

EXERCICE I

1. *Énoncer le théorème de Rolle.*

Il s'agit du Théorème 2.5 du polycopié : $\ll$ si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur le segment $[a, b]$ (non réduit à un point) et dérivable sur $]a, b[$, avec de plus $f(a) = f(b)$, il existe au moins un point c de $]a, b[$ où $f'(c) = 0$. $\gg$

2. *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Montrer que $f(x) \neq f(a)$ pour tout $x \in]a, b[$.*

On va raisonner par l'absurde. Si $x \in]a, b[$ était tel que $f(x) = f(a)$, le théorème de Rolle, appliqué à la fonction f sur le segment $[a, x]$, impliquerait qu'il existe au moins un $c_x \in]a, x[$ tel que $f'(c_x) = 0$. Ceci serait contradictoire avec l'hypothèse selon laquelle f' ne s'annule pas sur $]a, b[$. Le résultat est donc démontré par l'absurde¹.

3. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, p fois dérivable sur $]a, b[$, s'annulant en $p+1$ points distincts de $[a, b]$. Montrer qu'il existe au moins un $c \in]a, b[$ tel que $f^{(p)}(c) = 0$ (on commencera par traiter le cas où $p = 1$).*

On raisonne par récurrence (ou hérédité), comme d'habitude en trois étapes.

1. On valide l'assertion au cran initial (assertion $\mathcal{P}(1)$ VRAIE).

On raisonne pour commencer avec $p = 1$ et l'on suppose donc f dérivable sur $]a, b[$ et telle que f s'annule en deux points distincts de $[a, b]$, ξ_1 et ξ_2 (on pourrait avoir *a priori* $\xi_1 = a$ et $\xi_2 = b$); le théorème de Rolle s'applique à f sur $[\xi_1, \xi_2] \subset [a, b]$ et il existe donc $c \in]\xi_1, \xi_2[\subset]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$; le résultat est acquis dans ce cas.

1. On pouvait aussi raisonner différemment, même si ce n'était pas tout à fait dans l'esprit de l'exercice : en invoquant cette fois non plus le théorème de Rolle, mais la Proposition 2.12 du polycopié (qui en découle en fait *via* la formule des accroissements finis), on sait que si f' ne s'annule pas sur $]a, b[$, f est strictement monotone sur cet intervalle (strictement croissante ou strictement décroissante suivant que l'on ait toujours $f' > 0$ dans $]a, b[$ ou $f' < 0$ dans $]a, b[$); il est donc impossible que $f(x) = f(a)$ puisque $f(a) = \lim_{\xi \rightarrow a; \xi > a} f(\xi)$ par continuité de f en a . Cet argument était aussi accepté.

2. On formule (et admet) l'assertion ($\mathcal{P}(p)$ VRAIE) pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Forts du fait que le résultat est vrai pour $p = 1$ (assertion $\mathcal{P}(1)$ VRAIE), nous allons raisonner par récurrence et supposer le résultat vrai pour p fixé dans $\mathbb{N}^*$, pour tout segment $[\alpha, \beta]$, pour toute fonction réelle continue sur $[\alpha, \beta]$, p fois dérivable sur $] \alpha, \beta[$, s'annulant en $p + 1$ points distincts de $[\alpha, \beta]$ (ce sera l'assertion ($\mathcal{P}(p)$ VRAIE)).

3. On prouve ($\mathcal{P}(p)$ VRAIE) $\implies$ ($\mathcal{P}(p + 1)$ VRAIE). Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$, $p + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$ et telle que f s'annule en $p + 2$ points distincts de $[a, b]$, notés $a \leq \xi_1 < \dots < \xi_{p+2} \leq b$. D'après le théorème de Rolle, f' s'annule en un point $\xi_{1,2}$ de $] \xi_1, \xi_2[$, ainsi qu'en un point $\xi_{p+1,p+2}$ de $] \xi_{p+1}, \xi_{p+2}[$. Comme la fonction f' s'annule aussi en un point $\xi_{j,j+1} \in] \xi_j, \xi_{j+1}[\subset]a, b[$ pour tout j dans $\{2, \dots, p\}$, elle s'annule en $p - 1 + 2 = p + 1$ points distincts de $[\xi_{1,2}, \xi_{p+1,p+2}] \subset]a, b[$ et est continue sur ce segment $[\xi_{1,2}, \xi_{p+1,p+2}]$ (car f' est encore dérivable sur $]a, b[$, puisque f est au moins $2 > 1$ fois dérivable sur $]a, b[$). On peut appliquer l'hypothèse de récurrence (assertion ($\mathcal{P}(p)$ VRAIE)) à f' sur $[\xi_{1,2}, \xi_{p+1,p+2}]$; comme f' s'annule $p + 1$ fois sur ce segment et y est continue et dérivable à l'ordre p en son intérieur, $(f')^{(p)} = f^{(p+1)}$ doit s'annuler au moins une fois dans $] \xi_{1,2}, \xi_{p+1,p+2}[$, donc dans $]a, b[$, ce que l'on voulait. On vient donc de vérifier :

