_1, ..., X_n)$, $A_1, ..., A_p \in \mathbb{Z}^n$ et $c_1, ..., c_p \in \mathbb{C}$, sont arbitraires. On retiendra le cas où U est un produit de facteurs affines ; comme le cas où ces facteurs affines ne sont pas multiples de facteurs affines à coefficients entiers ne nous interessera pas dans la recherche de séries entières, on fera l'hypothèse qu'il n'y en a pas et on incorpera tous les facteurs affines de U (à coefficients entiers cette fois) dans les termes sous la prise de Γ, ce qui donnera $U \equiv 1$. L'expression de la fraction rationnelle $\mathscr{R}_l$ devient alors

$$\mathscr{R}_l(X + \alpha) = t_j \prod_{j=1}^{p} \frac{\Gamma\big(\langle A_j, X + e_l + \alpha\rangle + c_j\big)}{\Gamma\big(\langle A_j, X + \alpha\rangle + c_j\big)}, \quad l = 1, ..., n.$$

Dans le cas où $A_1, ..., A_p$ engendrent un sous-espace de rang n, on on voit alors, du fait de (1.13) qu'une série de Puiseux de type hypergéométrique (au sens de Horn) est automatiquement de Gevrey d'un certain multi-ordre $(s_1, ..., s_n) \in \mathbb{Q}^n$, ce multi-ordre ne dépendant que du système de vecteurs $A_1, ..., A_p$ de $\mathbb{Z}^n$.

Autre remarque, importante relativement aux questions de nature arithmétique qui vont nous préoccuper : imposer aux $\mathscr{R}_l$ d'être des fractions rationnelles dans $\overline{\mathbb{Q}}(X_1, ..., X_n)$ (ou plus généralement à coefficients dans un corps de nombres $\mathbb{K}$) impose à α et aux constantes c_l d'appartenir à $\overline{\mathbb{Q}}$ ou à ce corps de nombres $\mathbb{K}$. Dans le cas où l'on se place, on constate donc que les polynômes P_l et Q_l, $l = 1, ..., n$, intervenant dans le système différentiel (1.12) sont des produits de formes affines $\langle A, X\rangle + c$, où $A \in \mathbb{Z}^n$ et c est un élément du corps dans lequel on a décidé de choisir les coefficients des fractions rationnelles $\mathscr{R}_l$ (c'est-à-dire $\mathbb{C}$, mais aussi $\overline{\mathbb{Q}}$ ou un corps de nombres si l'on a en tête les questions de nature arithmétique).

Prenons maintenant les choses sous un autre angle en renversant la vapeur pour partir cette fois du système différentiel de Horn :

$$(z_l P_l(\theta_z) - Q_l(\theta_z)[y] \equiv 0, \ l = 1, ..., n,$$

dont nous envisageons de chercher des solutions (formelles pour l'instant) au voisinage d'un point donné $z_0 \in \mathbb{C}^n$ (par exemple l'origine si $n = 1$), voire d'un point de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}^n)$, voire même d'un point d'une judicieuse compactification torique de $\mathbb{T}^n$. À l'idéal à gauche de $\mathbb{C}\langle X, \partial/\partial X\rangle$ engendré par les opérateurs $\mathscr{D}_l :=$

$X_l P_l(\theta_X) - Q_l(\theta_X)$, $l = 1, ..., n$, on attache le $\mathcal{D}$ module à gauche [3]

$$\mathcal{M}_{\mathscr{D}} = \frac{\mathcal{D}}{\sum_1^n \mathscr{D}_l \mathcal{D}}. \tag{1.14}$$

Ainsi (1.14) constitue une présentation de du $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}_{\mathscr{D}}$. Ce $\mathcal{D}$ module a pour variété caractéristique

$$\Big\{(z,\xi) \in \mathbb{C}^{2n} \;; \sigma(P)(z,\xi) = 0 \quad \forall\, P \in \sum_{l=1}^{n} \mathscr{D}_l\, \mathbb{K}\langle X, \partial/\partial X\rangle\Big\}$$

dont on sait qu'elle est de dimension supérieure ou égale à n (théorème de Bernstein, voir les exposés de Faycal).

Le système de Horn est dit *non-confluent* si les polynômes P_l et Q_l sont, pour chaque $l = 1, ..., n$, de même degré. Si l'on se place dans la situation où $U \equiv 1$, les polynômes P_l et Q_l se présentent comme des produits de formes affines et la condition de non-confluence se traduit par $\sum_{j=1}^{p} A_j = 0$. Dans ce cas de non-confluence (avec $U \equiv 1$), comme bien sûr dans le cas $n = 1$ (confluent ou non-confluent importe peu dans ce cas), la projection sur la base $\mathbb{C}^n$ (ou $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ou bien une compactification adéquate) de

$$\Big\{(z,\xi) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \;; \sigma(P)(z,\xi) = 0 \quad \forall\, P \in \sum_{l=1}^{n} \mathscr{D}_l\, \mathbb{K}\langle X, \partial/\partial X\rangle\Big\}$$

est une sous-variété algébrique V propre de la base. Ceci implique l'holonomie du $\mathcal{D}$-module (ou $\mathbb{K}\langle X, \partial/\partial X\rangle$, suivant l'angle, analytique ou algébrique sous lequel on se place) $\mathcal{M}_{\mathscr{D}}$. Il résulte de cette holonomie qu'au voisinage de tout point z de la base ($\mathbb{C}^n, \mathbb{P}^n$, ou une compactification judicieuse [4] de $\mathbb{T}^n$) où l'on se place, pourvu que l'on se trouve en dehors de V (ou de son adhérence de Zariski dans la compactification de $\mathbb{C}^n$ choisie), le système différentiel de Horn (1.12) admet localement au voisinage de ce point une base de solutions holomorphes car le point est par définition un point non singulier pour le système différentiel (1.12).

Cet exemple des séries hypergéométriques met en lumière l'objet central de ce qui sera notre étude, à savoir un système différentiel holonome Ψ (ici par exemple le système de Horn non-confluent (1.12)), donné par une liste d'opérateurs $\mathscr{D}_l$, $l = 1, ..., N$, éléments de l'algèbre de Weyl $\mathbb{K}\langle X, \partial/\partial_X\rangle$ (ou, mieux, cela peut s'avérer plus commode parfois, de $\mathbb{K}\langle X, \theta_X\rangle$), où $\mathbb{K}$ peut être $\mathbb{C}$, mais sera plutôt $\overline{\mathbb{Q}}$ ou un corps de nombres. En une singularité a de ce système (dans $\mathbb{C}^n$ ou à l'infini), on essaiera d'étudier la *régularité* (points singuliers « réguliers » au sens de la théorie de Fuchs, voir [**Del**]) dans le contexte Gevrey d'ordre (ou multi-ordre) prescrit, c'est-à-dire de voir s'il existe (formellement) une base de solutions (formelles) de $\Psi[y] = 0$ dans la base de Nilsson-Gevrey d'ordre prescrit (z étant ramené à $z - a$ ou à $1/z$ si $a = \infty$ dans le cas $n = 1$) et comment, en dimension

3. Ou bien le $\mathbb{K}\langle X, \partial/\partial_X\rangle$ module à gauche $\mathbb{K}\langle X, \partial/\partial X\rangle / \sum_1^n \mathscr{D}_l \mathbb{K}\langle X, \partial X\rangle$ si l'on envisage les problèmes sous l'angle algébrique et non plus analytique, $\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}}$, ou un corps de nombres $\mathbb{K}$, contenant dans tous les cas les coefficients des $\mathscr{D}_l$.

4. De fait, la compactification judicieuse à prendre ici consiste à considérer la variété torique correspondant au polyèdre de Newton Δ du polynôme définissant l'union des composantes de dimension $n-1$ de V (donc une hypersurface, dont on peut d'ailleurs exprimer l'équation en termes du calcul d'un résultant de Macaulay). En vertu du théorème de Hartogs, les composantes de dimension $n-1$ de V sont les seules à réellement poser problème pour ce qui concerne l'holomorphie d'une base de solutions locales du système.

1 au moins, la ≪ bascule ≫ d'ordre $s \leftrightarrow -s$ rend compte d'une dualité $0 \leftrightarrow \infty$ (l'opérateur d'≪ échange ≫ étant incarné par la transformation de Laplace $\mathscr{L}$). En présence de contraintes arithmétiques, que nous introduirons dès à présent, permettant de mettre en jeu des méthodes p-adiques, la situation arithmétique se trouvera considérablement ≪ rigidifiée ≫ par rapport à la situation simplement complexe.

1.3. Séries Gevrey Arithmétiques et classes NGA$\{z\}_s$

1.3.1. Séries Gevrey Arithmétique d'ordre $s \in \mathbb{Q}$ prescrit (en dimension 1). On se restreint maintenant au contexte arithmétique en prenant les séries formelles dans $\overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ ou $\mathbb{K}[[z]]$ ($\mathbb{K}$ corps de nombres spécifié) au lieu de les prendre dans $\mathbb{C}[[z]]$. On prendra donc cette fois, pour respecter ces nouvelles contraintes, $s = p/q \in \mathbb{Q}$.

Definition 1.1 (série Gevrey Arithmétique d'ordre s). Une série entière

$$y = \sum_{k\geq 0} a_k z^k \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$$

est une *série Gevrey arithmétique d'ordre* $s = p/q \in \mathbb{Q}$ (avec $|p|$ et $q > 0$ premiers) s'il existe une constante $C_s(y)$ telle, que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- d'une part la maison (c'est-à-dire le produit des modules de tous les conjugés) du nombre algébrique $a_k/(k!)^s$ est majoré [5] par $(C_s(y))^k$;
- d'autre part le dénominateur commun des nombres $a_\kappa/(\kappa!)^s$, $\kappa = 0, ..., k$, est aussi majoré par $(C_s(y))^k$.

D'après la formule de Stirling $k! \sim \sqrt{2\pi}e^{-k}k^{k+1/2}$, on a

$$\log\left(([k/q]!)^p\right) \simeq \log[(k!)^{p/q}] - kp/q \log q + O(\log k)$$

et il est facile de voir qu'en changeant la constante $C_{p/q}(y)$, on peut sans dommage remplacer la condition portant sur l'estimation des maisons des $a_k/(k!)^s$ par une condition analogue portant sur l'estimation cette fois des maisons des $a_k/([k/q]!)^p$. En utilisant le fait que le nombre de nombres premiers p inférieurs à k est en $O(k/\log k)$ (c'est un théorème de Tchebychev, le résultat asymptotique plus fin de Hadamard-de la Vallée-Poussin n'est pas utile ici), pour ce qui est de la clause portant sur les dénominateurs, on peut, toujours quitte à modifier $C_s(y)$, remplacer $a_k/(k!)^s$ également par $a_k/([k/q]!)^p$.

La classe des séries Gevrey arithmétiques d'ordre $s = p/q$ est stable par les opérations suivantes :

- par addition (évident) ;
- par multiplication par z (évident) ;
- par intégration (évident au niveau des contrôles de maison, il faut utiliser $\log(\mathrm{PPCM}(1, ..., k)) = O(k)$ (ce qui est une propriété se déduisant du théorème de Tchebychev déjà mentionné) pour ce qui est du contrôle des dénominateurs communs) ;
- par dérivation (évident) ;

5. Ceci signifie (c'est d'ailleurs équivalent) que, quelque soit le plongement ι de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \iota(a_k)/(k!)^s$ est minoré par une constante $R > 0$ indépendamment du plongement ι.

– par produit de Cauchy : immdiat au niveau des contrôles de maisons, mais c'est ici par contre qu'il faut utiliser la remarque autorisant à remplacer $(k)!^s$ par $([k/q]!)^p$ pour ce qui est du contrôle des dénominateurs communs.

On a donc ainsi une sous $\mathbb{Q}[z]$-algèbre de $\overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ stable par différentiation et intégration notée $\overline{\mathbb{Q}}\{z\}_s^A$. On notera $\mathbb{K}\{z\}_s^A$ la sous-algèbre différentielle obtenue lorsque les a_k sont spécifiés appartenir à un certain corps de nombres $\mathbb{K}$ précisé.

Dans le contexte $s = 0$, on voit que si un élément y de $\mathbb{K}\{z\}_0^A$ présente une infinité de coefficients a_k non nuls, la norme $N(a_k)$ de chaque tel coefficient non nul est un nombre rationnel positif p_k/q_k dont le dénominateur et le numérateur ($p_k \geq 1$) sont majorés par C^{kd} (avec $d := [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$) pour un certain $C = C_0(y) > 0$. On a, pour un tel a_k non nul, $p_k = q_k|a_k||u_k|$, où u_k représente le produit de tous les conjugués de a_k autres que a_k (il y en a $d-1$) ; comme la maison de a_k est majorée par C^k, on a $|u_k| \leq C^{k(d-1)}$ et l'on déduit de $1 \leq p_k \leq q_k|a_k||u_k| \leq |a_k|C^{k(2d-1)}$ que $\limsup_{k\to+\infty} |a_k|^{1/k} > 0$. En particulier y ne saurait être alors dans aucun $\mathbb{K}\{z\}_s^A$ avec $s < 0$. Pour $s = p/q$ quelconque, on est donc ainsi assuré qu'un élément de $\mathbb{K}\{s\}_s^A$ est soit un polynôme, soit une série Gevrey arithmétique d'ordre <u>exactement</u> s, aucun ordre Gevrey arithmétique strictement inférieur n'étant alors possible pour y. Ici apparait pour la première fois la *rigidité arithmétique* (un entier strictement positif non nul est minoré par 1, fondement même de la méthode de Siegel que l'on vera ultérieurement), sous la forme d'un résultat que l'on pourrait interpréter comme une version arithmétique du théorème de Liouville.

