

EXERCICE (bases hilbertiennes, opérateurs, adjonction, Fourier)

1. Soit $h = (h_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ une suite de $l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ et $N \in \mathbb{N}^*$. En utilisant judicieusement l'inégalité de Cauchy-Schwarz, vérifier, pour tout $e = (e_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ dans $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, l'inégalité :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |h_{l-Nk}| |e_l| \right)^2 \leq \|h\|_1^2 \times \|e\|_2^2$$

(on pensera à exprimer $|h_{l-Nk}|$ sous la forme factorisée $\sqrt{|h_{l-Nk}|} \times \sqrt{|h_{l-Nk}|}$). En déduire que l'on définit un opérateur linéaire continu $R_N : l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ de norme inférieure ou égale à $\|h\|_1$, en posant

$$R_N(e) := \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} e_l h_{l-Nk} \right)_{k \in \mathbb{Z}}.$$

En utilisant l'indication proposée, puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |h_{l-Nk}| |e_l| \right)^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |h_{l-Nk}| \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |h_{l-Nk}| |e_l|^2 \right).$$

Si l'on utilise maintenant le théorème de Fubini-Tonelli, on observe que le membre de droite de l'inégalité s'écrit aussi :

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |e_l|^2 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_{l-Nk}| \left(\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} |h_{\lambda-Nk}| \right) \right).$$

En utilisant finalement l'invariance par translation de la mesure de décompte sur $\mathbb{Z}$, on note que :

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |e_l|^2 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_{l-Nk}| \left(\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} |h_{\lambda-Nk}| \right) \right) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |e_l|^2 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_{l-Nk}| \|h\|_1 \right) \\ &= \|h\|_1 \times \sum_{l \in \mathbb{Z}} |e_l|^2 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_{l-Nk}| \right) \\ &\leq \|e\|_2^2 \times \|h\|_1^2. \end{aligned}$$

C'est bien l'inégalité demandée. Puisque

$$\left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-Nk} e_l \right| \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} |h_{l-Nk}| |e_l| \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

il en résulte que la suite

$$\left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} e_l h_{l-Nk} \right)_{k \in \mathbb{Z}}$$

est bien dans $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, de norme au plus égale à $\|h\|_1 \times \|e\|_2$. L'application

$$e \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}) \mapsto \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} e_l h_{l-Nk} \right)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$$

est donc bien un opérateur linéaire continu de norme au plus égale à $\|h\|_1$.

2. Étant donnés deux suites $e = (e_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ et $f = (f_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ dans $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, écrire la formule d'adjonction pour l'opérateur R_N (impliquant ces deux suites) et en déduire l'expression du terme général de la suite $R_N^*(f)$.

La formule d'adjonction s'écrit (cf. la Proposition 1.14 du cours) :

$$\forall e \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}), \forall f \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}), \langle R_N(e), f \rangle = \langle e, R_N^*(f) \rangle.$$

En utilisant le théorème de Fubini (on vérifie qu'il s'applique grâce encore à l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on observe que :

$$\begin{aligned} \langle R_N(e), f \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (R_N(e))_k \overline{f_k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-Nk} e_l \right) \overline{f_k} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} e_l \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{l-Nk} \overline{f_k} \right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} e_l \overline{(R_N^*(f))_l}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$R_N^*(f) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_{l-Nk}} f_k \right)_{l \in \mathbb{Z}}.$$

3. Pourquoi, lorsque $f = (f_l)_{l \in \mathbb{Z}} \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, les deux séries (bilatères) de (classes de) fonctions (de $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{C}$)

$$\theta \mapsto \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} f_l e^{-il\theta}, \quad \theta \mapsto \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} (R_N^*(f))_l e^{-il\theta}$$

convergent-elles toutes les deux dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$? On note $\widehat{f}$ et $\widehat{R_N^*(f)}$ leurs sommes respectives dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$. Vérifier que l'on a, dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$, l'égalité :

$$\widehat{R_N^*(f)}(\theta) = \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{h_l} e^{-il\theta} \right) \times \widehat{f}(N\theta).$$

La famille de (classes de) fonctions 2π -périodiques $\theta \mapsto e^{-il\theta}$, $l \in \mathbb{Z}$, constitue une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$, équipé du produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \overline{\psi(\theta)} d\theta.$$