$$\text{assertion } (\mathcal{P}(p) \text{ VRAIE}) \implies \text{assertion } (\mathcal{P}(p + 1) \text{ VRAIE}).$$

Comme l'assertion ($\mathcal{P}(1)$ VRAIE) a été validée à l'étape 1, le résultat est prouvé par récurrence.

EXERCICE II

1. Montrer que la fonction $f : x \in] - 1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$ est indéfiniment dérivable sur $] - 1, +\infty[$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, sa fonction dérivée d'ordre k est la fonction

$$x \mapsto (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

La fonction $x \in] - 1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$ est C^∞ sur $] - 1, +\infty[$ comme composée de la fonction affine $x \in] - 1, +\infty[\mapsto 1+x \in]0, +\infty[$ et de la fonction $\ln : X \in]0, +\infty[\mapsto \ln(X)$, toutes les deux C^∞ sur leurs domaines de définition, de dérivées respectives $x \mapsto 1$ et $X \mapsto 1/X$. La première dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $] - 1, +\infty[$ est, d'après la règle de Leibniz (cf. le cours de MISMI de semestre 1²), la

2. <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/coursmismi.pdf>, section 3.5.

fonction $x \in]-1, +\infty[\mapsto (1+x)^{-1}$. Les dérivées successives de cette dernière fonction sur $] -1, +\infty[$ sont les fonctions

$$\begin{aligned} x \in]-1, +\infty[&\mapsto (-1)(-2) \cdots (-k)(1+x)^{-k-1} \\ &= (-1)^k k! (1+x)^{-k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

La dérivée d'ordre k de la fonction $x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$ sur $] -1, +\infty[$ est donc bien la fonction

$$x \in]-1, +\infty[\mapsto (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

(car il faut remonter d'un cran l'ordre de dérivation utilisé pour sa première dérivée, à savoir la fonction $x \in]-1, +\infty[\mapsto (1+x)^{-1}$).

2. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a, b \in I$ avec $a < b$ et $p \in \mathbb{N}$. Écrire, pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I , la formule de Taylor-Lagrange entre a et b à l'ordre $p+1$.

Il s'agit d'énoncer ici la formule (2.49) du Théorème 2.10 du cours :

« si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et si $a < b$ sont deux points de I et p un entier positif, il existe au moins un nombre $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(p+1)}(c)}{(p+1)!} (b-a)^{p+1}. \quad \gg$$

3. En prenant $I =]-1, +\infty[$, $a = 0$, $b = 1$ et pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convenable, déduire des deux questions précédentes que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \ln 2.$$

En faisant comme indiqué et en appliquant la formule rappelée à la question 2, on voit que :

$$\begin{aligned} \exists c \in]0, 1[, \quad \ln(2) &= \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} + \frac{1}{(p+1)!} \frac{(-1)^p p!}{(1+c)^{p+1}} \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^p}{(p+1)(1+c)^{p+1}}. \end{aligned}$$

On en déduit, puisque $c \geq 0$,

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{1}{p+1}.$$

Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} 1/(p+1) = 0$, le lemme des gendarmes implique que l'on a

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \ln 2.$$

ce qu'il fallait démontrer.

EXERCICE III

1. *Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction F continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.*

C'est le Théorème 2.1 du cours (reposant sur la méthode algorithmique dite de *dichotomie* qu'il fallait citer ici : « si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a < b$ deux points de I et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, alors f prend au moins une fois entre a et b toute valeur c appartenant au segment d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$. »).