1.3.2. Caractérisation des $\mathbb{K}\{z\}_s^A$ en termes de hauteur logarithmique finie. Sur un corps de nombres $\mathbb{K}$ donné, on dispose d'une notion de *hauteur logarithmique h*. Cette notion a été largement développée par Y. André [**And0**], voir aussi [**DGS**], chapitres VII et VIII (dont je me suis inspiré pour cette présentation).

Étant donné un tel corps de nombres et l'ensemble[6] $\Sigma(\mathbb{K})$ de ses places v, archimédiennes (places *infinies*) ou non (places *finies*), la hauteur $h(x)$ d'un élément du corps de nombres $\mathbb{K}$ est définie par :

$$h(x) := \sum_{v\in\Sigma(\mathbb{K})} \log^+ |x|_v \quad (\log^+ := \max(\log, 0)). \tag{1.15}$$

Pour comprendre cette définition et en particulier voir (ce qui sera important, mais cependant non essentiel, par la suite) comment « normaliser » les valeurs absolues (élever $|\ |_v$ a une puissance strictement positive γ_v revenant dans ce cas à modifier la normalisation, étant donné que l'on ne modifie pas la topologie induite sur $\mathbb{Q}$ par $|\ |_v$, ni d'ailleurs la complétion de $\mathbb{Q}$ pour cette topologie), il convient de rappeler ici ce que sont les places (infinies ou finies) d'un corps de nombres $\mathbb{K}$. J'ai puisé mes sources pour cette présentation dans [**Am**] (à consulter pour plus de détails).

Le modèle de référence est $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$: dans ce cas, on dispose d'<u>une seule classe infinie</u> (dans l'ensemble des valeurs absolues, modulo la relation d'équivalence consistant à définir la même topologie), celle dont un représentant est la valeur absolue usuelle $|\ |$. Les <u>classes finies</u> sont elles, indexées par les nombres premiers p, un représentant (que l'on conviendra de normaliser ainsi) dans la classe $v = v_p$ étant la valeur absolue p-adique $|\ |_p$ définie par $|x|_p = p^{-\nu_x(p)}$, $\nu_x(p) \in \mathbb{Z}$ désignant l'exposant de

6. C'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence des valeurs absolues sur $\mathbb{K}$ pour la relation d'équivalence $v_1 \equiv v_2$ si et seulement si v_1 et v_2 définissent la même topologie.

p dans la décomposition en facteurs premiers de $x \in \mathbb{Q}$. Avec ces conventions de normalisation, on dispose de la formule du produit (dans $\mathbb{Q}$) :

$$\forall\, x \in \mathbb{Q},\ |x| \times \prod_{p \text{ premier}} |x|_p = 1. \tag{1.16}$$

Le modèle d'un corps de nombres $\mathbb{K}$ (de degré $d > 1$) est à peine plus complexe : il est important de disposer d'un élément primitif ω (algébrique et de degré d sur $\mathbb{Q}$) tel que

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q} + \omega\,\mathbb{Q} + \cdots + \omega^{d-1}\,\mathbb{Q} \simeq \frac{\mathbb{Q}[X]}{P_{\min}(X)\,\mathbb{Q}[X]},$$

$P_{\min}$ désignant le polynôme unitaire minimal de degré d à coefficients rationnels admettant cet élément primitif ω pour racine. L'anneau des entiers du corps de nombres $\mathbb{K}$ est alors

$$\mathbb{A}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z} + \cdots + \omega^{d-1}\,\mathbb{Z}.$$

Voici comment sont définies (et normalisées) les places v de $\mathbb{K}$.

- Chacune des d racines ω_j, $j = 1, ..., d$, de $P_{\min}$ induit un homomorphisme de corps $\varpi_j\ : \mathbb{K} \to \mathbb{C}$ laissant $\mathbb{Q}$-invariant, celui que l'on obtient en prenant $\varpi_j(\text{classe de}\, X) = \omega_j$ dans la representation $\mathbb{K} \simeq \mathbb{Q}[X]/P_{\min}\,\mathbb{Q}[X]$. On considère les d' racines réelles $\omega_1, ..., \omega_{d'}$ et les $d'' = (d-d')/2$ racines complexes conjuguées (mais répétées ici sans leur conjugée) $\omega_{d'+1}, .., \omega_{d'+d''}$, ce qui nous donne $d' + d''$ places infinies, dont nous décidons de choisir les représentants (ici intervient la normalisation) suivants :

$$x \mapsto |x|_{v_j} = |\pi_j(x)|^{d_j/d}, \quad d_j = \begin{cases} 1 \text{ si } 1 \le j \le d' \\ 2 \text{ si } d'+1 \le j \le d'+d''. \end{cases} \tag{1.17}$$

  On note que d_j (soit 1, soit 2) est égal (si l'on introduit les complétés $\mathbb{K}_{v_j}$ et $\mathbb{Q}_{v_j} = \mathbb{R}$ de respectivement de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{Q}$ pour la place v_j) au degré de l'extension $[\mathbb{K}_{v_j} : \mathbb{Q}_{v_j}]$, puisque $\mathbb{K}_{v_j} = \mathbb{Q}_{v_j} = \mathbb{R}$ si $1 \le j \le d'$ ($\omega_j \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$) et que $\mathbb{K}_{v_j} = \mathbb{C}$ tandis que $\mathbb{Q}_{v_j} = \mathbb{R}$ lorsque $d'+1 \le j \le d'+d''$ ($\omega_j \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{R}$).
- Les places finies de $\mathbb{K}$ sont en correspondance avec les idéaux premiers $\mathfrak{P}$ de l'anneau des entiers $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ du corps de nombres $\mathbb{K}$, exactement comme les places finies de $\mathbb{Q}$ le sont avec les idéaux premiers $p\,\mathbb{Z}$ ($p \in \mathbb{N}^*$ premier) de $\mathbb{Z}$. Voici donc comment l'on définit les valeurs absolues normalisées $|\ |_{\mathfrak{P}}$ correspondant aux places finies $v = v_{\mathfrak{P}}$, lorsque $\mathfrak{P}$ décrit la famille $\mathscr{P}(\mathbb{A}_{\mathbb{K}})$ des idéaux premiers de l'anneau des entiers $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$: pour tout $x \in \mathbb{K}$, $x\,\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ est un idéal fractionnaire de $\mathbb{K}$[7], que l'on peut donc décomposer sous la forme

$$x\,\mathbb{A}_{\mathbb{K}} = \prod_{\mathfrak{P} \in \mathscr{P}(\mathbb{A}_{\mathbb{K}})} \mathfrak{P}^{\nu_x(\mathfrak{P})}, \tag{1.18}$$

  où les $\nu_x(\mathfrak{P})$ sont des entiers relatifs tous nuls hormis un nombre fini. En posant, dans un premier temps,

$$\|x\|_{v_{\mathfrak{P}}} := [N(\mathfrak{P})]^{-\nu_x(\mathfrak{P})}, \tag{1.19}$$

  où $N(\mathfrak{P})$ désigne la norme de $\mathfrak{P}$, c'est-à-dire le cardinal de l'anneau quotient $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{P}$, on définit une valeur absolue (pour l'instant non encore normalisée) non archimédienne sur $\mathbb{K}$. Cette valeur absolue $\|\ \|_{v_{\mathfrak{P}}}$ induit sur $\mathbb{Q}$ une certaine topologie $p_{\mathfrak{P}}$-adique, ce pour un certain nombre premier $p_{\mathfrak{P}}$. La norme

7. C'est-à-dire un $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$-module M tel qu'il existe $a \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ avec $a\,M \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}$.

$N(\mathfrak{P})$ de l'idéal premier $\mathfrak{P}$ se présente donc comme une puissance $p_{\mathfrak{P}}^{f_{\mathfrak{P}}}$ de ce nombre premier $p_{\mathfrak{P}}$, l'exposant $f_{\mathfrak{P}}$ étant le degré de l'extension $[\mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{P} : \mathbb{Z}_{p_{\mathfrak{P}}}]$ (dit *degré résiduel*) et l'on a donc, en reportant dans (1.19),

$$\forall\, x \in \mathbb{K},\ \|x\|_{v_{\mathfrak{P}}} = p_{\mathfrak{P}}^{-f_{\mathfrak{P}}\nu_x(\mathfrak{P})}.$$

En particulier, si l'on pose $e_{\mathfrak{P}} = \nu_{p_{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{P})$ (dit *indice de ramification* de $\mathfrak{P}$ au dessus de $p_{\mathfrak{P}}$), on a :

$$\|p_{\mathfrak{P}}\|_{v_{\mathfrak{P}}} = p_{\mathfrak{P}}^{-f_{\mathfrak{P}}e_{\mathfrak{P}}} \quad \forall \mathfrak{P} \in \mathscr{P}(\mathbb{A}_{\mathbb{K}}). \tag{1.20}$$

Il se trouve que le produit $e_{\mathfrak{P}} \times f_{\mathfrak{P}}$ est exactement le degré $d_{v_{\mathfrak{P}}}$ de l'extension $[K_{v_{\mathfrak{P}}} : \mathbb{Q}_{p_{\mathfrak{P}}}]$, où $\mathbb{K}_{v_{\mathfrak{P}}}$ désigne le complété de $\mathbb{K}$ pour la valeur absolue non archimédienne $v_{\mathfrak{P}}$. De manière cohérente avec ce qui a été fait pour les places infinies (*cf.* (1.17)), il s'avère alors logique de normaliser la valeur absolue $\|\ \|_{v_{\mathfrak{P}}}$ en posant

$$\forall \mathfrak{P} \in \mathscr{P}(\mathbb{A}_{\mathbb{K}}),\ \forall\, x \in \mathbb{K},\ |x|_{v_{\mathfrak{P}}} := (\|x\|_{v_{\mathfrak{P}}})^{1/d} = \big(p_{\mathfrak{P}}^{-\nu_x(\mathfrak{P})/e_{\mathfrak{P}}}\big)^{d_{v_{\mathfrak{P}}}/d}. \tag{1.21}$$

Le souci qui a présidé à la normalisation des places de $\mathbb{K}$ (infinies et finies) que nous venons d'opérer est guidé par une exigence : celle de respecter la formule du produit (1.16) valide dans le cas particulier $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Avec les conventions de normalisation (1.17) et (1.21), on déduit en effet de la formule du produit dans $\mathbb{Q}$ (formule (1.16)) la formule du produit dans le corps de nombres $\mathbb{K}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{K},\ \prod_{v \text{ place de } \mathbb{K}} |x|_v = \prod_{j=1}^{d'+d''} |x|_{v_j} \times \prod_{\mathfrak{P}\in\mathscr{P}(\mathbb{A}_{\mathbb{K}})} |x|_{v_{\mathfrak{P}}} = 1. \tag{1.22}$$

Pour vérifier cette formule (1.22), on revient, lorsque $x \in \mathbb{K}$, à la décomposition de $x\,\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ donnée en (1.18). Appelons norme de l'idéal fractionnaire[8] $x\,\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ le nombre rationnel

$$\begin{aligned} N(x\,\mathbb{A}_{\mathbb{K}}) &:= \prod_{\mathfrak{P}\in\mathscr{P}(\mathbb{K})} N(\mathfrak{P})^{-\nu_x(\mathfrak{P})} = \prod_{\mathfrak{P}\in\mathscr{P}(\mathbb{K})} p_{\mathfrak{P}}^{-f_{\mathfrak{P}}\nu_x(\mathfrak{P})} \\ &= \prod_{p \text{ premier}} \Big(\prod_{\{\mathfrak{P}\in\mathscr{P}(\mathbb{K})\,;\,p_{\mathfrak{P}}=p\}} p^{-f_{\mathfrak{P}}\nu_x(\mathfrak{P})}\Big). \end{aligned}$$

On a, donc, pour tout nombre premier p,

$$|N(x\,\mathbb{A}_{\mathbb{K}})|_p = p^{-\sum_{\{\mathfrak{P}\in\mathscr{P}(\mathbb{K})\,;\,p_{\mathfrak{P}}=p\}} f_{\mathfrak{P}}\nu_x(\mathfrak{P})} = \Big(\prod_{\{\mathfrak{P}\in\mathscr{P}(\mathbb{K})\,;\,p_{\mathfrak{P}}=p\}} |x|_{v(\mathfrak{P})}\Big)^d.$$

D'autre part, $N(x\,\mathbb{A}_{\mathbb{K}})$ s'interprète aussi comme $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(x)$, c'est-à-dire la norme de l'opérateur de multiplication par x dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel (de dimension d) $\mathbb{K}$. Si les ω_j, $j = 1, ..., d$, désignent les conjugués de l'élément primitif ω, on a donc

$$|N(x\,\mathbb{A}_{\mathbb{K}})| = |N(x\,\mathbb{A}_{\mathbb{K}})|_\infty = \prod_{j=1}^{d} |\omega_j| = \prod_{j=1}^{d'} |\omega_j| \times \prod_{j=d'+1}^{d'+d''} |\omega_j|^2.$$

8. Les idéaux fractionnaires de $\mathbb{K}$ forment un groupe multiplicatif et la définition de la norme s'étend de manière multiplicative en respectant cette structure de groupe.

