DS UE MA6012, 2012-2013, Vendredi 22/03/2013

Texte en italiques et corrigé en roman

Exercice 1

Soit H un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert ; on note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire et $\|\ \|$ la norme associée.

1. *Montrer que si $T : H \to H$ est un opérateur linéaire continu autoadjoint, alors*
$$\forall\, x \in H,\ \langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$
D'après la formule d'adjonction (Proposition 1.14 du polycopié), on a, pour tout $x \in H$, $\langle T(x), x\rangle = \langle x, T^*(x)\rangle = \overline{\langle x, T(x)\rangle}$ (puisque l'on suppose de plus $T = T^*$). Ainsi $\langle T(x), x\rangle = \overline{\langle T(x), x\rangle}$, ce qui signifie que $\langle x, T(x)\rangle \in \mathbb{R}$.

2. *Soit $T : H \to H$ un opérateur linéaire continu tel que la condition $(*)$ soit satisfaite.*
   - *En écrivant, pour x et y quelconques dans H et pour $\lambda \in \mathbb{C}$ approprié, que $\langle T(x+\lambda y), x+\lambda y\rangle \in \mathbb{R}$, vérifier que l'on a*
   $$\forall\, x, y \in H,\ \langle T(x), y\rangle - \langle T(y), x\rangle \in i\mathbb{R} \text{ et } \langle T(x), y\rangle + \langle T(y), x\rangle \in \mathbb{R}.$$
   Cette question (et la suivante) faisaient l'objet de l'exercice 7 du guide 4 dans le contrat sous Ulysse. On redonne la correction ici. Comme suggéré dans l'énoncé, on écrit, pour x, y quelconques dans H et λ arbitraire dans $\mathbb{C}$,
   $$\begin{aligned}\langle T(x+\lambda y), x+\lambda y\rangle &= \langle T(x), x\rangle + |\lambda|^2\langle T(y), y\rangle \\ &\quad + \lambda\langle T(y), x\rangle + \overline{\lambda}\langle T(x), y\rangle\,;\end{aligned}$$
   en spécifiant $\lambda = it$ avec t réel, on trouve que
   $$\langle T(y), x\rangle - \langle T(x), y\rangle \in i\mathbb{R}\,;$$
   en spécifiant maintenant $\lambda = t \in \mathbb{R}$, on trouve
   $$\langle T(y), x\rangle + \langle T(x), y\rangle \in \mathbb{R}\,.$$
   - *En déduire que T est nécessairement autoadjoint.* D'après ce qui a été établi à l'item précédent, le segment joignant les points d'affixes respectives les nombres complexes $\alpha = \langle T(y), x\rangle$ et $\beta = \langle T(x), y\rangle$ est

parallèle à l'axe imaginaire, tandis que le milieu de ce segment est sur l'axe réel. Les deux nombres sont donc conjugués et on a

$$\langle T(x)\,,\,y\rangle = \overline{\langle T(y)\,,\,x\rangle} = \langle x\,,\,T(y)\rangle\,,$$

ce qui montre que T est autoadjoint.

– *Montrer que H se décompose alors sous la forme*

$$H = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_H - T) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_H - T)}.$$

Il s'agit juste ici d'invoquer la Proposition 1.15 du cours : l'orthogonal du noyau de l'opérateur $\mathrm{Id}_H - T$ est égal à l'adhérence de l'image de son adjoint, c'est-à-dire à $\overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_H - T^*)} = \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_H - T)}$ (puisque l'on suppose de plus ici T autoadjoint, comme l'est aussi Id_H, donc $\mathrm{Id}_H - T$).