Les deux suites $(f_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ et $((R_N^*(f))_l)_{l \in \mathbb{Z}}$, toutes les deux dans $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, peuvent donc s'interpréter comme les listes des coordonnées dans cette base hilbertienne de deux éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$ notés respectivement $\widehat{f}$ et $\widehat{R_N^*(f)}$. La Proposition 1.9 du cours assure que les séries de fonctions

$$\theta \mapsto \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} f_l e^{-il\theta}, \quad \theta \mapsto \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} (R_N^*(f))_l e^{-il\theta}$$

convergent respectivement vers ces éléments $\widehat{f}$ et $\widehat{R_N^*(f)}$ dans le $\mathbb{C}$ -espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$. La (classe de) fonction $\theta \mapsto \widehat{f}(N\theta)$ s'exprime dans la base hilbertienne comme

$$\widehat{f}(N\theta) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_k e^{-ikN\theta},$$

la convergence de la série à droite ayant lieu dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$ et étant entendue au sens de la norme sur cet espace de Hilbert. Comme la suite $(h_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ est dans $l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, la série de fonctions

$$\theta \mapsto \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} \overline{h_l} e^{-il\theta}$$

est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ (pour la norme uniforme) et sa somme définit une fonction 2π -périodique continue (donc bornée) sur $\mathbb{R}$. La classe de fonction

$$\theta \mapsto \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{h_l} e^{-il\theta} \right) \widehat{f}(N\theta)$$

définit donc un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$. Pour vérifier la formule demandée, il suffit de calculer la suite des coordonnées $(c_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}}$ de cet élément dans la base hilbertienne définie par les $\theta \mapsto e^{-i\lambda\theta}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$,

$$c_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} \overline{h_l} e^{-il\theta} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_k e^{-ikN\theta} \right) e^{i\lambda\theta} d\theta.$$

Si l'on développe le produit sous l'intégrale (et que l'on utilise la convergence dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$ des deux séries qui figurent sous l'intégrale), on observe que les seuls coefficients contribuant à une contribution non nulle dans l'expression de c_λ sont les coefficients $\overline{h_l} f_k$, avec $l + kN = \lambda$, *i.e.* $l = \lambda - kN$ (cela résulte de l'orthogonalité entre elles des classes de fonctions $\theta \mapsto e^{i\nu\theta}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$). Il en résulte

$$c_\lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_{\lambda - kN}} f_k = (R_N^*(f))_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{Z}.$$

L'égalité demandée en résulte.

4. Calculer, si $e \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, le coefficient de Fourier complexe $c_0[\dot{\varphi}_{e,h}]$ de la classe de fonction 2π -périodique

$$\dot{\varphi}_{e,h} : \theta \mapsto \widehat{e}(\theta) \times \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l e^{il\theta} = \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} e_l e^{-il\theta} \right) \times \left(\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} h_\lambda e^{i\lambda\theta} \right).$$

En utilisant le résultat établi à la question **3**, prouver que, pour tout élément $e = (e_l)_{l \in \mathbb{Z}} \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, pour tout élément $f = (f_l)_{l \in \mathbb{Z}} \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \langle R_N(e), f \rangle = \langle e, \overline{h} \rangle \times \overline{f_0}.$$

Comme la classe de fonction $\dot{\varphi}_{e,h}$ se factorise en

$$\dot{\varphi}_{e,h}(\theta) = \left(\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} e_l e^{-il\theta} \right) \times \left(\sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} h_\lambda e^{i\lambda\theta} \right),$$

on observe qu'une fois le produit effectué (les convergences des séries de fonctions impliquées étant entendues dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$ pour la première, normalement pour la norme uniforme pour la seconde), le coefficient de Fourier $c_0[\dot{\varphi}_{e,h}]$ s'obtient comme la somme des seules contributions des produits de coefficients $e_l \times h_\lambda$ avec $\lambda - l = 0$, *i.e.* $\lambda = l$. Ce coefficient de Fourier vaut donc

$$c_0[\dot{\varphi}_{e,h}] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} e_l h_l = \langle e, \overline{h} \rangle.$$

On a, d'après la formule d'adjonction, si e et f sont deux éléments de $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$,

$$\langle R_N(e), f \rangle = \langle e, R_N^*(f) \rangle \quad \forall N \in \mathbb{N}^*.$$