Compte-tenu des normalisations choisies, l'égalité

$$|N(x\,\mathbb{A}_{\mathbb{K}})|_\infty = \prod_{j=1}^{d'} |\omega_j| \times \prod_{\nu=1}^{d''} |\omega_{d'+\nu}|^2 = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{|N(x\,A_{\mathbb{K}})|_p}$$

(conséquence de la formule du produit dans $\mathbb{Q}$), donne, une fois élevée à la puissance $1/d$, la formule du produit (1.22) dans le corps de nombres $\mathbb{K}$.

On observe également que ce choix de normalisation (permettant de valider la formule du produit (1.22)) permet aussi de remarquer que la quantité $h(x)$ définie par (1.15) est de fait intrinsèque : elle ne dépend que de x, pas du corps de nombres $\mathbb{K}$ dans lequel x est considéré. La hauteur ainsi définie est directement liée au *dénominateur* et à la *maison* du nombre algébrique x par la formule (conséquence de la formule de Jensen) :

$$h(x) = \frac{1}{2\pi\, d(x)} \int_0^{2\pi} \log |p_x(e^{i\theta})|\, d\theta = \frac{\log\left[|a_{0,x}| \prod_1^{d(x)} \max(1, |\xi_{x,j}|)\right]}{d(x)}, \tag{1.23}$$

où

$$p_x(X) := a_{0,x} \prod_{j=1}^{d(x)} (X - \xi_{x,j}) \in \mathbb{Z}[X]$$

désigne le polynôme minimal de x sur $\mathbb{Z}$ et $d(x)$ son degré (on choisit pour cela de priviégier comme corps de nombres le corps $\mathbb{Q}(x)$, c'est-à-dire le plus petit corps de nombres contenant x, après avoir observé que, du fait de nos normalisations, avec essentiellement l'élévation en particulier à la puissance $1/d$, la hauteur de x ne dépendait pas du choix du corps de nombres contenant x). L'intégrale divisée par $d(x)$ au second membre de (1.23) est la *mesure de Mahler*. Pour se convaincre de la formule (1.23) (une fois que l'on a décidé que l'on pouvait prendre $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(x)$), il suffit de remarquer que $y = x\, a_{0,x}$ est un élément de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$, donc tel que que l'on ait $\nu_y(\mathfrak{P}) \geq 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de l'anneau des entiers $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$, ce qui implique $\log^+ |y|_v = 0$ pour toute place finie v de $\mathbb{K}$. La contribution à la hauteur $h(x)$ de toutes les places infinies et la même que la contribution à $h(a_{0,x})$ de ces places, soit

$$\frac{1}{d(x)} \sum_{j=1}^{d(x)} \log^+ |\xi_{x,j}|.$$

La contribution à la hauteur $h(x)$ des places finies est, puisque $x = 1/a_{0,x} \times y$ et que la contribution des places finies au calcul de la hauteur de y est nulle, égale à

$$-\frac{1}{d(x)} \sum_{p \text{ premier}} \log |1/a_{0,x}|_p = \frac{\log |a_{0,x}|}{d(x)}$$

En ajoutant, on obtient bien la formule (1.23).

Cette notion de hauteur (ou de *taille logarithmique*) s'étend naturellement aux polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ en convenant que :

$$h\Big(\sum_{k=0}^{K} a_k z^k\Big) := \frac{1}{K+1} \sum_{v \in \Sigma(\mathbb{K})} \log^+ \big(\max_{0 \leq k \leq K} |a_k|_v\big). \tag{1.24}$$

Cette notion passe enfin naturellement aux séries formelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ en convenant que :

$$h\Big(\sum_{k\geq 0} a_k z^k\Big) := \limsup_{K\to+\infty} h\Big(\sum_{k=0}^{K} a_k z^k\Big). \tag{1.25}$$

On peut alors reformuler en termes de hauteur l'appartenance d'une série formelle à $\overline{\mathbb{K}}\{z\}_s$ lorsque $\mathbb{K}$ est un corps de nombres précisé.

Proposition 1.1. *Étant donné un corps de nombres et la hauteur logarithmique* (1.15) *qui lui est attachée (moyennant une normalisation convenable des places en accord avec la formule du produit normalisée* (1.22)*), puis étendue ensuite aux éléments de* $\mathbb{K}[X]$ *(via* (1.24)*), puis de* $\mathbb{K}[[X]]$ *(via* (1.25)*), on a, pour tout* $s = p/q \in \mathbb{Q}$*, l'équivalence :*

$$f = \sum_{k\geq 0} a_k z^k \in \mathbb{K}\{z\}_s^A \iff h\Big(\sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{([k/q]!)^p}\, z^k\Big) < +\infty. \tag{1.26}$$

Démonstration. Cela découle de la relation (1.23) reliant la définition de la hauteur d'un nombre algébrique à son dénominateur et à sa maison, couplée avec l'extension de la notion de hauteur aux éléments de $\mathbb{K}[X]$, puis de $\mathbb{K}[[X]]$, telle qu'elle est proposée dans un premier temps (pour les polynômes) en (1.24), puis dans un second temps (pour les séries formelles) en (1.25). □

Remarque 1.2. On ne peut pas dans (1.26) laisser $(k!)^{p/q}$ (sauf bien sûr si $s = p/q$ prend l'une des trois valeurs $-1, 0, 1$) ; la nécessité de le remplacer par $([k/q]!)^p$ (ce qui n'est pas réellement un problème, *cf.* la section 1.3.1) tient au souci de préserver l'appartenance des coefficients à un même corps de nombres $\mathbb{K}$, ce afin de pouvoir profiter de la hauteur logarithmique h dont $\mathbb{K}[[X]]$ se trouve alors équipé. On peut également envisager, pour rester plus en phase avec les transformées intervenant dans les méthodes analytiques de resommation, lorsque $s = p/q \in \mathbb{Q}^*$, les transformées de Mittag-Leffler $\widehat{\mathscr{M}}_{q/p}$

$$\sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{\Gamma(1+kp/q)}\, z^k$$

ou de Borel formelles $\widehat{\mathscr{B}}_{q/p}$

$$\sum_{k\geq 0} \frac{a_{k+1}}{\Gamma(1+kp/q)}\, z^k$$

comme dans la sous-section 1.1.1, mais cette fois dans un contexte arithmétique ($a_k \in \mathbb{K}$ pour tout $k \geq 0$). Pour tout $r = 0, ..., q-1$, les sous-séries

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{a_{\kappa\, q+r}}{\Gamma(1+\kappa\, p + r\, p/q)}\, z^{\kappa q + r} \quad \text{ou} \quad \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{a_{\kappa\, q+r+1}}{\Gamma(1+\kappa\, p + r\, p/q)}\, z^{\kappa q + r}$$

se présentent (après division éventuelle par un nombre transcendant $\gamma_{r,p,q}$, valeur de la fonction Γ en certain un point rationnel) comme des séries formelles à coefficients dans le corps de nombres $\mathbb{K}$ (compte-tenu de l'équation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$). Les conditions

$$h\Big(\frac{1}{\gamma_{r,p,q}} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{a_{\kappa\, q+r}}{\Gamma(1+\kappa\, p + r\, p/q)}\, z^{\kappa q + r}\Big) < +\infty,\ r = 0, ..., q-1,$$

ou

$$h\Big(\frac{1}{\gamma_{r,p,q}}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{a_{\kappa\, q+r+1}}{\Gamma(1+\kappa\, p+r\, p/q)}\, z^{\kappa q+r}\Big) < +\infty,\ r=0,...,q-1,$$

rendent compte de conditions du type Gevrey Arithmétique (d'ordre $s=p/q$) pour les transformées de Mittag-Leffler $\widehat{\mathscr{M}_{q/p}}$ ou de Borel $\widehat{\mathscr{B}}_{q/p}$ formelles.

1.3.3. Les classes de Nilsson-Gevrey Arithmétiques $\mathrm{NGA}\{z\}_s^A$ (en une ou plusieurs variables).

Definition 1.3 (classe de Nilsson-Gevrey Arithmétique d'ordre $s=p/q$ prescrit). Si $s=p/q\in\mathbb{Q}$, la classe de Nilsson-Gevrey Arithmétique $\mathrm{NGA}\{z\}_s$ est définie comme le $\mathbb{C}$-espace des séries formelles engendrées par les séries formelles

$$z^{\alpha}(\log z)^{\nu}\, y_{\alpha,\nu}(z),\quad \alpha\in\mathbb{Q},\ \nu\in\mathbb{N},$$

où y est une série Gevrey arithmétique d'ordre s.

Les extensions de ces notions au cadre multivariables (avec multi-ordre $(s_1,...,s_n)$ dans $\mathbb{Q}^n$ prescrit) sont bien sûr immédiates.

On constate aussi (en utilisant le fait que le PPCM de $(1,...,(kq)!/(k!)^q$ a une croissance exponentielle en n) que les clauses d'échange (1.1), (1.2), (1.3) restent valident dans le cadre arithmétique. On a donc :

$$y(z)\in\mathrm{NGA}\{z\}_s \Longleftrightarrow y(z^{|s|})\in\mathrm{NGA}\{z\}_{\epsilon(s)}\quad\forall\, s\in\mathbb{Q}. \tag{1.27}$$

1.4. Holonomie dans le contexte arithmétique

1.4.1. Équations aux différences et opérateurs différentiels ($n=1$).

En ayant en mémoire la description des séries hypergéométriques en une variables et la construction de l'opérateur $\mathscr{D}=zP(\theta_z)-Q(\theta_z)$ déduit des conditions récurrentes (1.11), nous introduirons le concept d'*holonomie* en une variable, mais non plus cette fois dans le langage des systèmes différentiels, mais transcrit dans celui (de fait équivalent) des *équations aux différences*[9]. Dès le tout début ici, nous nous placerons dans le cadre arithmétique.

Definition 1.4 (holonomie *via* les équations aux différences). Une suite $(a_k)_{k\geq 0}$ de nombres algébriques est *holonome* si et seulement si il existe un opérateur au différences à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}[X]$

$$P(\Delta) := \sum_{q=0}^{\nu} P_q\,\Delta^q,\quad P_q\in\overline{\mathbb{Q}}\,[X],\ \Delta\ :(a_k)_{k\geq 0}\mapsto (a_{k+1})_{k\geq 0},\ \Delta^0=\mathrm{Id}$$

tel que $P(\Delta)[a]=0$.

9. On peut bien sûr voir l'holonomie dans ce cadre comme une version discrète de l'holonomie dans le cadre des systèmes différentiels ($(a_k)_k\mapsto(a_{k+1}-a_k)_k$ étant compris comme l'opérateur de dérivation discrète, comme il l'est en Mathématiques Appliquées). En relation avec la transcription à ce cadre discret de certains résultats conséquences de l'inégalité de Bernstein et de la clause d'holonomie (au sens classique) dans le contexte des $\mathcal{D}$-modules (*cf.* en particulier l'existence du polynôme de Bernstein), on pourra regarder les travaux de H. Wilf et D. Zeilberger (1989-1990), voir toutes les références sur ces sujets sur le site de Doron Zeilberger : `http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg`

Dire qu'une suite $(a_k)_{k\geq 0}$ de nombres algébriques est holonome (au sens de la Définition 1.4) revient à dire qu'il existe un opérateur différentiel $\Psi \in \overline{\mathbb{Q}}\,\langle z, \partial/\partial z\rangle$ (que l'on peut supposer de degré en $\partial/\partial X$ minimal)

$$\Psi(z,\partial/\partial z) = \sum_{q=0}^{\mu} A_q(z)\,\frac{\partial^q}{\partial z^q},\ A_q \in \mathbb{C}[X],\ q = 0, ..., \mu.$$

tel que $\Psi[\sum_{k\geq 0} a_k z^k] \equiv 0$ (au sens des séries formelles).

Definition 1.5 (G-fonctions[10]). Une G-fonction (ici en une variable) est par définition un élément $f = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ de $\overline{\mathbb{Q}}\{z\}_0^A$ dont la suite des coefficients $(a_k)_{k\geq 0}$ est de plus holonome au sens de la Définition 1.4.

