MISMI Semestre 2, Année 2012-2013

UE M1MI2011 : ANALYSE 1 - Devoir surveillé 1

Date : 19 Mars 2013, 11h00-12h30 Durée : 1h30

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

EXERCICE I

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n+\ln(n)+1}{(\sqrt{n}+5)^2}\Big), \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n.$$

Les calculs devront être dans chaque cas justifiés.

Dans le premier cas, on a, pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{n+\ln(n)+1}{(\sqrt{n}+5)^2} = \frac{n\Big(1+\dfrac{\ln(n)}{n}+\dfrac{1}{n}\Big)}{n\left(1+\dfrac{5}{\sqrt{n}}\right)^2} = \frac{1+\dfrac{\ln(n)}{n}+\dfrac{1}{n}}{\left(1+\dfrac{5}{\sqrt{n}}\right)^2}$$

(on met ici en facteur au numérateur et au dénominateur le terme que l'on pense être prépondérant dans chacune de ces deux expressions lorsque n tend vers l'infini). En utilisant le fait que les suites $(\ln(n)/n)_{n\geq 1}$, $(1/n)_{n\geq 1}$ et $(5/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ convergent toutes les trois vers 0 et le résultat concernant les opérations sur les limites (Proposition 1.4 du polycopié), on trouve

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n+\ln(n)+1}{(\sqrt{n}+5)^2}\Big) = 1.$$

On a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \exp\left(n\ln(1+1/n)\right) = \exp\Big(\frac{\ln(1+1/n)}{1/n}\Big).$$

Comme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x} = \Big(\frac{d}{dx}[\ln(1+x)\Big)(0) = 1,$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = e^1 = e$$

puisque la fonction exponentielle est continue en 1.

EXERCICE II

On rappelle que l'on a, pour tout nombre réel a différent de 1, pour tout entier $n \geq 0$,

$$1 + a + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. On définit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ de terme général

$$v_n = \frac{u_0 + 2u_1 + \ldots + 2^n u_n}{2^{n+1}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

1. *Vérifiez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_0}{2^{n+2}} + \frac{u_1 - u_0}{2^{n+1}} + \frac{u_2 - u_1}{2^n} + \ldots + \frac{u_{n+1} - u_n}{2}.$$

En déduire que si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de nombres positifs ou nuls, il en est de même pour la suite $(v_n)_{n\geq 0}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_0 + 2u_1 + \ldots + 2^{n+1}u_{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{u_0}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} 2^k \\ v_n &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} u_k 2^k. \end{aligned}$$

En soustrayant ces deux égalités, on trouve bien la formule demandée. Si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et constituée de nombres positifs, on a $u_0 \geq 0$ et $u_{k+1} - u_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule que l'on vient d'établir (en tenant compte de la forme du second membre) on voit que $v_{n+1} - v_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$, donc que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est croissante. Comme $v_0 = u_0/2$, on a aussi $v_n \geq v_0 = u_0/2 \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. *Montrer que si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée par une constante $M > 0$, il en est de même pour la suite $(v_n)_{n\geq 0}$.*
Si $u_k \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n \leq M \times \frac{1 + 2 + \cdots + 2^n}{2^{n+1}} = M \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{1}{2^{n+1}} \leq M.$$

3. *Déduire des résultats établis aux questions 1 et 2 que si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante et majorée de nombres positifs ou nuls, les deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont toutes deux convergentes vers des limites réelles positives ou nulles.* Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée

(et constituée de nombres positifs ou nuls), il en est de même de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ d'après les deux items précédents. Or toute suite de nombres réels croissante et majorée est convergente (*cf.* la Proposition 1.2 du polycopié). Les deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$, toutes les deux croissantes et majorées, sont donc toutes les deux convergentes vers des limites réelles. Comme ces deux suites sont toutes les deux des suites de nombres positifs ou nuls, les limites respectives de ces suites sont toutes les deux positives ou nulles.

4. *Expliciter avec des quantificateurs logiques le fait qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels converge vers* 0. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

$$\Longleftrightarrow \Big(\forall \epsilon > 0,\ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \big(n \geq N(\epsilon)\big) \Longrightarrow \big(|u_n| \leq \epsilon\big)\Big).$$

EXERCICE III

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels telle que

$$\sup\{|u_n|\,;\,n\in\mathbb{N}\} = M < +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(u_n + \frac{u_{3n}}{3}\Big) = L \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

1. *Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles bornées. Pourquoi existe-t-il au moins une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ (de la suite donnée $(u_n)_{n\geq 0}$) qui converge vers une limite réelle finie ? On note dans la suite $l = \lim_{n\to+\infty}(u_{\varphi(n)})$.*

   Théorème de Bolzano-Weiertrass pour les suites réelles bornées (Théorème 1.1 du polycopié) : « *l'ensemble des valeurs d'adhérence (dans $\mathbb{R}$) d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels bornée en valeur absolue est non vide (c'est le segment $[\liminf_{n\to+\infty} u_n, \limsup_{n\to+\infty} u_n]$).* » Ici la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres réels bornée en valeur absolue (par M, c'est la première des hypothèses dans l'en tête de l'exercice). Cette suite admet donc, d'après ce théorème, au moins une valeur d'adhérence $l \in \mathbb{R}$, ce qui signifie (Définition 1.9 des valeurs d'adhérence d'une suite de nombres réels dans le polycopié) qu'il existe au moins une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ (de la suite donnée $(u_n)_{n\geq 0}$) qui converge vers cette valeur d'adhérence l.

