COURS MIAS 301

Devoir Surveillé 3, Jeudi 28 Novembre 2002

Durée 1h 20mm

TEXTE (*en italiques*) + CORRIGÉ (en roman)

ALGÈBRE

Soit $\mathcal{Q}$ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\mathcal{Q}(x,y,z) = xy + yz + zx\,.$$

a. *Déterminer un changement de variables*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \bullet \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

tel que dans les nouvelles coordonnées (X,Y,Z), la forme quadratique s'écrive sous la forme :

$$\mathcal{Q}\left(A \bullet \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right) = \alpha_1 X^2 + \alpha_2 Y^2 + \alpha_3 Z^2\,,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont des nombres réels.

On remarque que $\mathcal{Q}(1,1,0) = 1 \neq 0$; le vecteur $\vec{V_1} = (1,1,0)$ se complète en une base de $\mathbb{R}^3$ en ajoutant par exemple les vecteurs $\vec{V_2} = (0,1,0)$ et $\vec{V_3} = (0,0,1)$. Posons

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A_1 \bullet \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\,,$$

soit

$$x = x'\,,\ y = x' + y'\,,\ z = z'\,,$$

La forme devient, en les nouvelles coordonnées (x', y', z') :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}\left(A \bullet \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) &= x'^2 + x'(y' + 2z') + y'z' \\
&= \Big(x' + \frac{y' + 2z'}{2}\Big)^2 - \frac{(y' + 2z')^2}{4} + y'z' \\
&= \Big(x' + \frac{y' + 2z'}{2}\Big)^2 - \frac{y'^2 + 4y'z' + 4z'^2}{4} + y'z' \\
&= \Big(x' + \frac{y' + 2z'}{2}\Big)^2 - \frac{y'^2}{4} - z'^2\,.
\end{aligned}$$

On pose enfin

$$\begin{aligned} X &= x' + \frac{y'+2z'}{2} \\ Y &= y' \\ Z &= z' \end{aligned}$$

soit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A_2 \bullet \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} .$$

Si l'on prend

$$A = A_1 \bullet A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

on a donc

$$\mathcal{Q}\left(A \bullet \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \right) = X^2 - \frac{Y^2}{4} - Z^2 .$$

C'est la forme voulue et la matrice A étant inversible, cela correspond bien à l'écriture de $\mathcal{Q}$ dans une nouvelle base.

b. *Quelle est la signature de la forme quadratique $\mathcal{Q}$?*

La signature de la forme quadratique est ici $(1, 2)$.

ANALYSE

Exercice 1.

a. Question préliminaire. *Soit R un nombre réel strictement positif ; montrer que si k est un entier positif tel que $k \geq 2R$ et z un nombre complexe tel que $|z| \leq R$, on a*

$$|z - k| \geq |k - |z|| \geq k/2.$$

On utilise l'inégalité triangulaire

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b| \quad \forall\, a, b \in \mathbb{C}$$

que l'on applique avec $a = z$ et $b = k$, ce qui donne $|z - k| \geq ||z| - |k|| = |k - |z||$ pour tout z dans $\mathbb{C}$ et tout k dans $\mathbb{N}^*$; ensuite on remarque que si

$|z| \leq R$ et $k \geq 2R$, $|k - |z|| = k - |z| \geq k - R \geq k - k/2 = k/2$, ce qui est le résultat voulu.

b. *Montrer que la série de fonctions*

$$\left[\frac{1}{k(z-k)}\right]_{k\geq 1}$$

(toutes définies sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$*) converge normalement sur tout ensemble de la forme*

$$K(R) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^* \,;\, |z| \leq R\}$$

(où $R > 0$*).*

Si $k \geq 2R$, on a

$$\sup_{|z|\leq R} \left|\frac{1}{k(z-k)}\right| = \frac{1}{k\,|z-k|} \leq \frac{2}{k^2} = w_k \;;$$

comme la série numérique $[w_k]_{k\geq 2R}$ est une série de Riemann convergente (du type $[k^{-x}]_{k\geq 2R}$ avec $x = 2 > 1$), la série

$$\left[\frac{1}{k(z-k)}\right]_{k\geq 1}$$

converge bien normalement sur $\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^* \,;\, |z| \leq R\}$.

c. *Montrer que la fonction*

$$f \;:\; t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^* \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t-k}$$

est une fonction de classe C^1 *sur* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$ *et que l'on a*

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*\,,\ f'(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(t-k)^2}$$

(on énoncera soigneusement le résultat du cours que l'on utilisera ici).