1.4.2. Opérateurs différentiels en une variable à coefficients polynomiaux (quelques rappels). Soit Ψ un opérateur différentiel en une variable à coefficients polynomiaux (d'ordre $\mu \in \mathbb{N}^*$) :

$$\Psi(z,\partial/\partial z) = A_\mu(z)\,\frac{\partial^\mu}{\partial z^\mu} + A_{\mu-1}(z)\,\frac{\partial^{\mu-1}}{\partial z^{\mu-1}} + \cdots + A_0(z),\ A_q \in \mathbb{C}[X],\ q = 0, ..., \mu.$$

La *variété caractéristique* (dans $\mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_\xi$) de cet opérateur consiste en l'ensemble (dans $\mathbb{C}_z$) des racines complexes de son coefficient dominant A_μ, produit avec la fibre $\mathbb{C}_\xi$. On remarque que

$$z^\mu\,\Psi(z,D) = B_\mu(z)\,\theta_z^\mu + B_{\mu-1}(z)\,\theta_z^{\mu-1} + \cdots + B_q(z),\ B_q \in \mathbb{C}[X],\ q = 0, ..., \mu,$$

où θ désigne l'opérateur $z\partial/\partial z$ (transformé en son opposé, on l'a vu, sous l'effet du changement de variables $z \leftrightarrow 1/z$). Ce changement de variables transforme donc l'opérateur $\Psi(z,\partial/\partial z)$ en l'opérateur

$$w^\mu \sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q B_q(1/w)\,\theta_w^q(\mu) = w^\alpha \sum_{q=0}^{\mu} \widetilde{A}_q(w)\,\frac{\partial^q}{\partial w^q},\ \widetilde{A}_q \in \mathbb{C}[X],\, \alpha \in \mathbb{Z}, \tag{1.28}$$

où w ne divise pas tous les $\widetilde{A}_q$. On dit que ∞ est une singularité de Ψ si $\widetilde{A}_\mu(0) = 0$. L'étude de l'opérateur $\Psi(z,\partial/\partial z)$ à l'infini se ramène alors à celle de l'opérateur

$$\widetilde{\Psi}(w,\partial/\partial w) := \sum_{q=0}^{\mu} \widetilde{A}_q(w)\,\frac{\partial^q}{\partial w^q}.$$

Une singularité $a \in \mathbb{C}$ ($A_\mu(a) = 0$) de l'opérateur différentiel $\Psi(z,\partial/\partial z)$ est dite *régulière* lorsque se trouve satisfaite la condition

$$\min_{q<\mu}\big(\mathrm{val}_a(A_q) - q\big) \geq \mathrm{val}_a(A_\mu) - \mu. \tag{1.29}$$

Le point ∞ est une singularité régulière si $\widetilde{A}_\mu(0) = 0$ et

$$\min_{q<\mu}\big(\mathrm{val}_0(\widetilde{A}_q) - q\big) \geq \mathrm{val}_0(\widetilde{A}_\mu) - \mu. \tag{1.30}$$

Lorsque la singularité $a \in \mathbb{C}$ (*resp.* $a = \infty$) est régulière, toute solution y (au voisinage épointé de a) de l'équation différentielle $\Psi(z,\partial/\partial z)[y] \equiv 0$ a sa croissance contrôlée (lorsque l'on s'approche de a dans un petit secteur angulaire arbitraire de sommet a) par une fonction algébrique. Réciproquement, si a (éventuellement $a = \infty$) est un point singulier de l'opérateur différentiel Ψ tel que toute solution y (au voisinage de a) de l'équation différentielle $\Psi(z,\partial/\partial z)[y] \equiv 0$ ait sa croissance

10. Gauß ? Le concept en tout cas semble avoir été introduit par C. Siegel.

contrôlée (lorsque l'on s'approche de a dans un petit secteur angulaire arbitraire de sommet a) par une fonction algébrique, alors le point a est nécessairement un point singulier régulier.

Le fait que le point $a \in \mathbb{C}$ soit un point singulier régulier se voit en construisant le *polygone de Newton-Ramis de* Ψ en a. Ce polygone est défini par :

$$\text{Newton}_a(\Psi) = \text{conv}\Big(\bigcup_{q=0}^{\mu}\{(x,y)\,;\, x \leq q,\, y \geq \text{val}_a(A_q) - q\}\Big). \tag{1.31}$$

La singularité a de l'opérateur Ψ est régulière si et seulement si $\text{Newton}_a(\Psi)$ ne présente aucune face de pente non nulle. Remarquons qu'en général, les pentes (non nulles et non infinies) du diagramme de Newton-Ramis de Ψ en 0 sont des nombres strictement positifs $t_1, ..., t_\mu$ (il y a au plus μ pentes, se présentant de manière croissante, les premières pouvant être nulles).

L'opérateur $\Psi(z, \partial/\partial z)$ est dit *fuschien* si et seulement si tous ses points singuliers dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont des points singuliers réguliers.

La transformation de Laplace $\mathscr{L}$ jouera par la suite un rôle fondamental. Du fait des relations formelles :

$$\frac{d}{dz}\Big(\int_0^\infty f(t)\, e^{-tz}\, dt\Big) = -\int_0^\infty t\, f(t)\, e^{-zt}\, dt \qquad \int_0^\infty f'(t)\, e^{-tz}\, dt = z\int_0^\infty f(t)\, e^{-tz}\, dt,$$

l'opérateur de Laplace $\mathscr{L}$ agit sur un opérateur différentiel à coefficients polynômiaux $\Psi(z, \partial/\partial z)$ suivant la règle d'échange :

$$\mathscr{L}\Big[\Psi(z, \partial/\partial z)\Big] = \Psi(-\partial/\partial w, w). \tag{1.32}$$

Afin de rendre compte « en simultané » de la nature des points 0 et ∞, il est commode d'attacher à un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux

$$\Psi(z, \partial/\partial z) := \sum_{q=0}^{\mu}\Big(\sum_{\kappa=0}^{\nu} a_{q,\kappa}\, z^\kappa\Big)\frac{\partial^q}{\partial z^q}$$

son *polygone de Newton-Ramis algébrique*, polytope convexe non borné du plan défini par :

$$\text{Newton}\,\Psi := \text{conv}\Big\{]-\infty, q] \times \{\kappa - q\}\,;\, (q,\kappa) \in \text{Supp}\,(\Psi(z,\xi))\Big\}. \tag{1.33}$$

La partie de pente positive (à droite) correspond à translation verticale près au *polygône de Newton-Ramis de l'opérateur* Ψ *en* 0 (les coefficients A_q sont remplacés par leurs monômes de plus bas degré), tandis que la partie de pente négative (toujours à droite) correspond (toujours à translation verticale près) au symétrique par rapport à l'axe des abscisses du *polygone de Newton-Ramis de l'opérateur* Ψ *à l'infini*, $\text{Newton}_\infty\Psi = \text{Newton}_0(\widetilde{\Psi})$.

Le polygone de Newton-Ramis algébrique $\text{Newton}(\mathscr{L}[\Psi])$ s'obtient en transformant le polygone de Ramis algébrique $\text{Newton}(\Psi)$ (dans le plan $\mathbb{R}^2_{x,y}$) par $(x,y) \mapsto (x+y, -y)$. Chaque pente non nulle s du polygone de Newton-Ramis algébrique $\text{Newton}(\Psi)$ est transformée dans ce nouveau polygone $\text{Newton}(\mathscr{L}[\Psi])$ en la pente $-s/(1+s)$ (si $s = -1$, on trouve ainsi une pente verticale).

Example 1.6. L'opérateur différentiel du second ordre d'Airy [11] $\partial^2/\partial z^2 - z$ devient après la transformation $z \to w = 1/z$ l'opérateur différentiel

$$\widetilde{\Psi}(w, \partial/\partial w) := w^5 \frac{\partial^2}{\partial w^2} + 2w^4 \frac{\partial}{\partial w} - 1.$$

Il présente donc une singularité (une seule) en ∞. Le diagramme de Newton-Ramis de l'opérateur d'Airy est l'enveloppe convexe dans le plan des deux demi-droites $]-\infty, 2] \times \{-2\}$ et $]-\infty, 0] \times \{1\}$. Ce diagramme présente ici une seule pente strictement négative (opposée de l'unique pente strictement positive $3/2$ dans le polygone $\text{Newton}_\infty(\Psi)$).

Étant donné un opérateur différentiel $\Psi(z, \partial/\partial z)$ singulier à l'origine, on peut, en introduisant la méthode classique consistant à transformer une EDO linéaire d'ordre μ en un système différentiel linéaire d'ordre 1 et de dimension μ (*via* l'introduction de la matrice compagnon), associer à $\Psi(z, \partial/\partial z)$ un opérateur du premier ordre cette fois, se présentant sous la forme :

$$\boldsymbol{\Psi}(z, \partial/\partial z) = \theta_z - M(z), \quad M \in \mathscr{M}_{\mu,\mu}(\mathbb{C}(z)) \tag{1.34}$$

(on ne retient en fait que l'information suivant laquelle les coefficients de M sont des germes de fonctions méromorphes à l'origine, le caractère algébrique étant irrelevant ici puisque le résultat est local). D'après le théorème de Fabry-Hukuhara-Turritin (voir par exemple [**Ram2**], Théorème 2.5), si l'on note ν le plus petit multiple commun des pentes t_i strictement positives du polytope de Newton-Ramis $\text{Newton}_0(\Psi)$ (c'est-à-dire le plus petit entier ν assurant, une fois ces pentes multipliées par ν, que les νt_i sont des entiers), il existe :

- une matrice $L \in \text{End}(\mathbb{C}^\mu)$,
- un élément $\widehat{F} \in \text{GL}(\mu, \mathbb{C}[[z^{1/\nu}]][z^{-1/\nu}])$,
- une matrice (μ, μ) diagonale $Q = \text{diag}(q_1, ..., q_\mu)$, avec $q_i \in t\,\mathbb{C}[t]$, ayant pour degrés précisément les νt_i (ces polynômes [12] sont appelés *facteurs déterminants* de l'opérateur différentiel Ψ en a),

tels que le système $\boldsymbol{\Psi}[Y] = 0$ admette une solution fondamentale formelle [13] de la forme

$$Y(z) = \exp(Q(z^{-1/\nu}))\, z^L\, \widehat{F}(z). \tag{1.35}$$

Imposer à un opérateur différentiel $\Psi(z, \partial/\partial z)$ d'avoir une solution formelle dans la classe $\text{NGA}\{z\}_s$ pour un certain $s \in \mathbb{Q}$ rendra compte de plusieurs phénomènes

11. Dont une solution est la *fonction d'Airy*

$$z \longmapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(zt + t^3/3)\, dt,$$

dont on sait que le développement de Taylor en 0 s'exprime (utilisant le développement en série entière du cosinus et le formalisme de la transformation de Laplace) comme combinaison linéaire (à coefficients complexes) de deux éléments de $\overline{\mathbb{Q}}\{z\}_{-2/3}$, on y reviendra.

12. On ne conserve ici que les $t_i > 0$ (notons qu'il y en a au plus μ, comme nous l'avons déjà remarqué) ; lorsque $t_i = 0$, le q_i correspondant est de degré 0 et ne joue doc aucun rôle. On peut considérer le terme $\exp(Q(z^{-1/\nu}))$ comme la partie ≪ anti-Fuchs ≫, le terme $z^L \widehat{F}(z)$ représentant, lui, la contribution de type ≪ Fuchs ≫ ; lorsque l'origine est un point singulier-régulier, le terme ≪ anti-Fuchs ≫ est absent (remplacé par une constante) et seul subsiste la contribution ≪ Fuchs ≫ ; on retrouve dans ce cas la croissance des solutions de $\Psi(z, \partial/\partial z)$ au voisinage de 0 contrôlée par une fonction algébrique lorsque l'on s'approche de l'origine en restant dans un petit secteur arbitraire.

13. Ce qui signifie que les colonnes de la matrice constituent une base de solutions formelles du système.

(*pureté*, *dualité*, *permanence*) dont nous pouvons interpréter les conséquences à la lumière de ce Théorème de Fabry-Hukuhara-Turritin. À titre d'exemple, nous énoncons et commentons le premier théorème de pureté (en $a = 0$) d'Y. André (sa preuve viendra ultérieurement) :

THEOREM 1.7 (Théorème de pureté en $a = 0$). *Supposons que $\Psi(z, \partial/\partial z)$ soit un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathbb{C}[z]$ d'ordre minimal admettant (au sens formel) une solution $\bar{y} \in \mathrm{NGA}\{z\}_s$ (évidemment non triviale, c'est-à-dire non identiquement nulle) pour un certain $s \in \mathbb{Q}$. Alors, l'existence d'une telle solution conditionne la forme de <u>toutes</u> les solutions formelles*[14] *du système*

$$\Psi(z, \partial/\partial z)[y] \equiv 0,$$

au sens suivant :
- *si $s \leq 0$, le système $\Psi(z, \partial/\partial z)[y] = 0$ admet une base de solutions formelles <u>toutes</u> dans la classe $\mathrm{NGA}\{z\}_s$;*
- *si $s > 0$, le système $\Psi(z, \partial/\partial z)[y] = 0$ admet une base de solutions formelles <u>toutes</u> de la forme $\exp(\alpha\, z^{-1/s})\, f$ avec $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ et $f \in \mathrm{NGA}\{z\}_s$.*

Ce résultat, à la lumière du théorème de Fabry-Hukuhara-Turritin, induit les observations suivantes :
- lorsque $s \leq 0$, du fait que toutes les séries Gevrey d'ordre $s \leq 0$ correspondent à des séries entières de rayon de convergence strictement positif, l'existence d'une solution $\bar{y}$ du système différentiel $\Psi(z, \partial/\partial z)[y] \equiv 0$ (supposé d'ordre minimal) implique, au vu de la définition de la classe $\mathrm{NGA}\{s\}_s$, la régularité de la singularité $a = 0$.
- lorsque $s > 0$, l'existence de $\bar{y}$ implique (du fait du théorème de Fabry-Hukuhara-Turritin) que $1/s$ est la <u>seule pente</u> strictement positive du polygone de Newton-Ramis $\mathrm{Newton}_0(\Psi)$ et que les facteurs déterminants $q_1, ..., q_\mu$ impliqués dans ce théorème de Fabry-Hukuhara-Turritin sont en fait des monômes.

Le Théorème de Fabry-Hukuhara-Turritin peut aussi être envisagé au point (éventuellement) singulier $a = \infty$. Revenant à 0 par le biais de la transformation $w \mapsto z = 1/w$, on peut donc le formuler en disant qu'il existe, pour le système

$$\boldsymbol{\Psi}(z, \partial/\partial z)[Y] \equiv 0,$$

correspondant, une solution fondamentale formelle de la forme

$$Y(z) = \exp(Q(z^{1/\nu}))\, z^{-L}\, \widehat{F}(1/z) \tag{1.36}$$

où cette fois ν figure le plus petit multiple commun des pentes t_i strictement positives du polygone de Newton-Ramis à l'infini $\mathrm{Newton}_\infty(\Psi)$ et les q_i, $i = 1, ..., \mu$ impliqués dans l'expression de Q sont des éléments de $t\,\mathbb{C}[t]$ de degrés les entiers $\nu\, t_i$.