2. *En utilisant la seconde hypothèse figurant dans $(*)$, vérifier que*

$$\lim_{n\to+\infty}(u_{3\varphi(n)}) = 3\,(L-l)\,.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(u_{\varphi(n)} + \frac{u_{3\,\varphi(n)}}{3}\right) = L$$

(comme suite extraite de la suite $(u_n + u_{3n}/3)_{n\geq 0}$ qui est censée converger vers L), la suite $(u_{3\,\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge vers $3\,(L-l)$ d'après la Proposition relative aux opérations sur les limites de suites de nombres réels (Proposition 1.4 du polycopié).

3. *Montrer par récurrence sur l'entier k que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{3^k\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge vers limite finie $l_k \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers l'infini et que la suite $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de nombres réels ainsi obtenue vérifie*

$$l_0 = l \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ l_{k+1} = 3\,(L - l_k).$$

En utilisant la première hypothèse figurant dans $(*)$, vérifier que l'on a aussi $|l_k| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Le résultat que l'on demande de montrer par récurrence est vrai pour $k = 0$ avec $l_0 = l$. Supposons qu'il soit vrai à un ordre $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que, pour cette valeur de k, la suite $(u_{3^k\,\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge vers une limite réelle l_k. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \left(u_{3^k\,\varphi(n)} + \frac{u_{3^{k+1}\,\varphi(n)}}{3}\right) = L$$

(toujours comme suite extraite de la suite $(u_n + u_{3n}/3)_{n\geq 0}$ qui est censée converger vers L), d'où l'on déduit, toujours d'après la Proposition relative aux opérations sur les limites de suites de nombres réels (Proposition 1.4 du polycopié), que la suite $(u_{3^{k+1}\,\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge vers $3\,(L - l_k) = l_{k+1} \in \mathbb{R}$. La propriété (P_k) que l'on demandait de prouver par récurrence est donc bien héréditaire et (P_k) est ainsi vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{3^k\,\varphi(n)})_{n\geq 0}$ est une sous-suite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$; comme cette dernière suite, elle est bornée en valeur absolue par M et, par conséquent, sa limite l_k aussi.

4. *Déduire de la relation entre l_k et l_{k+1} établie à la question 3 que*

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ l_{k+1} - 3L/4 = (-3) \times (l_k - 3L/4).$$

En déduire $l_k = (-3)^k(l - 3L/4) + 3L/4$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $((-3)^k)_{k\geq 0}$ est-elle une suite bornée ? Montrer que le fait que l'on ait $|l_k| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ implique $l = 3L/4$. La relation demandée

$$l_{k+1} - 3L/4 = (-3)\,(L - 3L/4)$$

équivaut à

$$l_{k+1} = 3(L - l_k),$$

comme on le vérifie immédiatement. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} l_k - 3L/4 &= (-3)(l_{k-1} - 3L/4) = (-3)^2(l_{k-2} - 3L/4) = \cdots = \\ \cdots &= (-3)^k(l - 3L/4), \end{aligned}$$

d'où

$$l_k = (-3)^k(l - 3L/4) + 3L/4 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

(la suite $(l_k)_{k\geq 0}$ est ce que l'on appelle une suite *arithmético-géométrique*, *cf.* votre cours de S1). La suite $((-3)^k)_{k\geq 0}$ n'est pas une suite bornée en valeur absolue (ou en module, c'est pareil, puisque les suites sont ici réelles) car c'est une suite géométrique de raison -3 et que $|-3| > 1$. Pour que la suite $(l_k)_{k\geq 0}$ reste donc bornée en valeur absolue (comme c'est le cas en fait ici d'après ce qui a été établi à la question précédente), il faut que $l - 3L/4 = 0$, soit $l = 3L/4$ (auquel cas la suite $(l_k)_{k\geq 0}$ est de fait stationnaire à cette valeur $3L/4$).

5. *Déduire de ce qui précède que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est égal à* $\{3L/4\}$. *Que peut-on dire du comportement du terme général* u_n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *?* Si l est une valeur d'adhérence réelle de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ (il en existe d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass), on a nécessairement $l = 3L/4$ (d'après ce qui a été établi à la question précédente). L'ensemble des valeurs d'adhérence réelles de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ se réduit donc au singleton $\{3L/4\}$. D'après la proposition 1.10 du cours (ni $-\infty$, ni $+\infty$ ne sont valeurs d'adhérence car la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est supposée bornée en valeur absolue par M), la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui n'a que $3L/4$ comme seule valeur d'adhérence dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est convergente vers cette valeur $3L/4$.