2. *Soit $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré impair. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(a) = 0$.*

On peut supposer, quitte à remplacer P par $-P$, que le coefficient du terme dominant t^{2k+1} de P est strictement positif. Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$$

(car le degré de P est impair et que $(-\infty)^{2k+1} = -\infty$ tandis que $(+\infty)^{2k+1} = +\infty$, et que l'on sait d'autre part qu'une fonction polynomiale réelle est équivalente à sa fonction monomiale de plus haut degré au voisinage de $\pm\infty$). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, P doit prendre au moins une fois toute valeur entre $-R$ et R lorsque $R > 0$ est arbitraire, donc en particulier la valeur 0.

3. *Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |f^{(k)}(x)| \leq |P(x)|,$$

où P désigne, comme à la question précédente, une fonction polynomiale à coefficients réels de degré impair. Dédurre de la question 2 qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est cette fonction f et ce nombre réel a que l'on conserve jusqu'à la fin de l'exercice.

Comme P s'annule en un point a (d'après le résultat établi question **2**) et que $|f^{(k)}(a)| \leq |P(a)| = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. Soit $b > a$. Écrire, lorsque $p \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $p+1$ pour la fonction f entre a et b . En déduire l'inégalité :

$$|f(b)| \leq \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in [a,b]} |P(x)| \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

On demandait ici d'énoncer, pour une fonction C^∞ sur $I = \mathbb{R}$ (à valeurs ici réelles, mais elle pourrait tout aussi bien être à valeurs complexes), l'inégalité (2.54) du Théorème 2.11 du cours : « si a, b , avec $a < b$ sont deux points de I et $p \in \mathbb{N}$,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in]a,b[} |f^{(p+1)}(x)|. \quad \gg$$

Comme ici $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, \dots, p$, et ce pour tout $p \in \mathbb{N}$, et que $|f^{(p+1)}(x)| \leq |P(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par hypothèses, on en déduit, pour ce qui est de notre contexte :

$$|f(b)| \leq \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(p+1)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in [a,b]} |P(x)| \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

5. Soit, pour $b > a$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p = (b-a)^{p+1}/(p+1)!$. Montrer qu'il existe un entier positif K tel que pour $p \geq K$, $0 < u_{p+1} \leq u_p/2$. En déduire $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = 0$.

On a

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{b-a}{p+1}.$$

Si $p \geq \sup(0, 2(b-a) - 1) = K$, on a donc $u_{p+1} \leq u_p/2$ (ou encore $u_p \leq u_{p-1}/2$). Par récurrence, on en déduit, pour tout $p \geq K$,

$$0 \leq u_p \leq (1/2)^{p-K} u_K.$$

Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} (1/2)^{p-K} u_K = 0$, le lemme des gendarmes implique, du fait de l'encadrement ci-dessus, que la suite $(u_p)_{p \geq 0}$ converge vers 0.

6. Déduire des résultats établis aux questions **4** et **5** que pour tout $b > a$, $f(b) = 0$.

En prenant la limite dans l'inégalité

$$|f(b)| \leq \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in [a,b]} |P(x)| = u_p \sup_{x \in [a,b]} |P(x)| \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

lorsque p tend vers l'infini, on trouve $f(b) = 0$ pour $b > a$.

7. Soit $b < a$. En écrivant comme aux questions précédentes l'inégalité de Taylor-Lagrange à un ordre arbitraire pour la fonction $x \mapsto f(2a-x)$ entre a et $2a-b > a$ et en raisonnant comme à la question 6, montrer que l'on a encore $f(b) = 0$.

Les nombres dérivés successifs en a de la fonction composée $x \mapsto f(2a-x)$ sont nuls car, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^k}{dx^k} [f(2a-x)] = (-1)^k f^{(k)}(2a-x)$$

d'après la règle de Leibniz et que $[f^{(k)}(2a-x)]_{x=a} = f^{(k)}(a) = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} |[f(2a-x)]_{x=2a-b}| = |f(b)| &\leq \frac{(a-b)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in [a, 2a-b]} |f^{(p+1)}(2a-x)| \\ &\leq \frac{(a-b)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in [b,a]} |P(x)| \quad \forall p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

En prenant cette fois $u_p := (b-a)^{p+1}/(p+1)!$, on raisonne comme aux questions 5 et 6 et l'on montre que $f(b) = 0$ si $b < a$.

8. Dédurre des deux questions précédentes que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

On a établi $f(b) = 0$ si $b > a$ (à la question 6) et $f(b) = 0$ si $b < a$ (à la question 7). On sait aussi que $f(a) = 0$ par hypothèses, donc $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$.

FIN