3. *On suppose dans cette question que $T = P_{F_2} \circ P_{F_1}$, où F_1 et F_2 sont des sous-espaces fermés de H et P_F désigne chaque fois l'opérateur de projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel fermé F.*

– *Exprimer T^* en fonction de P_{F_1} et P_{F_2} ; montrer ensuite que le noyau de $\mathrm{Id}_H - T^*$ est égal à $F_1 \cap F_2$ et que l'on a*

$$H = (F_1 \cap F_2) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_H - T)}.$$

Les quatre items de cette question sont entièrement traités dans le polycopié (Proposition 1.16) et j'avais suggéré que vous les regardiez en exercice (je n'avais pas traité la preuve entièrement en cours faute de temps). On se limite ici à $M = 2$, ce qui simplifie même les choses. Je redonne la correction ici. Comme P_{F_1} et P_{F_2} sont des projections orthogonales sur des sous-espaces fermés, ce sont des opérateurs continus autoadjoints (exemple 1.14 du cours). D'autre part $T^* = P_{F_1}^* \circ P_{F_2}^* = P_{F_1} \circ P_{F_2}$ puisque $(S_1 \circ S_2)^* = S_2 \circ S_1^*$ (voir le cours). Dire que x est dans le noyau de $\mathrm{Id}_H - T^*$ équivaut à dire que $P_{F_1}[P_{F_2}(x)] = x$. Or on a

$$\|P_{F_1}[P_{F_2}(x)]\| \leq \|P_{F_2}(x)\| \leq \|x\| \tag{1}$$

puisque toute projection orthogonale sur un sous-espace fermé est un opérateur continu de norme égale à 1 (encore l'exemple 1.14 du cours). Si $P_{F_1}[P_{F_2}(x)] = x$, on a donc (d'après l'encadrement (1)) $\|P_{F_2}(x)\| = \|x\|$, ce qui implique $P_{F_2}(x) - x = 0$ d'après le théorème de Pythagore, donc $x \in F_2$. Mais on a aussi $\|P_{F_1}(x)\| = \|P_{F_1}[P_{F_2}(x)]\| = \|x\|$, ce qui implique $P_{F_1}(x) - x = 0$, toujours d'après le théorème de Pythagore, c'est-à-dire $x \in F_1$. Le noyau de T^* est donc inclus dans $F_1 \cap F_2$. Réciproquement, si $x \in F_1 \cap F_2$, on a $T^*(x) = P_{F_1}[P_{F_2}(x)] = P_{F_1}(x) = x$. On a bien prouvé par conséquent $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_H - T^*) = F_1 \cap F_2$. En appliquant finalement la Proposition 1.15 du cours à l'opérateur $\mathrm{Id}_H - T^*$, on trouve bien

$$H = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_H - T^*) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathrm{Im}\big((\mathrm{Id}_H - T^*)^*\big)} = (F_1 \cap F_2) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_H - T)}.$$

– Soit $y \in H$. *On note T^k le composé k-fois de l'opérateur par lui-même (lorsque $k \in \mathbb{N}^*$) et $T^0 = \mathrm{Id}_H$. Montrer que la suite $(\|T^k(y)\|)_{k\geq 0}$ converge vers une limite $l(y) \geq 0$.* Comme T est un opérateur de norme au plus égale à 1 (c'est le composé de deux projections orthogonales), la suite $(\|T^k(y)\|)_{k\geq 0}$ est une suite décroissante de nombres positifs. Comme toute suite de nombres réels décroissante minorée (ici par 0), elle admet une limite $l(y) \geq 0$.

– *Montrer que, si $l(y) > 0$, on peut définir $u_k(y) = T^k(y)/\|T^k(y)\|$ pour tout $k \geq 0$. Vérifier que l'on a*

$$\forall\, k \geq 0,\ \|T(u_k(y))\| \leq \|P_{F_1}(u_k(y))\| \leq \|u_k(y)\| = 1$$

et déduire du fait que $\lim_{k\to+\infty} \|T(u_k(y))\| = 1$ que

$$\lim_{k\to+\infty} \|P_{F_1}(u_k(y)) - u_k(y)\| = 0,$$

puis que la suite $\big(u_k(y) - T(u_k(y))\big)_{k\geq 0}$ converge vers 0 dans H. En déduire dans ce cas