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_k \;: t \to \frac{1}{k(t-k)}$$

est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$ et de dérivée

$$t \to -\frac{1}{k(t-k)^2}\,;$$

cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$, donc f_k est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit R un nombre strictement positif. On a, pour tout $k \geq 2R$,

$$\sup_{|z| \leq R} \left| \frac{1}{k(t-k)^2} \right| \leq \frac{4}{k^3} \, ;$$

comme la série $[4/k^3]_{k \geq 2R}$ est convergente (comme série de Riemann), la série

$$\left[- \frac{1}{k(t-k)^2} \right]_{k \geq 1}$$

converge normalement sur l'ensemble $]-R, R[\setminus \mathbb{N}^*$, donc sur tout intervalle ouvert I inclus dans cet ensemble. Comme la série

$$\left[\frac{1}{k(t-k)} \right]_{k \geq 1}$$

converge en tout point de $]-R, R[\setminus \mathbb{N}^*$, on peut appliquer dans chaque intervalle ouvert I de $]-R, R[\setminus \mathbb{N}^*$ le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions de classes C^1 (théorème 2.5 du cours). La fonction

$$t \to \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$$

est de classe C^1 sur tout intervalle ouvert I de $]-R, R[\setminus \mathbb{N}^*$, de dérivée

$$t \to \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(t-k)^2} \, .$$

d. *Montrer que la fonction f est en fait une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$ et exprimer comme la somme d'une série de fonctions sa dérivée p-ième sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$.*

Chaque fonction f_k, $k \geq 1$, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$; la dérivée d'ordre $p \geq 1$ de f_k est (on le voit par une récurrence immédiate) :

$$f_k^{(p)}(t) = \frac{(-1)^p p!}{(t-k)^{p+1}} \, , \quad t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^* \, ;$$

Pour tout $R > 0$, la série de fonctions

$$\left[\frac{(-1)^p p!}{(t-k)^{p+1}} \right]_{k \geq 1}$$

converge normalement sur $]-R,R[\setminus\mathbb{N}^*$ car on a l'estimation :

$$\forall t \in]-R,R[\setminus\mathbb{N}^*\,, \forall p \in \mathbb{N}^*\,,\ \forall k \geq 2R\,,\ \left|\frac{(-1)^p p!}{(t-k)^{p+1}}\right| \leq \frac{p!}{k^{p+1}}$$

et que les séries $[k^{-(p+1)}]_{k\geq 1}$ sont toutes des séries de Riemann convergentes. On peut appliquer le théorème 2.5 du cours pour montre ainsi (par récurrence sur p) que la fonction f est de classe C^p pour tout $p \geq 1$ (donc de classe C^∞) et que

$$\forall t \in]-R,R[\setminus\mathbb{N}^*\,,\ f^{(p)}(t) = (-1)^p p! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(t-k)^{p+1}}\,.$$

Exercice 2.

a. *Soit α un nombre strictement positif et f_α la fonction de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$ définie par :*

$$\forall t \geq 0\,,\ f_\alpha(t) = t^\alpha e^{-t}\,;$$

montrer que cette fonction atteint un maximum global sur $[0,+\infty[$; préciser en quel point (fonction de α) ce maximum est atteint et quelle est la valeur de ce maximum (toujours en fonction de α) [on étudiera le sens de variations de la fonction f_α sur $[0,+\infty[$].

La fonction f_α est dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée

$$f'_\alpha(t) = (\alpha t^{\alpha-1} - t^\alpha)\, e^{-t} = \Big(\frac{\alpha}{t} - 1\Big)e^{-t}\,.$$

Cette dérivée s'annule en $t = \alpha$, est strictement positive si $t \leq \alpha$ et strictement négative si $t > \alpha$; la fonction f_α atteint donc un maximum global sur $[0,+\infty[$ (elle est positive et nulle en 0) au point $t = \alpha$; ce maximum vaut

$$f_\alpha(\alpha) = e^{\alpha(\log\alpha - 1)}\,.$$

b. *On introduit la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 2}$ définies sur $[0,1]$ par*

$$\forall t \in [0,1]\,,\quad g_n(t) := \begin{cases} f_{1/n}(t) \text{ si } t \leq 2/n \\ 0 \text{ si } t \in]2/n, 1] \end{cases}$$

montrer que la suite $(g_n)_{n\geq 2}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction identiquement nulle ; la convergence est-elle uniforme ?

