Suites et fonctions continues ;
à rendre la semaine 12 selon groupe

NB : Les réponses doivent être justifiées.

EXERCICE 1. Montrer à l'aide de la définition que la suite $u_n = \frac{3n}{4n+2}$ converge et calculer sa limite.

EXERCICE 2. La suite avec le terme général u_n suivant est-elle divergente ? convergente ? Calculer la limite le cas échéant :

$$\frac{4n^5}{6n^7 - 5n^3 + n^2 - 4}, \quad \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{n^2+1}, \quad \frac{1}{n(\sqrt{n^2+2} - n)},$$

$$(-1)^n \sin\frac{n\pi}{2}, \quad \frac{2n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+3} - n}, \quad n^{1/n}, \quad \sin n.$$

EXERCICE 3.

1. Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{(u_n-3)^2}{4}$.
2. La même question pour $u_0 \geq 0$.

EXERCICE 4.

1. Soit $f(x) = \sqrt{x}, x \in \mathbb{R}_+$. En utilisant la définition, démontrer la continuité de f sur l'intérvalle $I_a = [0,a],\ a > 0$.
   Indication : étudier la continuité au voisinage du point $x_0 \in I_a$ (considérer deux cas : $x_0 = 0$ et $x_0 > 0$).
2. La fonction f est-elle uniformement continue sur l'intérvalle I_a ? Enoncer le résultat du cours correspondant.
3. La fonction f est-elle uniformement continue sur $\mathbb{R}_+$?

4.* Donner un exemple d'une fonction g, continue sur $\mathbb{R}_+$, uniformement continue sur tout $I_a, a > 0$, mais qui n'est pas uniformement continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.