$$\lim_{k\to+\infty} T^k\big((\mathrm{Id}_H - T)(y)\big) = 0. \qquad (**)$$

Comme la suite $(\|T^k(y)\|)_{k\geq 0}$ est décroissante, elle est minorée par sa limite $l(y) > 0$ et l'on peut affirmer que $\|T^k(y)\| > 0$ pour tout $k \geq 0$, ce qui rend licite la définition de $u_k(y)$. Comme P_{F_1} et P_{F_2} sont des projections orthogonales sur des sous-espaces vectoriels fermés, donc des opérateurs de norme 1 (*cf.* l'exemple 1.14 du cours), on a

$$\begin{aligned}\forall\, k \geq 0,\ \|T(u_k(y))\| &= \|P_{F_2}[P_{F_1}(u_k(y))]\| \leq \\ &\leq \|P_{F_1}(u_k(y))\| \leq \|u_k(y)\| = 1.\end{aligned} \qquad (2)$$

Comme $T(u_k(y)) = T^{k+1}(y)/\|T^k(y)\|$ et que la suite $(\|T^k(y)\|)_{k\geq 0}$ converge en décroissant vers un nombre $l(y) > 0$, on a bien

$$\lim_{k\to+\infty} \|T(u_k(y))\| = 1.$$

En passant à la limite dans l'encadrement (2) lorsque k tend vers l'infini, on trouve

$$\lim_{k\to+\infty} \|P_{F_1}(u_k(y))\| = 1 = \lim_{k\to+\infty} \|u_k(y)\|,$$

ce qui implique (d'après le théorème de Pythagore)

$$\lim_{k\to+\infty} \|P_{F_1}(u_k(y)) - u_k(y)\| = 0.$$

Prouver que la suite $\big(u_k(y) - T(u_k(y))\big)_{k\geq 0}$ converge vers 0 revient donc à prouver que la suite $\big(P_{F_1}(u_k(y)) - P_{F_2}[P_{F_1}(u_k(y))]\big)_{k\geq 0}$ tend vers 0. Cela résulte encore du théorème de Pythagore et du fait que

$$\lim_{k\to+\infty} \|P_{F_1}[P_{F_1}(u_k(y))]\| = 1 = \lim_{k\to+\infty} \|P_{F_1}(u_k(y))\|$$

(toujours d'après l'encadrement (2)). On a, pour tout $k \geq 0$,

$$T^k\big((\mathrm{Id}_H - T)(y)\big) = (\mathrm{Id}_H - T)[T^k(y)] = (\mathrm{Id}_H - T)[u_k(y)] \times \|T_k(y)\|.$$

Il en résulte

$$\lim_{k\to+\infty} T^k\big((\mathrm{Id}_H - T)(y)\big) = l \times \lim_{k\to+\infty} (\mathrm{Id}_H - T)[u_k(y)] = 0.$$

– *Montrer que si $l(y) = 0$, $(**)$ est encore vraie.* Cela résulte de ce que $T^k\big((\mathrm{Id}_H - T)(y)\big) = (\mathrm{Id}_H - T)[T^k(y)]$ pour tout $k \geq 0$ et de ce que $\mathrm{Id}_H - T$ est continu et que la suite $(\|T^k(y)\|)_{k\geq 0}$ est supposée dans ce cas tendre vers $l(y) = 0$.
– *Déduire des résultats établis aux quatre items précédents de cette question que*

$$\forall\, x \in H,\ \lim_{k\to+\infty} T^k(x) = P_{F_1\cap F_2}(x).$$

Si $\xi \in F_1 \cap F_2$, on a $T^k(\xi) = \xi$ car $P_{F_1}(\xi) = P_{F_2}(\xi) = \xi$. Si $\eta \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_H - T)$, on écrit $\eta = y - T(y)$ avec $y \in H$ et les résultats établis aux trois items précédents montrent que