Le second résultat d'Y. André (le théorème de dualité) s'interprète comme le théorème de pureté en $a = \infty$.

THEOREM 1.8 (Théorème de pureté en $a = \infty$ ou de dualité). *Supposons que $\Psi(z, \partial/\partial z)$ soit un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathbb{C}[z]$ d'ordre minimal*

14. Par solution formelle, on entend donc ici une combinaison linéaire à coefficients complexes des entrées de la première ligne de la matrice Y donnée en (1.35) par le théorème de Fabry-Hukuhara-Turritin.

admettant (au sens formel) une solution $\bar{y} \in \mathrm{NGA}\{z\}_s$ *(évidemment non triviale, c'est-à-dire non identiquement nulle) pour un certain* $s \in \mathbb{Q}^*$. *Alors, l'existence d'une telle solution conditionne la forme de* <u>*toutes*</u> *les solutions formelles*[15] *du système* $\Psi(z, \partial/\partial z)[y] \equiv 0$ *en l'infini, au sens suivant :*

- *il n'y a au plus que deux points singuliers non triviaux*[16], 0 *et* ∞, *l'une de ces deux singularités étant régulière (*0 *si* $s < 0$, ∞ *si* $s > 0$*) ;*
- *si* $s < 0$, *le système* $\Psi(z, \partial/\partial z)[y] = 0$ *admet une base de solutions formelles* <u>*toutes*</u> *de la forme* $\exp(\alpha z^{-1/s})\, f$, *avec* $f \in \mathrm{NGA}\{1/z\}_{-s}$. *Pour toute direction* θ *du plan (sauf pour un nombre fini, à savoir les directions de Stokes*[17]*), il existe donc* $\alpha_\theta \in \overline{\mathbb{Q}}$ *tel que* $z \mapsto \exp(-\alpha_\theta z^{-1/s})\, \bar{y}(z)$ *admette dans la direction* θ *un développement asymptotique dans* $\mathrm{NGA}\{1/z\}_{-s}$.
- *si* $s > 0$, *le système* $\Psi(z, \partial/\partial z)[y] = 0$ *admet une base de solutions formelles* <u>*toutes*</u> *dans* $\mathrm{NGA}\{1/z\}_{-s}$. *Pour toute direction* θ, $\bar{y}$ *est le développement asymptotique à l'origine d'une solution de* Ψ *dans* $\mathrm{NGA}\{1/z\}_{-s}$ *(cette solution étant fournie lorsque* θ *est non-singulière à partir de* $\bar{y}$ *par le procédé de* $1/s$*-resommation au sens de Ramis, dans le cas où la direction* θ *est singulière, par le procédé de* $1/s$*-sommation médiane*[18]*).*

Sous les hypothèses de ce dernier théorème, et lorsque $s < 0$, il résulte que $-1/s$ est l'unique pente strictement positive du polygone de Newton-Ramis $\mathrm{Newton}_\infty(\Psi)$ et que les facteurs déterminants impliqués dans le Théorème de Fabry-Hukuhara-Turritin (en $a = \infty$) sont encore des monômes en t.

Example 1.9 (retour à la fonction d'Airy). La fonction d'Airy admet au voisinage de l'origine un développement de Taylor faisant apparaitre des séries Gevrey arithmétiques d'ordre $-2/3$. L'unique pente du polygone de Newton-Ramis $\mathrm{Newton}_\infty(\Psi)$ vaut dans ce cas $3/2$, ce qui est en accordance avec la configuration $s < 0$ dans le Théorème de Pureté à l'infini. Dans un secteur d'ouverture $2\pi/3$ bissecté par $[0, \infty[$, on dispose, pour la fonction d'Airy

$$z \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(zt + t^3/3)\, dt$$

d'un développement asymptotique faisant intervenir deux séries de Puiseux-Gevrey $x^\alpha f$ d'ordre $2/3$ ($\alpha = -1/4$ et $\alpha = -3/4$) multipliées précisément par $\exp(2/3z^{3/2})$, en accordance avec toujours la configuration $s = -2/3 < 0$ dans le théorème de pureté en $a = \infty$.

1.4.3. Les contraintes arithmétiques : G et E opérateurs (en dimension 1). Soit $\Psi(z, \partial/\partial z)$ un opérateur différentiel d'ordre μ dont on suppose cette fois les coefficients A_q, $q = 0, ..., \mu$, sont dans $\overline{\mathbb{Q}}[z]$ (ou, ce qui revient au même, dans $\mathbb{K}[X]$, où $\mathbb{K}$ désigne un corps de nombres contenant tous les coefficients de ces polynômes A_q, $q = 0, ..., \mu$). Par la suite, $\mathbb{K}$ désignera toujours un tel corps. On peut associer à cet opérateur le système d'opérateurs d'ordre cette fois 1 :

$$\boldsymbol{\Psi}(z, \partial/\partial z) := \theta_z - M(z), \qquad M \in \mathcal{M}_{\mu,\mu}(\mathbb{K}(X)).$$

15. Par solution formelle, on entend donc ici une combinaison linéaire à coefficients complexes des entrées de la première ligne de la matrice Y donnée en (1.35) par le théorème de Fabry-Hukuhara-Turritin.

16. Au voisinage desquels n'existe pas de base de solutions holomorphes.

17. On précisera plus loin ce que sont ces directions ≪ singulières ≫.

18. On a esquissé l'idée de la $1/s$-resommation dans la sous-section 1.1.3, mais l'on reviendra plus loin sur ce principe ainsi par ce que l'on entend par *resommation médiane*.

On introduit la suite de matrices $(M^{[k]})_{k\geq 0}$ à coefficients dans $\mathbb{K}(z)$ définie récursivement par
(1.37)
$$M^{[0]} = \mathrm{Id}_\mu(z), \quad M^{[k+1]}(z) = \frac{\partial}{\partial z}\,[M^{[k]}(z)] + M^{[k]}(z)\cdot(M(z) - k\,\mathrm{Id}_\mu), \quad k \geq 0.$$
Ceci revient à dire que l'opérateur
$$z^k\,\frac{\partial^k}{\partial z^k} - M^{[k]}$$
doit être, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, l'unique opérateur de cette forme divisible à droite par $\theta_z - M(z)$. Soit δ un dénominateur commun à tous les éléments de M, de manière à ce que $\delta^k(z) \times M^{[k]}(z) \in \mathbb{K}[z]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On pose ensuite
$$\forall\, k \geq 0,\ A^{[k]}(z) = \frac{M^{[k]}(z)}{k!}.$$
Introduisant la série formelle
$$\sum_{k=0}^{\infty} A^{[k]}(z)\,\xi^k,$$
et l'analogie avec la définition de la classe $\mathbb{K}\{\xi\}_0$ (seule l'hypothèse portant sur les dénominateurs est à prendre en compte en fait, l'hypothèse sur le contrôle des « maisons » étant automatique du fait de la génération même des $M^{[k]}$ à partir de M par induction), on introduit la définition suivante :

Definition 1.10 (G-opérateurs et E-opérateurs). Un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux $\Psi(z, \partial/\partial z) \in \mathbb{K}\langle z, \partial/\partial z\rangle$ est un G-opérateur si et seulement si il existe une constante C telle que,

(1.38) $$\forall k \in \mathbb{N},\ \text{dénominateur commun}\Big(\text{coeff}\,(\delta^\kappa(z)\,A^{[\kappa]}(z)),\ \kappa = 0, ..., k\Big) \leq C^k.$$

L'opérateur $\Psi(z, \partial/\partial z) \in \mathbb{K}\langle z, \partial/\partial z\rangle$ est un E-opérateur si et seulement si son transformée par Laplace $\mathscr{L}[\Psi(z, \partial/\partial z)]$ est un G-opérateur.

Remarque 1.11. Cette définition, contrairement à la définition des $\mathbb{K}\{z\}^A_{p/q}$ séries (*cf.* la définition (1.15) de la hauteur logarithmique et son implication dans l'équivalence (1.26)) ne fait intervenir que des contraintes sur les dénominateurs, une hypothèse portant sur le contrôle des « maisons » s'avérant redondante du fait de la génération des $M^{[k]}$. On verra d'ailleurs comment la formuler plus loin en termes d'estimations de taille impliquant <u>seulement les places finies</u> du corps $\mathbb{K}$ et non <u>toutes</u> les places.

Remarque 1.12. En fait, la définition 1.10 (pour ce qui est des G-opérateurs) s'interprètera comme attachée, non plus à un opérateur, mais à un $\mathbb{K}(z)[\theta_z]$-module unitaire tel que le $\mathbb{K}(X)$-module induit soit un module libre et de rang fini. Pareil modèle s'étendra au contexte multi-variables (suivant par exemple [**LdV**]), penser par exemple au système holonome de Horn (1.12), la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ se trouvant remplacée par une compactification torique adéquate de $\mathbb{T}^n$ (telle bien sûr $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$). Définir la notion (plus large) de *module de Galochkin* reviendra à équiper ce module holonome non seulement d'une dimension, d'une multiplicité (information « géométrique », voir les exposés de Faycal), mais encore d'une taille (« information arithmétique »), cette taille étant dans ce cas particulier <u>finie</u> (ce dont rend compte justement la structure de G-objet). Nous introduirons ce concept de *module de Galochkin* au chapitre suivant (sous-section 2.1.4).

Si $a \in \mathbb{K}$ est un point non singulier d'un G opérateur Ψ à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$, toute solution dans $\mathbb{K}[[z-a]]$ de l'opérateur Ψ sera automatiquement une G-fonction.

Le résultat majeur concernant ce couplage G-opérateurs/G-fonctions [19] est le théorème suivant, dû à David et Gregory Chudnovky ([**Chud1, Chud2**], une preuve détaillée sur laquelle nous reviendrons est donnée dans [**DGS**], chapitre VIII).

Theorem 1.13 (Théorème des Chudnovsky en dimension 1). *Si $f \in \mathbb{K}[[z]]$ est une G-fonction solution d'un opérateur différentiel d'ordre minimal $\Psi \in \mathbb{K}\langle z, \partial/\partial z\rangle$, alors nécessairement Ψ est un G-opérateur.*

Ce théorème s'articulera pour nous avec un second énoncé, dû cette fois à N. Katz [**Katz**] (on reviendra sur la preuve [20], donnée par exemple dans le chapitre III de [**DGS**]) :

Theorem 1.14 (Théorème de Katz en dimension 1). *Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres et $\Psi \in \mathbb{K}\langle z, \partial/\partial z\rangle$ un G-opérateur. Alors Ψ est nécessairement fuschien.*

C'est dans ce cadre $\mathrm{NGA}\{z\}_0$ que se situe le dernier théorème d'Yves André, dit de ≪ permanence ≫ (que nous démontrerons ultérieurement).

Theorem 1.15 (Théorème de permanence (le cas $s = 0$)). *Soit $\bar{y} \in \mathrm{NGA}\{z\}_0$ une solution formelle d'un opérateur différentiel d'ordre minimal Ψ à coefficients dans $\mathbb{C}[z]$. Pour tout nombre $a \in \overline{\mathbb{Q}}$, l'opérateur Ψ admet une base de solutions formelles dans $\mathrm{NGA}\{z-a\}_0$, ainsi que dans $\mathrm{NGA}\{1/z\}_0$ (ce dernier cas correspondant à $a = \infty$).*

---

19. G pour Gauß ? pour Galochkin ? À plusieurs variables, le concept de G-opérateur (ou plutôt alors de G-module) semble être du à Galochkin ; le concept de G-fonction par contre semble a été introduit par C. Siegel, comme nous l'avons déjà mentionné, mais le qualificatif G-fonction pourrait naturellement renvoyer à Gauß.

20. C'est précisément à l'occasion de la preuve du théorème de Katz que nous développerons au chapitre 2 les rudiments d'analyse p-adiques omniprésents dans [**And1**] et [**And2**].

CHAPITRE 2

Quelques rudiments d'analyse p-adique

Les rudiments d'analyse p-adique développés ici sont essentiellement extraits des références [**And0**] et [**DGS**].

2.1. Point, rayon de solubilité générique d'un opérateur différentiel

Le but de cette première section est d'introduire les concepts p-adiques permettant de formuler différemment la condition pour un opérateur $\Psi \in \mathbb{K}\langle z, \partial/\partial z\rangle$ (plus généralement pour un $\mathbb{K}(z_1, ..., z_n)[\theta_{z_1}, ..., \theta_{z_n}]$ module holonome) d'être un G-opérateur (plus généralement un module de Galochkin). Cette fois la clause (1.38) sera remplacée par une condition de taille (« être de taille logarithmique, ou de hauteur logarithmique finie », ce en étroit parallèle avec la formulation (1.26) de l'appartenance d'une série entière $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k z^k \in \mathbb{K}[[z]]$ à la classe $\mathbb{K}\{z\}^A_{p/q}$), puis par une condition (de nature cette fois ultramétrique) portant sur les rayons de convergence des solutions d'une base de solutions de l'opérateur différentiel (ou du $\mathbb{K}(z)[\theta_z]$-module $\mathbb{K}(z)[\theta_z]/\boldsymbol{\Psi}\mathbb{K}(z)[\theta_z]$) au point générique v-adique (relativement au corps de nombres $\mathbb{K}$), lorsque v parcourt l'ensemble de toutes les places finies de $\mathbb{K}$ (en correspondance avec l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{P}$ de l'anneau des entiers $\mathbb{A}_\mathbb{K}$). Pareil énoncé constituera la théorème d'André-Bombieri (Théorème 2.1 ci-dessous).

