

Année universitaire 2012-2013

Licence 3 de mathématiques

Espaces de Hilbert et analyse de Fourier - Feuille 6

Exercice 1

1. Soit $(h(0), \dots, h(M))$ une suite de nombres réels (que l'on prolonge par 0 pour en faire une suite indexée par $\mathbb{Z}$) et

$$m_0 : \omega \mapsto \sum_{k=0}^M h(k) e^{-ik\omega}$$

le polynôme trigonométrique correspondant (m_0 est donc la transformée de Fourier du filtre digital de réponse impulsionnelle la suite indexée par $\mathbb{Z}$

$$(\dots, 0, \dots, 0, \overset{0}{h(0)}, \dots, \overset{M}{h(M)}, 0, \dots).$$

L'opération R qui à un signal d'entrée $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ de $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ associe le signal $(s(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ défini par

$$s(k) = \sum_l h(l - 2k)e(l), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(vous vérifierez pourquoi la suite $(s(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est bien dans $l^2(\mathbb{Z})$) est-elle un filtre stationnaire (c'est-à-dire un opérateur linéaire continu de $l^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même invariant par translation)? Décrivez explicitement l'opération R^* adjointe de l'opération R .

2. Exprimez, $e = (e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ étant un élément de $l^2(\mathbb{Z})$, en fonction de m_0 et de $\widehat{e}$ (transformée de Fourier de la suite $e = (e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$) la transformée de Fourier de la suite $R^*[e]$.
3. Calculez en utilisant la formule d'adjonction la transformée de Fourier de la suite $R[e]$ lorsque $e \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$.

Exercice 2

1. Vérifiez qu'il existe une constante positive K_1 telle que

$$\forall \omega \in [0, \pi], \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_0^\omega \frac{\sin(ku)}{u} du \right| \leq K_1$$

(pensez au changement de variables $v = ku$ et à la semi-convergence de l'intégrale impropre de la fonction $v \mapsto \sin v/v$ sur $[0, \infty[$) puis qu'il

1. À propos, que vaut son intégrale sur $[0, \infty[$?

existe une constante positive K_2 telle que

$$\forall \omega \in [0, \pi], \forall k \in \mathbb{N}^*, \\ \left| \int_0^\omega \left(\frac{\sin[(k+1/2)u]}{2 \sin(u/2)} - \frac{\sin(ku)}{u} \right) du \right| \leq K_2$$

(utilisez pour cela un peu de trigonométrie ainsi que les développements limités des fonctions $\sin$ et $\cos$ au voisinage de $u = 0$). Déduisez en (en utilisant l'expression "close" du noyau de Dirichlet donnée en cours suite aux égalités de la chaîne (2.21)²), l'existence d'une constante positive K telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \sup_{\omega \in [-\pi, \pi]} \left| \sum_{l=1}^k \frac{\sin(l\omega)}{l} \right| \leq K.$$

2. Montrez que, si $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$ est une suite décroissante de nombres positifs tendant vers 0, alors, pour tout $\eta > 0$, il existe un seuil $N(\eta) \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall p > n \geq N(\eta), \sup_{\omega \in [-\pi, \pi]} \left| \sum_{k=n+1}^{k=p} \epsilon_k \frac{\sin(k\omega)}{k} \right| \leq \eta$$

(écrivez pour ce faire

$$\sum_{k=n+1}^{k=p} \epsilon_k \frac{\sin(k\omega)}{k} = \sum_{k=n+1}^p \epsilon_k (S_{k+1}(\omega) - S_k(\omega)),$$

où, pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$S_k(\omega) := \sum_{l=1}^k \frac{\sin(l\omega)}{l}$$

et utilisez la règle d'Abel d'"intégration par parties discrète" vue en Analyse 3 (L2), puis le dernier résultat établi dans la question précédente). Déduisez en que la suite de fonctions 2π -périodiques

$$\left(\omega \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^n \epsilon_k \frac{\sin(k\omega)}{k} \right)_{n \geq 1}$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction 2π -périodique f .

2. Vous pouvez d'ailleurs en profiter ici pour refaire soigneusement ces calculs !

3. Vérifiez que la série de terme général

$$\rho_k := \frac{1}{k \log(k+1)}, \quad k \geq 1$$

est une série à termes positifs divergente. Calculez les coefficients de Fourier complexes de la classe de fonction continue 2π -périodique $\hat{f}$ construite à la question 2 à partir de la suite $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$, où précisément

$$\epsilon_k := \frac{1}{\log(k+1)}, \quad k \geq 1.$$

Vérifiez que la fonction f ne saurait être la transformée de Fourier d'une suite $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de $l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ (bien qu'étant une fonction continue 2π -périodique sur $\mathbb{R}$).

Exercice 3

Soit P un polynôme trigonométrique

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=0}^N c_k e^{ik\theta},$$

où $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculez (en exprimant dans un premier temps sa série de Fourier) la convolée $F_N \overset{\text{per}}{*} Q$, où Q est la fonction 2π -périodique

$$Q : \theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{-iN\theta} P(\theta).$$

2. Déduisez du calcul précédent l'*inégalité de Bernstein* :

$$\sup_{\mathbb{R}} |P'| \leq N \sup_{\mathbb{R}} |P|.$$

Exercice 4

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ telle que $\hat{f}(x_0) = 0$. Montrer que l'espace vectoriel engendré par les $(\tau_x f)$, $x \in \mathbb{R}^n$ n'est pas dense dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, où $\tau_x f(t) = f(t - x)$.