Il résulte de la formule de Plancherel, combinée avec le résultat établi à la question **3**, que :

$$\begin{aligned}\langle R_N(e), f \rangle = \langle e, R_N^*(f) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{e}(\theta) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l e^{il\theta} \right) \overline{\widehat{f}(N\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{e,h}(\theta) \overline{\widehat{f}(N\theta)} d\theta \quad \forall N \in \mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Plancherel à nouveau (mais dans l'autre sens cette fois), on trouve :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{e,h}(\theta) \overline{\widehat{f}(N\theta)} d\theta = c_0(\dot{\varphi}_{e,h}) \overline{c_0(\widehat{f})} + \sum_{\{k \in \mathbb{Z}^*; N \text{ divise } k\}} c_k(\dot{\varphi}_{e,h}) \overline{c_k(\widehat{f})}.$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\{k \in \mathbb{Z}^*; N \text{ divise } k\}} |c_k(\widehat{f})|^2 = 0$$

(car $\widehat{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$) et que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(\dot{\varphi}_{e,h})|^2 = \|\dot{\varphi}_{e,h}\|^2 < +\infty$, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{\{k \in \mathbb{Z}^*; N \text{ divise } k\}} c_k(\dot{\varphi}_{e,h}) \overline{c_k(\widehat{f})} \right) = 0.$$

Cela conclut à la preuve du résultat demandé.

PROBLEME (Fourier)

Partie I

I.1. Soit a un nombre réel strictement positif et f_a la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_a(t) = \exp(-a|t|)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Vérifier que f_a représente un élément $\dot{f}_a$ de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$ et calculer la transformée de Fourier de $\dot{f}_a$.

L'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a|t|} dt = 2 \int_{[0, \infty[} e^{-at} dt = 2/a$$

est convergente, donc f_a représente un élément $\dot{f}_a$ de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$. La transformée de Fourier est définie par :

$$\begin{aligned}\widehat{\dot{f}_a}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt = \int_{[0, \infty[} \left(e^{-(a+i\omega)t} + e^{-(a-i\omega)t} \right) dt \\ &= \left(\frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} \right) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

I.2. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Dédurre du résultat établi à la question 1 le calcul de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega t}}{t^2 + a^2} dt.$$

On constate (d'après le résultat obtenu à la question 1) que la transformée de Fourier de $\dot{f}_a$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ (car il y a intégrabilité en $\pm\infty$ en vertu du critère de Riemann). On peut donc appliquer la formule d'inversion de Fourier dans le cadre L^1 (théorème 2.4 du cours). Un représentant continu de $\dot{f}_a$ est donc donné par la fonction :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\dot{f}_a}(\omega) e^{it\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{a}{a^2 + \omega^2} e^{it\omega} d\omega.$$

Comme f_a est un autre représentant continu de $\dot{f}_a$, les deux représentants continus de la même classe $\dot{f}_a$ coïncident et on a donc l'identité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{-a|t|} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{a}{a^2 + \omega^2} e^{it\omega} d\omega.$$

En échangeant les notations t et ω , il vient :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega t}}{t^2 + a^2} dt.$$

L'intégrale à calculer vaut donc $(\pi/a) e^{-a|\omega|}$.

I.3. Montrer que $\dot{f}_a * \dot{f}_a$ admet un représentant continu que l'on calculera.

La convolée de $\dot{f}_a$ par elle-même définit (puisque la convolution est une opération interne de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$) un élément de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$ dont un représentant est donné presque partout par

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-a|s|} e^{-a|t-s|} dt.$$

Or, il se trouve qu'en fait, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a|s|} e^{-a|t-s|} dt$$

converge et que la fonction

$$F : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-a|s|} e^{-a|t-s|} dt$$