2.1.1. Point générique $|\ |$-adique de valeur absolue $r > 0$ (relativement à un corps de nombres $\mathbb{K}$ équipé d'une place finie). Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres de degré d, v une place finie de $\mathbb{K}$. Comme on l'a vu dans la section 1.3.2, cette place finie v correspond à un idéal premier $\mathfrak{P}$ de l'anneau des entiers $\mathbb{A}_\mathbb{K}$, auquel on peut attacher sa *caractéristique résiduelle* qu'est l'entier premier $p_\mathfrak{P}$, le cardinal de $\mathbb{A}_\mathbb{K}/\mathfrak{P}$ s'exprimant alors sous la forme $p_\mathfrak{P}^{f_\mathfrak{P}}$, où l'exposant $f_\mathfrak{P}$ dénote le *degré résiduel* de l'idéal premier $\mathfrak{P}$. Comme Yves André dans [**And1**], on normalise ici la place finie v de manière à ce que $|p_\mathfrak{P}| = 1/p_\mathfrak{P}$ (on convient de ne plus noter à partir de ce moment, dans cette section, la dépendance en $v = v_\mathfrak{P}$, *i.e.* en $\mathfrak{P}$, une fois cette normalisation précisée), ce qui revient à poser (par rapport à la normalisation $|\ |_{v_\mathfrak{P}}$ adoptée dans la section 1.3.2))

$$|\ | = |\ |_{v_\mathfrak{P}}^{d/d_\mathfrak{P}}, \tag{2.1}$$

où $d_\mathfrak{P} = [\mathbb{K}_{v_\mathfrak{P}} : \mathbb{Q}_{p_\mathfrak{P}}]$, $\mathbb{K}_{v_\mathfrak{P}}$ désignant le complété du corps de nombres $\mathbb{K}$ pour la valeur absolue non archimédienne $|\ |$ correspondant à l'idéal premier $\mathfrak{P}$. Même si la normalisation $|\ |$ choisie ici diffère de la normalisation $|\ |_{v_\mathfrak{P}}$ (*cf.* la relation (2.1)), on note cependant que

$$\sum_{\{\mathfrak{P}\,;\,p \text{ divise } \mathrm{card}(\mathbb{A}_\mathbb{K}/\mathfrak{P})\}} d_\mathfrak{P} = d,$$

ce qui implique que tous les exposants $d/d_{\mathfrak{P}}$ intervenant dans (2.1) sont entre 1 et d ; il en résultera que le résultat majeur de nous énoncerons dans cette section (Théorème d'André-Bombieri 2.1) resterait valable si l'on choisissait la normalisation (déjà utilisée dans la sous-section 1.3.2) $|\ |_{v_{\mathfrak{P}}}$ en place de celle que l'on choisit ici, à savoir $|\ |$.

Le corps résiduel de $\mathbb{K}$, défini comme le quotient de l'anneau de valuation

$$\mathcal{O}_v := \{x \in \mathbb{K}\,;\, |x| \leq 1\}$$

par son idéal maximal $\{x \in \mathbb{K}\,;\, |x| < 1\}$ a donc pour caractéristique $p = p_{\mathfrak{P}}$.

Le *point générique* $|\ |$*-adique* (relativement à $\mathbb{K}$) est défini ainsi (on suit ici la présentation faite dans la section 5 du chapitre III de [**DGS**]). Choisissons une variable transcendante t au dessus de $\mathbb{K}$ [1]. La valeur absolue non archimédienne $|\ |$ (initialement sur $\mathbb{K}$) s'étend à l'extension transcendante $\mathbb{K}(t)$ suivant le principe de Gauß :

$$\Big|\frac{\sum_{k=0}^{K} a_k\, t^k}{\sum_{k=0}^{\tilde{K}} \tilde{a}_k\, t^k}\Big| := \frac{\sup_k |a_k|}{\sup_k |\tilde{a}_k|}. \tag{2.2}$$

On choisit maintenant une extension complète, algébriquement close, Ω de $\mathbb{K}$ de manière à ce que t appartienne à cette extension et que la valeur absolue sur Ω étende la valeur absolue prolongée à $\mathbb{K}(t)$ suivant le principe de Gauß (2.2) ; alors la classe $\bar{t}$ de t dans le corps résiduel de $(\Omega, |\ |)$ est (comme t l'est au dessus de $\mathbb{K}$) transcendante au dessus du corps résiduel de $(\mathbb{K}, |\ |)$. Le point $t \in \Omega$ ainsi défini est appelé *point générique* $|\ |$*-adique* (relativement à $\mathbb{K}$), tandis que le disque ouvert

$$\{x \in \Omega\,;\, |x - t| < 1\}$$

est dit *disque générique* $|\ |$*-adique* (relativement à $\mathbb{K}$). Le point générique $|\ |$-adique $t \in \Omega$ ainsi défini est tel que $|t| = 1$; on peut donc préciser en disant qu'il s'agit du *point générique* $|\ |$*-adique (relativement à* $\mathbb{K}$*) de valeur absolue égale à* 1. Si l'on choisit maintenant $r = |a_r| > 0$ (mais $r \neq 1$) dans le *groupe de valuation de* $\mathbb{K}$ (*i.e.* l'image de $\mathbb{K}^*$ par $|\ |$), l'élément $a_r t$ de $(\Omega, |\ |)$ est dit *point générique* $|\ |$*-adique (relativement à* $\mathbb{K}$*) de valeur absolue égale à* r, tandis que le disque ouvert

$$\{x \in \Omega\,;\, |x - a_r t| < r\}$$

est dit *disque générique* $|\ |$*-adique (relativement à* $\mathbb{K}$*) de rayon* $r = |a_r|$.

2.1.2. Rayons de solubilité générique d'un opérateur différentiel $\Psi \in \mathbb{K}\langle z, \partial/\partial z\rangle$ (relativement au choix d'une place finie). Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres, v une place finie (on note $|\ |$ la valeur absolue non archimédienne sur $\mathbb{K}$ associée, normalisée comme à la sous-section 2.1.1 précédente. Soit $r = |a_r|$ un réel strictement positif appartenant au groupe de valuation de $(\mathbb{K}, |\ |)$ et $t_r \in \Omega$ (*cf.* la sous-section 2.1.1 précédente) le point générique $|\ |$-adique (relativement à $\mathbb{K}$) de valeur absolue r.

Soit

$$\Psi(z, \partial/\partial z) = A_\mu(z)\,\frac{\partial^\mu}{\partial z^\mu} + \cdots + A_1(z)\,\frac{\partial}{\partial z} + A_0(z) \tag{2.3}$$

1. Lorsque l'on doit aussi travailler avec le corps des fractions $\mathbb{K}(X_1, ..., X_n)$ ou l'algèbre de Weyl $\mathbb{K}(X_1, ..., X_n)[\theta_{X_1}, ..., \theta_{X_n}]$, on veillera bien sûr à choisir t indépendamment des variables transcendantes $X_1, ..., X_n$.

un opérateur différentiel de degré μ à coefficients dans $\mathbb{K}[z]$, auquel nous nous empressons d'associer (*via* la classique construction de la matrice compagnon) le système différentiel

$$\frac{\partial}{\partial z} - \frac{M(z)}{z} = \frac{\partial}{\partial z} - G(z) = \frac{1}{z}\Big(\theta_z - M(z)\Big), \quad M \in \mathcal{M}_{\mu,\mu}(\mathbb{K}(X)), \tag{2.4}$$

comme dans (1.34) ou dans la section 1.4.3. La solution formelle du système différentiel

$$\Big(\frac{\partial}{\partial z} - G(z)\Big)[f] = \Big(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{M(z)}{z}\Big)[f] = 0$$

au point générique t_r est donnée par

$$\mathscr{U}_r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k(t_r)}{k!}\,(x - t_r)^k, \tag{2.5}$$

où

$$G_k(X) = \frac{M^{[k]}(X)}{X^k}$$

(*cf.* les formules (1.37) permettant de calculer par récurrence les $M^{[k]}$, $k \in \mathbb{N}^*$). La relation inductive permettant de calculer les G_k, $k \in \mathbb{N}$ se déduit d'ailleurs de la relation inductive (1.37) et s'exprime :

$$\begin{aligned} &G_k(X) = \frac{d}{dX}[G_{k-1}(X)] + G_{k-1}(X)\,G(X) \quad \forall\, k \geq 1 \\ &\text{avec} \quad G_0(X) = G(X) = \frac{M(X)}{X}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Étudions la convergence de la série (2.5) pour $x \in \Omega$ (équipé de la norme $|\ |$ déduite de $|\ |$ suivant le principe de Gauß). Cette norme $|\ |$ se prolonge aussi naturellement (suivant même le principe de Gauß déjà utilisé en (2.2) pour le prolongement de $|\ |$ à $\mathbb{K}(t)$, puis à Ω) en une valeur absolue non archimédienne sur $\mathbb{K}(X)$. Relativement à cette valeur absolue (à la source et au but), l'opérateur linéaire $d/dX : \mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}(X)$ est de norme au plus égale à 1. Il résulte alors du jeu de relations inductives (2.6) que l'on a :

$$\forall\, k \geq 1,\ |G_k(t_r)| \leq \sup(1, |G(t_r)|)^k. \tag{2.7}$$

Reste à contrôler dans (2.5) les facteurs $1/k!$ sachant que l'on a convenu de la normalisation $|p| = 1/p$ ($p = p_{\mathfrak{P}}$ désigne ici la caractéristique résiduelle de la classe). Si

$$k = a_{k,0} + a_{k,1}p + \cdots + a_{k,l_k}p^{l_k}$$

désigne le développement de l'entier positif k en base p. Si l'on pose, compte tenu de la normalisation $|p| = 1/p$,

$$\mathrm{ord}_p(x) = -\frac{\log|x|}{\log p} \quad \forall\, x \in \Omega, \tag{2.8}$$

on constate, puisque $[k/p^\kappa]$ compte, pour $1 \leq \kappa \leq l_k$, le nombre de multiples de p^κ inférieurs ou égaux à k, que

$$\mathrm{ord}_p(k!) = \sum_{\kappa=1}^{l_k}[k/p^\kappa] = \sum_{\kappa=1}^{l_k} a_\kappa(1 + p + \cdots + p^{\kappa-1}) = \frac{\sum_{\kappa=1}^{l_k} a_\kappa\,(p^\kappa - 1)}{p-1} = \frac{k - \sum_{\kappa=0}^{l_k} a_\kappa}{p-1}.$$

On a donc

$$|k!| = p^{-\mathrm{ord}_p(k!)} \geq \left(p^{\frac{1}{p-1}}\right)^k.$$

On constate donc que la série (2.5) converge dans Ω dès que

$$|x - t_r| \, \frac{\sup(1, |G(t_r)|)}{p^{\frac{1}{p-1}}} < 1.$$

Cette série admet donc un rayon de convergence strictement $R_v(\Psi, r)$ positif (que l'on convient de majorer par r),

$$|p|^{\frac{1}{p-1}} \times \min(1, |G(t_r)|^{-1}) \leq R_v(\Psi, r) \leq r,$$

que l'on appelle, dans le cas particulier $r = 1$, *rayon de solubilité générique de l'opérateur différentiel* Ψ (pour la valeur absolue non archimédienne $|\ |$ correspondant à une place finie $v = v_{\mathfrak{P}}$ normalisée de manière à ce que $|p_{\mathfrak{P}}| = 1/p_{\mathfrak{P}}$). On remarque que le nombre $p^{1/(p-1)}$ correspond en fait au rayon de convergence de la série entière $\exp x := \sum_{k\geq 0} x^k/k!$; dans le disque ouvert

$$D(0, p^{1/(p-1)}) := \{x \in \Omega \, ; \, |x| < p^{1/(p-1)}\} \, ,$$

on définit ainsi la fonction exponentielle. Cette fonction exp envoie $D(0, p^{1/(p-1)})$ dans le disque ouvert $D(1, p^{1/(p-1)})$ et son inverse est naturellement la fonction log définie pour $x \in D(0, p^{1/(p-1)})$ comme la somme de la série entière

$$\log x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}.$$

Étant données toutes les places finies v du corps $\mathbb{K}$, on définit, comme Bombieri [2], le *rayon global de solubilité de l'opérateur différentiel* $\Psi \in \mathbb{K}\langle z, \partial/\partial z\rangle$ comme

$$\rho(\Psi) = \sum_{\mathfrak{P} \text{ premier de } \mathbb{A}_{\mathbb{K}}} \log^+(1/R_{v_{\mathfrak{P}}}(\Psi, 1)) \in [0, +\infty]. \tag{2.9}$$

Ce rayon global de solubilité $\rho(\Psi)$ peut être aussi compris (ce que l'on sera amené à faire par la suite par souci de commodité) comme le rayon global de solubilité $\rho(\mathbf{\Psi})$ du $\mathbb{K}(z)[\theta_z]$-module différentiel $\mathbf{\Psi}(z, \partial/\partial z)$ attaché à l'opérateur différentiel Ψ suivant :

$$M_{\mathbf{\Psi}} = \frac{\mathbb{K}(z)\,[\theta_z]}{\mathbf{\Psi}\,\mathbb{K}(z)\,[\theta_z]}\,, \quad \mathbf{\Psi} = \partial_z - G = \frac{1}{z}(\theta_z - M). \tag{2.10}$$

2. En fait, la normalisation des places adoptée par Bombieri (et reprise par Y. André dans le chapitre I, puis le chapitre IV de [**And0**]) est celle ($|\ |_{v_{\mathfrak{P}}}$) que nous avons introduit dans la section 1.3.2. Le changement de normalisation est irrelevant, comme nous l'avons remarqué (du fait que $1 \leq d/d_{\mathfrak{P}} \leq d$ pour tout $\mathfrak{P}$), en ce qui concerne la condition qui nous intéressera par la suite, à savoir $\rho(\Psi) < +\infty$. L'intérêt de la normalisation de Bombieri-André proposée dans [**And0**] est de disposer en fait d'une notion de rayon global de solubilité invariante lorsque $\mathbb{K}$ se trouve remplacé par une extension finie (*cf.* [**And0**], IV-3, Lemme 1). Ceci n'est pas le cas pour la notion introduite ici (du fait de la normalisation non *adhoc*) $|p_{\mathfrak{P}}| = 1/p_{\mathfrak{P}}$.