Exercice 5

Le but de cet exercice est de rechercher des fonctions u intégrables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-s|} u(s) ds,$$

où β est un réel strictement positif.

1. Ecrire cette équation sous forme d'une équation faisant intervenir un produit de convolution.

2. En utilisant la transformée de Fourier, prouver qu'il existe une solution si et seulement si $\beta \in]0, 1/2[$. Montrer qu'alors cette solution est unique. La déterminer.

Exercice 6

On note $W = L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$, espace de Wiener constitué des fonctions intégrables qui sont également la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

1. Montrer que $f \in W \iff f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $f \in W \implies f \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.
3. Montrer que $f \in W \iff \hat{f} \in W$.
4. Montrer que si $(f, g) \in W^2$ alors $f \star g \in W$ et $fg \in W$.
5. Pour $f \in W$, on pose $N(f) = \|f\|_1 + \|\hat{f}\|_1$. Montrer que N est une norme sur W .
6. Dans cette question, on va prouver que W , muni de la norme N , est un espace de Banach. Pour cela, on considère (f_n) une suite de Cauchy de W pour cette norme.
 - (a) Montrer l'existence de $f \in L^1(\mathbb{R})$ et de $g \in L^1(\mathbb{R})$ tels que $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ et $\|\hat{f}_n - g\|_1 \rightarrow 0$.
 - (b) Montrer que $\hat{f} = g$ presque partout.
 - (c) En déduire que la suite (f_n) converge dans (W, N) , puis que (W, N) est un espace de Banach.
7. On pose $h(x) = e^{-\pi x^2}$, et on pose $h_n(x) = nh(x/n)$, dont on rappelle que c'est une unité approchée.
 - (a) Prouver que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f \star h_n$ est continue.
 - (b) Prouver que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f \star h_n$ est dans W .
8. (a) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$. Montrer que $\|f \star h_n - f\|_p \rightarrow 0$.
 (b) En déduire que W est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p \in [1, +\infty[$.
9. (a) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$. Montrer que $\|f \star h_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.
 (b) En déduire que W est dense dans $C_0(\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 7

En utilisant la transformation de Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, montrez que l'opération de convolution entre éléments de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ ne saurait admettre d'élément neutre.

Exercice 8

Considérez la fonction (intégrable sur $\mathbb{R}$) $\Delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Delta(t) = \max(0, 1 - |t|).$$

Vérifiez que la transformée de Fourier de $\hat{\Delta}$ est la fonction

$$\hat{\Delta} : \omega \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^2.$$

(avec la convention $\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} = 1$ si $\omega = 0$).

Exercice 9

[transformée de Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, transformée de Radon]

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^3 , identiquement nulle hors d'un pavé $[-R, R]^2$ du plan. Vérifiez que f définit un élément $\hat{f}$ de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ et que la transformée de Fourier de $\hat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ (on pensera à de judicieuses intégrations par parties). Déduisez en, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, la formule

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{]0, \infty[\times]0, 2\pi[} \hat{f}(re^{i\theta}) e^{ir(\cos \theta x + \sin \theta y)} r dr d\theta.$$

2. On reprend f comme à la question précédente. Pour tout $p \in \mathbb{R}$, pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, on pose

$$R[f](p, \theta) := \int_{\mathbb{R}} f(p \cos \theta - t \sin \theta, p \sin \theta + t \cos \theta) dt ;$$

cette intégrale correspond à l'intégrale de la fonction f sur la droite d'équation cartésienne

$$\langle (x, y), (\cos \theta, \sin \theta) \rangle = p.$$

Calculez, θ étant fixé dans $[0, 2\pi[$, la transformée de Fourier de la classe dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ de la fonction

$$p \in \mathbb{R} \longmapsto R[f](p, \theta)$$

(après avoir montré que cette fonction était bien intégrable sur $\mathbb{R}$ relativement à la mesure de Lebesgue) et déduisez de la question précédente un moyen de calculer f à partir de la connaissance de la fonction

$$R[f] : \mathbb{R} \times [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{C}.$$

Exercice 10

1. Calculez la transformée de Fourier de la fonction caractéristique de l'intervalle $[-T, T]$ de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de la fonction

$$t \longmapsto \chi_{[-T, T]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-T, T] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

lorsque T est un nombre strictement positif.

2. Soit $\Omega > 0$; la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, f_{\Omega}(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\Omega t)}{t}$$

et $f_{\Omega}(0) = 0$ est elle un représentant d'un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$?

Montrez que la fonction f_{Ω} est un représentant d'un élément d'une classe $\dot{f}_{\Omega} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ et que la transformée de Fourier de $\dot{f}_{\Omega}$ a pour représentant la fonction caractéristique de $[-\Omega, \Omega]$, c'est-à-dire la fonction

$$\omega \longmapsto \chi_{[-\Omega, \Omega]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in [-\Omega, \Omega] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(pensez à utiliser le Théorème 2.6 du cours et en particulier la formule d'inversion pour la transformée de Fourier L^2 , ainsi que le résultat établi à la question 1.).

Exercice 11

Calculez l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt$$

en pensant à utiliser la formule de Plancherel dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.