$$\lim T^k(\eta) = 0$$

dans ce cas. Si maintenant η est dans $\overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_H - T)}$, il existe, pour tout $\epsilon > 0$, un élément y_ϵ tel que $\|\eta - (y_\epsilon - T(y_\epsilon))\| \leq \epsilon$. Pour tout $k \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \|T^k(\eta)\| &\leq \|T^k\big(\eta - (y_\epsilon - T(y_\epsilon))\big)\| + \|T^k\big(y_\epsilon - T(y_\epsilon)\big)\| \\ &\leq \epsilon + \|T^k\big(y_\epsilon - T(y_\epsilon)\big)\|. \end{aligned}$$

On a donc

$$\limsup_{k\to+\infty} \|T^k(\eta)\| \le \epsilon.$$

Ceci étant valide pour tout $\epsilon > 0$, il en résulte que la suite $(T^k(\eta))_{k\ge 0}$ converge vers 0 pour tout η dans $\overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_H - T)}$. Du fait que l'espace de Hilbert H se scinde comme la somme directe orthogonale de $F_1 \cap F_2$ et de $\overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_H - T)}$ (*cf.* l'item 1), on déduit de ce qui précède que si $x \in H$ s'exprime dans cette décomposition sous la forme $x = \xi + \eta$, alors la suite $(T^k(x))_{k\ge 0}$ converge vers $\xi = P_{F_1\cap F_2}(x)$.

Exercice 2

On rappelle (et on admettra donc par la suite) que la collection des classes e_k *(modulo l'égalité* $d\theta$*-presque partout) des monômes trigonométriques complexes* $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto e^{ik\theta}$ *(*$k \in \mathbb{Z}$*) constitue une base hilbertienne du* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $H_1 = L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi], d\theta/2\pi))$ *des classes de fonctions de* $[0, 2\pi]$ *dans* $\mathbb{C}$ *dont le carré du module est intégrable sur* $[0, 2\pi]$*, équipé du produit scalaire*

$$\langle \dot f, \dot g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} f(\theta)\,\overline{g(\theta)}\,d\theta$$

(avec $\|\ \|_{H_1}$ *la norme correspondante). On désigne par* H_2 *le* $\mathbb{C}$*-espace de Hilbert* $L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi] \times [0, 2\pi], d\tau\, d\theta/(4\pi^2))$ *des classes de fonctions de* $[0, 2\pi]^2$ *dans* $\mathbb{C}$ *dont le carré du module est intégrable sur* $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$*, équipé du produit scalaire*

$$\langle\langle \dot F, \dot G\rangle\rangle = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} F(\theta,\tau)\,\overline{G(\theta,\tau)}\,d\tau\,d\theta$$

(avec $\|\ \|_{H_2}$ *la norme correspondante).*

1. *Montrer que les classes des fonctions*

$$(\theta, \tau) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \longmapsto e^{i(k\theta+l\tau)} \quad (\text{avec } (k, l) \in \mathbb{Z}^2)$$

constituent une base hilbertienne de H_2*.* Cet exercice 2 est adapté du problème 4 du guide d'activités 4 dans le contrat sous Ulysse. Le fait que ce système de classes de fonctions soit orthonormé résulte du théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi^2}\iint_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} e^{i(k_1\theta+l_1\tau)}\, e^{-i(k_2\theta+l_2\tau)}\,d\tau\,d\theta\\ &= \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} e^{i(k_1-k_2)\,\theta}\,d\theta\Big) \times \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} e^{i(l_1-l_2)\,\tau}\,d\tau\Big) = \delta_{k_1}^{k_2} \times \delta_{l_1}^{l_2}\end{aligned}$$

(où le symbole de Kronecker δ_μ^ν vaut 1 si $\mu = \nu$ et 0 sinon) ; la dernière égalité résulte du résultat admis rappelé en exergue de l'exercice. Le fait que le système soit total résulte du fait que les classes de fonctions

$$(\theta, \tau) \longmapsto f(\theta) \times g(\tau),$$

où f et g représentent des éléments de H_1, forment une partie totale dans H_2 (ceci étant toujours couplé avec le résultat rappelé en exergue de l'exercice).