2.1.3. Énoncé du théorème de Bombieri-André (pour un opérateur différentiel $\Psi \in \mathbb{K}\langle z, \partial/\partial z\rangle$). Cette sous-section reprend essentiellement l'introduction de [**LdV**]. Étant donné un opérateur différentiel $\Psi \in \mathbb{K}\langle z, \partial/\partial z\rangle$ comme dans la sous-section précédente (voir (2.3))

$$\Psi(z, \partial/\partial z) = A_\mu(z)\,\frac{\partial^\mu}{\partial z^\mu} + \cdots + A_1(z)\,\frac{\partial}{\partial z} + A_0(z)\,,$$

on peut lui associer le système compagnon (2.4) et la série formelle

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k(X)}{k!}\, z^k$$

à coefficients dans $\mathbb{K}(X)$. Une notion de *taille* (ou de *hauteur logarithmique*) est naturellement attachée à l'opérateur différentiel Ψ, considéré sous la forme du système différentiel compagnon (2.4). Pour chaque place finie $v = v_{\mathfrak{P}}$ de $\mathbb{K}$, la valeur absolue $|\ |_v$ (normalisée comme dans la section 1.3.2) se prolonge naturellement à $\mathbb{K}[X]$, puis à $\mathbb{K}(X)$, suivant le principe de Gauß (comme dans (2.2)) :

$$\Big|\frac{\sum_0^K a_k X^k}{\sum_0^{\widetilde{K}} \tilde{a}_k X^k}\Big|_v := \frac{\max_k |a_k|_v}{\max_k |\tilde{a}_k|_v}.$$

On définit alors la *taille logarithmique* de Ψ par

$$\sigma(\Psi) := \limsup_{K\to+\infty} \Big(\frac{1}{K+1} \sum_{v \text{ place finie de } \mathbb{K}} \log^+ \Big(\max_{0\le k\le K} \Big|\frac{G_k(X)}{k!}\Big|_v\Big).\Big) \tag{2.11}$$

Cette définition de la *taille logarithmique* (ou *hauteur logarithmique*) de l'opérateur Ψ, au travers de son système différentiel compagnon (2.4), est bien sûr à rapprocher de la définition de la taille d'une série entière $\sum_{k\ge 0} a_k z^k$ à cofficients dans $\mathbb{K}$, telle qu'elle a été définie en (1.24), puis (1.25) (et exploitée dans (1.26) pour caractériser en termes de finitude de la taille logarithmique la condition pour la série $\sum_{k\ge 0} a_k z^k$ d'être Gevrey Arithmétique d'ordre $s = p/q \in \mathbb{Q}$ prescrit). La seule différence notable ici est que dans cette notion de taille logarithmique $\sigma(\Psi)$, nous ne faisons intervenir que les places finies du corps $\mathbb{K}$ et non toutes les places. Cette taille logarithmique $\sigma(\Psi)$ peut être aussi comprise (ce que l'on sera amené à faire par la suite par souci de commodité) comme la taille $\sigma(\mathbf{\Psi})$ du $\mathbb{K}(z)[\theta_z]$-module différentiel $M_{\mathbf{\Psi}(z,\partial/\partial z)}$ attaché à Ψ par (2.10).
Comme nous l'avions déjà pressenti dans la Remarque 1.11, il est facile d'observer que l'on peut alors rephraser la Définition 1.10 ainsi :

$$\Psi(z, \partial/\partial z) \in \mathbb{K}\langle z, \partial/\partial z\rangle \text{ est un } G-\text{opérateur} \iff \sigma(\psi) = \sigma(\mathbf{\Psi}) < +\infty. \tag{2.12}$$

La condition, pour un opérateur différentiel à coefficients dans un corps de nombres $\mathbb{K}$, d'être un G-opérateur, *i.e.* d'avoir une taille logarithmique $\sigma(\Psi)$ finie, se traduit aussi par une condition encore plus manifestement de nature ultramétrique.

THEOREM 2.1 (le théorème de Bombieri-André, cadre 1D). *Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres et $\Psi \in \mathbb{K}\langle z, \partial/\partial z\rangle$ un opérateur différentiel. Les conditions $\sigma(\Psi) < +\infty$ (i.e. Ψ est un G-opérateur) et $\rho(\Psi) < +\infty$, ou encore, ce qui revient au même,*

$$\prod_{\mathfrak{P} \text{ premier de } \mathbb{A}_{\mathbb{K}}} R_{v_{\mathfrak{P}}}(\Psi, 1) > 0 \tag{2.13}$$

sont équivalentes.

Nous reviendrons sur la preuve de ce résultat (technique, mais attendue) dans la sous-section 2.1.5.

2.1.4. Modules différentiels de Galochkin en dimension supérieure. Dans cette section (prolongeant cette fois la Remarque 1.12) nous considérons toujours un corps de nombres $\mathbb{K}$, mais cette fois nous nous plaçons dans le contexte géométrique multi-variables et considérons un $\mathbb{K}$-schéma $\mathcal{X}$ lisse et de type fini, de dimension n, connexe[3].

Les exemples de référence seront pour nous les schémas affines $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{K}[X_1, ..., X_n])$ et $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{K}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}])$, le schéma projectif $\mathrm{Proj}\,(\mathbb{K}[X_0, ..., X_n])$ et plus généralement le schéma torique lisse $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(\Sigma)$ correspondant à un éventail rationnel complet simple de $\mathbb{R}^n$ (*cf.* [**Fult**]) (par exemple l'éventail dual à un polyèdre convexe n-dimensionnel $(\mathbb{R}^n)^*$ de sommets dans le réseau $\mathbb{Z}^n$, supposé absolument simple), le schéma torique étant dans ce cas obtenu en recollant les variétés toriques affines $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{K}[\check{\sigma}])$, σ parcourant la famille des cônes de l'éventail Σ.

On note $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ le faisceau des fonctions régulières sur le $\mathbb{K}$-schéma $\mathcal{X}$ et $\mathscr{D}_{\mathcal{X}}$ le $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module engendré par les champs de vecteurs sur ce $\mathbb{K}$-schéma. On désigne aussi par $\kappa(\mathcal{X}_{\mathbb{K}}) = \kappa(\mathcal{X})$ le corps des fonctions rationnelles sur $\mathcal{X}$, *i.e.* le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$.

L'objet qui était le concept d'opérateur différentiel $\Psi \in \mathbb{K}\langle z, \partial/\partial z\rangle$ introduit dans le contexte d'une variable sera, dans ce contexte géométrique multi-variables, celui de $\kappa(\mathcal{X})/\mathbb{K}$ module différentiel libre de rang fini. Il s'agit d'une paire (M, ∇), où $M \simeq (\kappa(\mathcal{X}))^\mu$ et

$$\nabla \; : M \to M \otimes_{\kappa(\mathcal{X})} \Omega^1_{\kappa(\mathcal{X})/\mathbb{K}}$$

est une $\kappa(\mathcal{X})/\mathbb{K}$-connexion intégrable, *i.e.*

$$\nabla[a \cdot m] = m \otimes da + a\,\nabla[m] \quad \forall\, m \in M,\ \forall\, a \in \kappa(\mathcal{X}) \quad \text{(Leibniz)}$$
$$\nabla^2 = 0 \text{ (condition d'intégrabilité)}.$$

Parallèlement à ce point de vue algébrique, on envisagera un point de vue faisceautique plus géométrique [**AB, LdV**].

On considèrera (M, ∇) comme la fibre $(\mathcal{M}, \boldsymbol{\nabla})_\eta$ au point générique η d'un $\mathscr{D}_{\mathcal{X}}$-module (à gauche), libre et de rang μ. On admettra que, quitte à choisir un schéma $\mathbb{K}$-schéma convenable[4], l'on peut toujours se mettre dans cette situation où :

- $(\mathcal{M}, \boldsymbol{\nabla})_\eta = (M, \nabla)$;
- le fibré vectoriel $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}_x$ désignant la fibre de $\mathcal{M}$ au dessus de $x \in \mathcal{X}$) est un fibré libre (de rang ici μ), $\boldsymbol{\nabla}$ étant ici comprise comme une connexion intégrable sur ce fibré $\mathcal{M}$, *i.e.* une application

$$\boldsymbol{\nabla} \; : v \in \mathscr{D}_{\mathcal{X}} \to \nabla_v \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M})$$

3. Le prototype d'un tel schéma affine sera $\mathbb{K}[X_1, ..., X_N]/(P_1, ..., P_M)$ $(N \geq n)$ où les $P_j \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_N]$ sont tels que la matrice jacobienne $\mathrm{Jac}(P_1, ..., P_M)$ soit de rang exactement $N - n$ en tout point de $\mathbb{K}^n$, donc de $\mathbb{C}^n$. Tout point x possèdera admettra donc un voisinage de Zariski *étale* au dessus d'un ouvert d'un espace affine (on parlera alors de *coordonnés locales étales*).

4. C'est-à-dire à remplacer $\mathcal{X}$ par un autre $\mathbb{K}$-schéma (lisse, de type fini, géométriquement connexe et lui aussi de dimension relative n), $\widetilde{\mathcal{X}}$ (ayant même corps de fonctions rationnelles $\kappa(\mathcal{X})$ que $\mathcal{X}$) ; on notera pour simplifier ce nouveau schéma $\widetilde{\mathcal{X}}$ comme le schéma $\mathcal{X}$.

qui se plie aux trois règles :

$$\nabla_{fv}(m) = f\,\nabla_v(m) \quad \forall f \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}},\ \forall v \in \mathscr{D}_{\mathcal{X}},\ \forall m \in \mathcal{M}$$

$$\nabla_v(fm) = v(f)\,m + f\,\nabla_v(m) \quad \forall f \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}},\ \forall v \in \mathscr{D}_{\mathcal{X}},\ \forall m \in \mathcal{M} \text{ (Leibnitz)}$$

$$\nabla_{[v,w]}(m) = [\nabla_v, \nabla_w](m) \quad \forall v, w \in \mathscr{D}_{\mathcal{X}},\ \forall m \in \mathcal{M} \text{ (clause d'intégrabilité)} ;$$

– dans $\mathcal{X}$, on dispose d'une base de sections $(e_1, ..., e_\mu)$ pour $\mathcal{M}$ et de coordonnées étales globales $x_1, ..., x_n$.

Sous pareilles conditions, il existe des matrices $G_1, ..., G_n \in \mathcal{M}_{\mu,\mu}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U))$ telles que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}[e_1, ..., e_\mu] = [e_1, ..., e_\mu] \cdot G_j(x),\ j = 1, ..., n.$$

On définit alors récursivement, une fois $G_1, ..., G_n$ ainsi définis, les

$$\frac{\nabla_{\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}}[e_1, ..., e_\mu]}{\alpha!} = [e_1, ..., e_\mu] \cdot G_\alpha(x), \quad \alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{(0, ...0)\},$$

où les relations inductives sont données dans U par

$$G_{\alpha_1,...,\alpha_j+1,...,\alpha_\mu}(x) = \frac{1}{\alpha_j + 1}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} + G_j(x)\Big) \cdot G_\alpha(x),\ j = 1, ..., n, \tag{2.14}$$

pour tout $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$. On convient pour cela de noter

$$\nabla_{\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}}$$

comme le produit des opérateurs $\nabla_{\partial/\partial x_j}$, $j = 1, ..., n$ (commutant entre eux du fait de la clause d'intégrabilité portant sur la connexion) respectivement itérés α_1,...,α_n fois.

Pour associer à (M, ∇) (pensé ici comme $(\mathcal{M}, \nabla)$ une *taille logarithmique* comme nous en avons su en associer une à un opérateur différentiel $\Psi \in \mathbb{K}\langle z, \partial/\partial z\rangle$ (*cf.* (2.11)) pensé en termes de la matrice compagnon associée, il nous faut, étant donnée une place finie $v = v_{\mathfrak{P}}$ de $\mathbb{K}$, donner un sens aux $|G_\alpha|_v$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, définis inductivement par (2.14), les G_α étant cette fois des matrices à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$. Notons ici que, par rapport à la situation dans le contexte de une variable et à la notion de taille de $\Psi \in \mathbb{K}\langle z, \partial/\partial z\rangle$ introduite en (2.11), nous avons ici incorporé aux G_α les facteurs correspondant à la division par des factorielles.