On a, par définition, $g_n(0) = f_{1/n}(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$; d'autre part, si $t \in]0,1[$, on a $t > 2/n$ dès que $n > 2/t$; pour $n \geq 2/t$, on a donc $g_n(t) = 0$, ce qui montre que la suite $(g_n(t))_{n\geq 1}$ converge vers 0 pour un t quelconque dans $]0,1]$. La suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 2}$ converge donc simplement vers la fonctin nulle sur $[0,1]$.

Le maximum de la fonction $f_{1/n}$ sur $]0,+\infty[$ est atteint au point $1/n$ (question **a**) ; comme $1/n \leq 2/n$, la fonction g_n atteint son maximum sur $[0,1]$ au point $1/n$ et ce maximum vaut

$$\sup_{t\in[0,1]} g_n = g_n(1/n) = f_{1/n}(1/n) = e^{\frac{-\log n - 1}{n}} \, ;$$

comme on a

$$\lim_{n\to\infty} (\sup_{[0,1]} |g_n|) = e^{-\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log n + 1}{n}} = 1 \, ,$$

la suite $(g_n)_{n\geq 2}$ ne converge pas uniformément vers la fonction identiquement nulle sur $[0,1]$.

c. *Soit $t \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$; montrer (en utilisant par exemple la formule des accroissements finis pour la fonction $x \in \mathbb{R} \to t^x$ entre 0 et $1/n$) qu'il existe $\xi_n(t) \in]0,1/n[$ tel que*

$$|t^{1+\frac{1}{n}} - t| = |t|\,|t^{1/n} - 1| \leq t\frac{|\log t|}{n} t^{\xi_n(t)} \leq \frac{t|\log t|}{n} \; ;$$

en déduire que la suite de fonctions (sur $[0,1]$)

$$\left(t^{1+\frac{1}{n}} e^{-t}\right)_{n\geq 1}$$

converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction limite que l'on précisera ; montrer enfin que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 t^{1+\frac{1}{n}} e^{-t} dt\right) = \int_0^1 te^{-t} dt = 1 - \frac{2}{e} \, .$$

Si $t > 0$, la dérivée de la fonction

$$\varphi_t \; : \; x \in]0,+\infty[\to t^x = \exp(x \log t)$$

est

$$x \to \log t t^x \, ;$$

le théorème des accroissements finis assure que si $t \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\xi_n(t) \in]0,1/n[$ tel que

$$|t^{1/n} - t^0| = |\varphi_t(1/n) - \varphi_t(0)| \leq \frac{1}{n} |\varphi_t'(\xi_n(t)| = \frac{|\log t|}{n} t^{\xi_n(t)} \, ;$$

on a donc bien

$$|t^{1+\frac{1}{n}} - t| = |t|\,|t^{1/n} - 1| \leq t\frac{|\log t|}{n} t^{\xi_n(t)} \leq \frac{t|\log t|}{n}\,.$$

La fonction $t \to t|\log t|$ est bornée sur $]0,1]$ car elle se prolonge en une fonction θ continue sur $[0,1]$ à condition de poser

$$\theta(0) = \lim_{t\to 0_+} t|\log t| = 0\,.$$

Il existe donc une constante C telle que

$$\forall t \in]0,1]\,,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ |t^{1+\frac{1}{n}} - t| \leq \frac{C}{n}\,.$$

On a aussi

$$\forall t \in]0,1]\,,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ |t^{1+\frac{1}{n}}e^{-t} - te^{-t}| \leq \frac{C}{n}\,,$$

cette inégalité restant d'ailleurs valable en $t = 0$. Il y a donc convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(f_{1+1/n})_{n\geq 1}$ vers la fonction

$$t \in [0,1] \to te^{-t} = f_1(t)\,.$$

Comme la convergence de la suite $(f_{1+1/n})_{n\geq 1}$ vers f_1 est uniforme sur $[0,1]$ et que toutes les fonctions $f_{1+1/n}$ sont continues sur $[0,1]$, on peut intervertir la prise d'intégrale sur $[0,1]$ avec la limite lorsque n tend vers l'infini (théorème 2.7 du cours), ce qui fait que l'on a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f_{1+1/n}(t)\,dt\right) = \int_0^1 f_1(t)dt\,.$$

Or, par une intégration par parties facile :

$$\int_0^1 f_1(t)dt = \int_0^1 te^{-t}dt = [-te^{-t})]_0^1 + \int_0^1 e^{-t}dt - \frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}\,.$$