2. *Montrer que l'on définit un opérateur linéaire continu T de H_1 dans lui même en définissant $T(\dot{f})$ (lorsque $\dot{f} \in H_1$), comme la classe de la fonction $I[\dot{f}]$ de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$ qui est définie par*

$$I[\dot{f}](\theta) := \frac{1}{2\pi} \int_0^\theta f(\tau)\, d\tau \quad \forall\, \theta \in [0, 2\pi].$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \forall\, \theta \in [0, 2\pi],\ |I[\dot{f}](\theta)| &\leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_0^\theta d\tau} \times \sqrt{\int_{[0,2\pi]} |f(\tau)|^2\, d\tau} \\ \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{\int_{[0,2\pi]} |f(\tau)|^2\, d\tau} &= \|\dot{f}\|_{H_1}. \end{aligned} \tag{3}$$

On en déduit, en intégrant cette inégalité (élevée au carré) sur $[0, 2\pi]$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} |I[\dot{f}](\theta)|^2\, d\theta \leq \|\dot{f}\|_{H_1}^2.$$

Il en résulte que T est bien un opérateur continu de H_1 dans lui-même de norme au plus égale à 1.

3. *Expliciter l'action sur $\dot{g} \in H_1$ de l'opérateur T^*. L'opérateur T est-il autoadjoint ?* Pour $\dot{f}$ et $\dot{g}$ dans H_1, on a, grâce au théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \langle T(\dot{f}), \dot{g} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} \Big(\frac{1}{2\pi} \int_0^\theta f(\tau)\, d\tau \Big) \overline{g(\theta)}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} f(\tau)\, \overline{\Big(\frac{1}{2\pi} \int_\tau^{2\pi} g(\theta)\, d\theta \Big)}\, d\tau. \end{aligned}$$

Compte tenu de la formule d'adjonction (Proposition 1.14 du cours), l'adjoint de T est l'opérateur qui à $\dot{g} \in H_1$ associe la classe de la fonction

$$\tau \in [0, 2\pi] \longmapsto \frac{1}{2\pi} \int_\tau^{2\pi} g(\theta)\, d\theta.$$

Comme T^* est manifestement différent de T, T n'est pas autoadjoint.

4. *Vérifier que la fonction*

$$(\theta,\tau)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]\longmapsto \chi_{[0,\theta]}(\tau)$$

représente un élément $\dot K$ *de* H_2 *dont on calculera le carré de la norme* $\|\ \|_{H_2}$. On a, d'après le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi^2}\iint_{[0,2\pi]^2}|K(\theta,\tau)|^2\,d\tau\,d\theta=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{[0,2\pi]^2}K(\theta,\tau)\,d\tau\,d\theta\\&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{[0,2\pi]}\Big(\int_0^\theta d\tau\Big)\,d\theta=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\theta\,d\theta=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

La fonction en jeu définit donc bien un élément de H_2 dont le carré de la norme vaut $1/2$.

5. *Comparer la liste* $(\langle T(\overline{e_l}),e_k\rangle)_{k,l\in\mathbb{Z}}$ *à la liste des coordonnées de* $\dot K$ *dans la base hilbertienne de* H_2 *construite à la question* **1**. *Calculer la valeur de la somme*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\langle T(\overline{e_l}),e_k\rangle|^2.$$