Dans le cas particulier (important) où $\mathcal{X}$ est un sous-schéma ouvert du schéma affine Spec $(\mathbb{K}[X_1, ..., X_n])$ (par exemple Spec $(\mathbb{K}[X_1, ..., X_n])$ où Spec $(\mathbb{K}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm n}])$, plus généralement Spec $(\mathbb{K}[\check{\sigma}])$, où σ désigne un cône rationel strict de $\mathbb{R}^n$, pour ne parler que des exemples que nous avons mentionné), les choses sont particulièrement simples car les éléments de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ se représentent par des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ en les coordonnées étales globales $(x_1, ..., x_n)$. Il est naturel alors d'utiliser le principe d'extension de Gauß et de définir :

$$|G_\alpha|_v = \sup\{|G_{\alpha,j,k}|_v\,;\, G_{\alpha;j,l} \text{ entrée de } G_\alpha\}$$

en posant, pour toute place finie $v = v_{\mathfrak{P}}$ de $\mathbb{K}$:

$$|G_{\alpha;j,l}|_v = \Big|\frac{\sum_{k\in\mathbb{N}^n} a_{\alpha;j,l;k}x^k}{\sum_{k\in\mathbb{N}^n} \tilde{a}_{\alpha;j,l;k}\,x^k}\Big|_v := \frac{\sup_k |a_{\alpha;j,l;k}|_v}{\sup_k |\tilde{a}_{\alpha;j,l;k}|_v}.$$

Une telle approche vaut encore dans certains des exemples qui nous intéresseront, en particulier celui où $\mathcal{X}$ est un schéma torique lisse correspondant à l'éventail dual d'un polyèdre rationnel convexe absolument simple de $(\mathbb{R}^n)^*$ (puisque les changements de cartes entre schémas affines euclidiens sont dans ce contexte monoidaux inversibles), *cf.* par exemple les systèmes différentiels de Horn (1.12) attachés aux fonctions hypergéométriques (dans le cas de non-confluence), voir la section 1.2.

En revanche, les choses s'avèrent un peu plus complexes lorsque $\mathcal{X}$ est un $\mathbb{K}$-schéma en toute généralité. Le cadre géométrico-arithmétique dans lequel il convient alors de se placer a été formalisé dans [**AB**], puis repris et exploité dans [**LdV**]. Nous le décrivons brièvement ci-dessous.

Pour ce faire, nous introduisons, comme dans [**AB**], la notion de S-*modèle* du corps des fonctions $\kappa(\mathcal{X}) = \kappa(\mathcal{X}_{\mathbb{K}})$. Cette notion est inspirée (et motivée) par le principe de la *réduction modulo* p d'un schéma $\mathcal{X}_{\mathbb{Z}}$ au dessus de $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$: si l'on considère la fibre au point générique, on introduit un schéma $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ au dessus de $\mathbb{Q}$, tandis que si l'on prend la fibre au dessus d'un point fermé $v = v_p$ (p premier) de $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, on obtient un schéma $\mathcal{X}_{\mathbb{Z},p}$ au dessus du corps résiduel fini $\mathbb{F}_p$ (*cf.* [**Har**], chapitre II, en particulier section 3 et exercices). Soit $\mathcal{X}$ un $\mathbb{K}$-schéma. Si S désigne un sous-schéma ouvert de $\operatorname{Spec} A_{\mathbb{K}}$ et si

$$\mathcal{X} \xrightarrow{f} S$$

est un morphisme (de schémas) surjectif de type fini tel que les fibres soient géométriquement connexes, on dit que $\mathcal{X}/S$ est un S-modèle du corps $\kappa(\mathcal{X}) = \kappa(\mathcal{X}_{\mathbb{K}})$ (au sens de [**AB**]). La réalisation d'un tel modèle est possible ainsi [**LdV**] : étant donné le $\mathbb{K}$-schéma $\mathcal{X}$ (lisse, de type fini, de dimension n et géométriquement connexe), on peut toujours construire [5] un sous-schéma ouvert S de $\operatorname{Spec} A_{\mathbb{K}}$, au dessus duquel vit un S-schéma $\mathcal{X}_S$ de type fini et à fibres géométriquement connexes, tel que, en termes de produit fibré (*cf.* [**Har**], II.3), on ait la représentation :

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_S \times_S \operatorname{Spec}\mathbb{K} \tag{2.15}$$

(on rappelle que $\operatorname{Spec}\mathbb{K} = \{(0)\}$ ensemblistement parlant puisque $\mathbb{K}$ est un corps). On prend alors pour f le composé du morphisme de projection $\mathcal{X} \to \mathcal{X}_S$ avec le morphisme de type fini $f_S : \mathcal{X}_S \to S$ et l'on a bien ainsi réalisé un S-modèle lisse pour $\kappa(\mathcal{X})$. Dans ce modèle, le module $\kappa(\mathcal{X})/\mathbb{K}$-différentiel (M, ∇) s'interprète comme $(\mathcal{M}, \boldsymbol{\nabla})_\eta$, où η désigne le point générique du $\mathbb{K}$-schéma $\mathcal{X}$. Pour chaque place finie v de S, notons η_v le point générique de la fibre fermée (spéciale) $\mathcal{X}_{k(v)}$, où $k(v)$ désigne le corps résiduel $k(v) = \mathcal{O}_v/\mathfrak{M}_v \simeq \mathbb{Z}/p_{\mathfrak{P}}\mathbb{Z}$ (si $v = v_{\mathfrak{P}}$). L'anneau local $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\eta_v}$ est un anneau de valuation discrète de corps résiduel $k(v)$, avec un paramètre d'uniformisation (c'est-à-dire un générateur de l'unique idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\eta_v}$) π_v (on suit ici à la lettre la présentation de [**AB**]). On induit ainsi une norme $|\ |_{\mathcal{X},v}$ sur le corps $\kappa(\mathcal{X}_{k(v)})$, que l'on normalise (suivant le procédé de Gauß) pour qu'elle prolonge $|\ |_v$ depuis $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{k(v)}}(\mathcal{X}_{k(v)})$. Ainsi le choix d'un S-modèle pour le corps $\kappa(\mathcal{X}) = \kappa(\mathcal{X}_{\mathbb{K}})$ induit le choix d'une valeur absolue ultramétrique $|\ |_{\mathcal{X}/S,v}$ de manière cohérente (en termes schématiques, donc géométriques, ce en fonction des places finies v de $\operatorname{Spec} A_{\mathbb{K}}$) sur $\kappa(\mathcal{X})$. Relativement à ce choix, donc à ce S-modèle, la taille logarithmique du $\kappa(\mathcal{X}_{\mathbb{K}})/\mathbb{K}$ module différentiel (M, ∇) (conditionnée ici par le choix du $\mathbb{K}$-schéma $\mathcal{X}$, puis du modèle $f : \mathcal{X} \to S$) est définie comme la taille

5. *Cela doit être plus un jeu d'écritures formelles, mais je dois encore comprendre pourquoi : c'est une des questions que je dois poser à Qing pour m'éclairer. Pour moi, l'idée est calquée sur le principe de la réduction modulo p mentionné plus haut.*

logarithmique du $\mathcal{X}/\mathbb{K}$-module différentiel $(\mathcal{M}, \boldsymbol{\nabla})$, à savoir par :

$$\begin{aligned}&\sigma_{\mathcal{X}/S}\big((M,\nabla)\big) = \sigma_{\mathcal{X}/S}\big((\mathcal{M},\boldsymbol{\nabla})\big) = \\ &= \limsup_{K\to+\infty}\Big(\frac{1}{K+1}\sum_{v \text{ point fermé de S}} \sup_{|\alpha|\le K} \log^+\Big(\max_{j,l}\big|G_{\alpha;j,l}\big|_{\mathcal{X}/S,v}\Big)\Big).\end{aligned} \tag{2.16}$$

Cela nous conduit à la définition suivante, étendant ainsi à plusieurs variables la Définition de G-opérateur proposée en (1.38) dans la Définition 1.10 et revisitée en (2.12), puis en (2.13) à la lumière des concepts ultamétriques introduits dans ce chapitre.

Definition 2.2 (G-module de Galochkin). Soit $\mathbb{K}$-un corps de nombres, $\mathcal{X}$-un $\mathbb{K}$-schéma lisse, de type fini et géométriquement connexe, et $\kappa(\mathcal{X}) = \kappa(\mathcal{X}_{\mathbb{K}})$ son corps de fractions rationnelles. Un $\kappa(\mathcal{X})/\mathbb{K}$-module différentiel (M, ∇) est dit *de Galochkin* (ou encore G-$\kappa(\mathcal{X})/\mathbb{K}$-module différentiel) s'il existe un $\mathbb{K}$-schéma $\widetilde{\mathcal{X}}$ ayant pour corps des fractions $\kappa(\mathcal{X})$ et un sous-schéma ouvert S de $A_{\mathbb{K}}$ tel que $\kappa(\mathcal{X})/S$ soit un S-modèle (au sens de [**AB**]) pour $\kappa(\mathcal{X})$ et que (M, ∇) soit la fibre générique au point générique du $\widetilde{\mathcal{X}}/\mathbb{K}$-module $(\mathcal{M}, \boldsymbol{\nabla})$ correspondant, tel que

$$\sigma_{\widetilde{\mathcal{X}}/S}\big((\mathcal{M},\boldsymbol{\nabla})\big) < +\infty, \tag{2.17}$$

cette condition (2.17) ne dépendant pas alors du choix du S-modèle $\widetilde{\mathcal{X}}$ une fois $\widetilde{\mathcal{X}}$ prescrit.

Il nous reste à donner ici une réinterprétation ultramétrique (en termes de minoration de rayons de convergence de solutions formelles du $\mathscr{D}_{\widetilde{\mathcal{X}}}$-module $(\mathcal{M}, \boldsymbol{\nabla})$ aux points génériques correspondant aux places finies de S) de la condition (2.17). On généralise ainsi le théorème d'André-Bombieri 2.1 à ce cadre géométrique multi-D. Quand bien même nous nous servons du S-modèle pour formuler l'énoncé, le choix de S de manière à ce que $\widetilde{\mathcal{X}}/S$ soit un S-modèle de $\kappa(\mathcal{X})$ s'avèrera de fait irrelevant dans cet énoncé.

A suivre, je dois introduire et formuler l'énoncé.

Theorem 2.3 (théorème d'André-Bombieri, cadre géométrique multi-D). *À venir ...*

2.1.5. Esquisse de preuve du théorème d'André-Bombieri (1D et multi-D).

Bibliographie

[AB] Y. André, F. Baldassari, Geometric theory of G-functions, *dans Arithmetic Geometry*, Cortona 1994 (F. Catanese, ed.), Ed. Symp. Math. XXXVII, Cambridge University Press, 1997.

[Am] Y. Amice, *Les nombres p-adiques*, Que sais-je ? Presses Universitaires de France, 1975.

[And0] Y. André, *G-functions and Geometry*, Aspects of Mathematics, Vieweg, 1989.

[And1] Y. André, Séries Gevrey de type arithmétique, I. Théorèmes de pureté et de dualité, Annals of Mathematics 151 (2000), pp. 705–740.

[And2] Y. André, Séries Gevrey de type arithmétique, II. Transcendance sans transcendance, Annals of Mathematics 151 (2000), pp. 741–756.

[BG] C. A. Berenstein, R. Gay, *Complex variables, an introduction*, GTM 125, 1991.

[BG2] C. A. Berenstein, R. Gay, Complex Analysis and Special Topics in Harmonic Analysis, Springer, 1995.

[Chud1] D. Chudnovsky, G. Chudnovsky, Applications of Padé approximations to diophantine inequalities in values of G-functions, pp. 9–51 in *Number theory (New York 1983-1984)*, Lecture Notes in Math. 1135, Springer-Verlag, Berlin (1985).

[Chud2] D. Chudnovsky, G. Chudnovsky, Applications of Padé approximation to the Grothendieck conjecture on linear differential equations, pp. 52–100 in *Number theory (New York 1983-1984)*, Lecture Notes in Math. 1135, Springer-Verlag, Berlin (1985).

[Del] P. Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes 163, Springer, 2002.

[DGS] B. Dwork, G. Gerotto, F.J. Sullivan, *An introduction du G-functions*, Annals of Mathematic Studies 133, Princeton University Press, 1994.

[Fult] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press, Princeton, 1993.

[GGR] I.M. Gel'fand, M.I. Graev, V.S. Retakh, General hypergeometric systems of equations and series of hypergeometric type, Russian Math. Surveys 47 :4, 1992, pp. 1–88, available on line : `http://iopscience.iop.org/0036-0279/47/4/R01`

[GKZ] I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Mathematics : Theory and Applications. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.

[Har] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, 1977.

[Horn] J. Horn, Über die Konvergenz hypergeometrischer Reihen zweier und dreier Veränderlichen, Math. Ann. **34**, 1889, pp. 544-600.

[Katz] N. Katz, Algebraic solutions of Differential Equations (p-curvature and the Hodge filtration), Invent. Math. 18 (1972), pp. 1–118.

[LdV] L. di Vizio, Sur la théorie géométrique des G-fonctions, le théorème de Chudnovsky à plusieurs variables, Math. Ann. 319 (2001), pp. 181–213.

[PST] M. Passare, T. Sadykov, A. Tsikh, Singularities of hypergeometric functions in several variables. Compos. Math. 141, 2005, no. 3, pp. 787-810.

[Ram1] J.P. Ramis, *Séries divergentes et théories asymptotiques*, Panomaras et Synthèses 121, Société Mathématique de France, 1993.

[Ram2] J.P. Ramis, Gevrey Asymptotics and Applications to Holomorphic Ordinary Differential Equations, pages 44-99 dans *Differential Equations and Asymptotic Theory in Mathematical Physics*, C. Hua et R. Wong *ed.*, Series in Analysis 2, World Scientific Publishing, 2004.