La coordonnée de $\dot K$ suivant le vecteur correspondant à la classe de la fonction

$$(\theta,\tau)\longmapsto e^{i(k\theta+\tau l)}$$

(lorsque $(k,l)\in\mathbb{Z}^2$) vaut, compte-tenu de la définition de $\dot K$ (et si l'on utilise en plus le théorème de Fubini) :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi^2}\iint_{[0,2\pi]^2}K(\theta,\tau)\,e^{-i(k\theta+l\tau)}\,d\tau\,d\theta=\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^\theta e^{-il\tau}\,d\tau\Big)\,e^{-ik\theta}\,d\theta=\langle T(\overline{e_l}),e_k\rangle.\end{aligned}$$

La liste $(\langle T(\overline{e_l}),e_k\rangle)_{k,l\in\mathbb{Z}}$ est donc exactement la liste des coordonnées de $\dot K$ dans la base hilbertienne de H_2 exhibée à la question **1**. D'après la formule de Plancherel (seconde assertion de la Proposition 1.9 du cours) et le résultat établi à la question **4**, on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\langle T(\overline{e_l}),e_k\rangle|^2=\|\dot K\|^2_{H_2}=\frac{1}{2}.$$

6. *Calculer, en fonction de* k *et* l *dans* $\mathbb{Z}$, *le produit scalaire* $\langle T(\overline{e_l}),e_k\rangle$. *Pour* $N\in\mathbb{N}^*$ *et* $(\theta,\tau)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]$, *on pose*

$$S_N(\theta,\tau)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\Big(\sum_{k=1}^N\frac{\sin(k\theta)}{k}-\sum_{l=1}^N\frac{\sin(l\tau)}{l}-\sum_{\nu=1}^N\frac{\sin(\nu(\theta-\tau))}{\nu}\Big).$$

Vérifier que S_N définit un élément $\dot{S}_N$ de H_2 et que

$$\lim_{N\to+\infty} \|\dot{K} - \dot{S}_N\|_{H_2} = 0.$$

Si $l \in \mathbb{Z}^*$, $T(\overline{e_l})$ a pour représentant

$$\theta \in [0, 2\pi] \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^\theta e^{-il\tau}\, d\tau = \frac{1 - e^{-il\theta}}{2i\pi l}$$

tandis que si $l = 0$ un représentant de $T(\overline{e_0})$ est $\theta \longmapsto \theta/2\pi$. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\langle T[\overline{e_0}], e_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta\, e^{-ik\theta}\, d\theta = \begin{cases} 1/2 \text{ si } k = 0 \\ i/(2\pi k) \text{ si } k \in \mathbb{Z}^*\,, \end{cases}$$

tandis que si $l \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{aligned} \langle T[\overline{e_l}], e_k\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ik\theta} - e^{-i(k+l)\theta}}{2i\pi l}\, d\theta \\ &= \begin{cases} -i/(2\pi l) \text{ si } k = 0 \\ 0 \text{ si } k \in \mathbb{Z}^* \text{ avec } k \neq -l \\ i/(2\pi l) \text{ si } k = -l\,. \end{cases} \end{aligned}$$

On remarque alors, en reportant ces résultats dans l'expression de la fonction (polynomiale trigonométrique)

$$(\theta, \tau) \longmapsto \sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N} \langle T(\overline{e_l}), e_k\rangle\, e^{i(k\theta + l\tau)},$$

et en utilisant le fait que $\sin u = (e^{iu} - e^{-iu})/(2i)$ lors du regroupement des termes deux par deux, que

$$\forall\, (\theta, \tau) \in [0, 2\pi]^2,\ S_N(\theta, \tau) = \sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N} \langle T(\overline{e_l}), e_k\rangle\, e^{i(k\theta + l\tau)}.$$

Le fait que l'on ait

$$\lim_{N\to+\infty} \|\dot{K} - \dot{S}_N\|_{H_2} = 0$$

résulte alors de la première assertion de la Proposition 1.9 du cours, puisque les nombres $\langle T(\overline{e_l}), e_k\rangle$, pour $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, figurent d'après le résultat établi à la question **5** les coordonnées de $\dot{K}$ dans la base hilbertienne de H_2 exhibée à la question **1**.