est une fonction continue (d'après le théorème de Lebesgue de continuité des intégrales fonctions d'un paramètre : en effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $s \mapsto e^{-a|t-s|}e^{-a|s|}$, qui dépend continument du paramètre t , est dominée par la fonction intégrable $s \mapsto e^{-a|s|}$). La fonction F définit donc un représentant continu de $\dot{f}_a * \dot{f}_a$. Pour calculer F , on remarque qu'il s'agit d'une fonction paire (convolée de deux fonctions paires) et l'on peut se contenter de calculer $F(t)$ pour $t \geq 0$. On a pour un tel $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^0 e^{as-a(t-s)} ds + \int_0^t e^{-as-a(t-s)} ds + \int_t^{\infty} e^{-as-a(s-t)} ds \\ &= e^{-at} \int_{-\infty}^0 e^{2as} ds + te^{-at} + e^{at} \int_t^{\infty} e^{-2as} ds \\ &= \frac{e^{-at}}{2a} + te^{-at} + \frac{e^{-at}}{2a} = e^{-at} \left(\frac{at+1}{a} \right). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = e^{-a|t|} \left(\frac{a|t|+1}{a} \right).$$

I.4. Dédurre du calcul effectué à la question 3 la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega t}}{(t^2 + a^2)^2} dt \quad \text{lorsque } \omega \in \mathbb{R}.$$

Puisque la transformée de Fourier de $\dot{f}_a * \dot{f}_a$ est égale au produit $\widehat{\dot{f}_a} \times \widehat{\dot{f}_a}$ (d'après la Proposition 2.8 du cours), on a :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} F(t) e^{-i\omega t} dt = \left(\frac{2a}{a^2 + \omega^2} \right)^2 = \frac{4a^2}{(a^2 + \omega^2)^2}.$$

Comme $\widehat{F}$ est (comme F) intégrable, la formule d'inversion de Fourier dans le cadre L^1 s'applique une nouvelle fois. Puisque F est continue, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(\omega) e^{it\omega} d\omega = \frac{2a^2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\omega}}{(a^2 + \omega^2)^2} d\omega.$$

En échangeant les notations t et ω , on en déduit :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega t}}{(a^2 + t^2)^2} dt = \frac{\pi F(\omega)}{2a^2} = \frac{\pi}{2a^2} e^{-a|\omega|} \left(\frac{a|\omega|+1}{a} \right).$$

5. Soit $b \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les fonctions continues et intégrables g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = e^{-a|t|+b} \int_{\mathbb{R}} e^{-a|t-s|} g(s) ds \quad (\text{discuter suivant la valeur de } b).$$

Puisque g est supposée intégrable et que $f_a : t \mapsto e^{-a|t|}$ l'est aussi, on peut, si g est solution de

$$g(t) = e^{-a|t|} + \int_{\mathbb{R}} e^{-a|t-s|} g(s) ds = f_a(t) + (g * f_a)(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

prendre la transformée de Fourier des deux membres (considérés comme représentants de fonctions intégrables), ce qui donne :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{g}(\omega) = \widehat{f_a}(\omega) + b \widehat{f_a}(\omega) \widehat{g}(\omega).$$

On en déduit :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{g}(\omega) \left(1 - \frac{2ab}{a^2 + \omega^2}\right) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

soit

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{g}(\omega) (a(a - 2b) + \omega^2) = 2a.$$

On doit ici discuter suivant les valeurs de b .

- Si $a(a - 2b) = \tau_b^2 > 0$ (*i.e.* $b < a/2$), on en déduit que

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{2a}{\tau_b^2 + \omega^2},$$

ce qui donne (d'après le résultat établi à la question 1) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = g_b(t) = \frac{a}{\tau_b} e^{-\tau_b|t|}.$$

La fonction g_b est donc l'unique fonction solution du problème puisque la transformation de Fourier est injective sur $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$ (d'après la formule d'inversion dans le cadre L^1).

- Si $a(a - 2b) = -\tau_b^2 \leq 0$ (*i.e.* $b \geq a/2$), on trouve que, si g est solution du problème posé, alors nécessairement

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{g}(\omega) (\omega^2 - \tau_b^2) = 2.$$

Mais la fonction

$$\omega \in \mathbb{R} \setminus \{\pm a\} \mapsto \frac{2}{\omega^2 - \tau_b^2}$$

ne représente pas dans ce cas une classe de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$ car elle n'est pas intégrable au voisinage de $\pm \tau_b$ (en vertu du critère de Riemann). Le problème posé n'admet alors pas de solution.

Partie II

II.1. Soit $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$, tel que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, d\omega)$. Pourquoi existe-t-il un unique représentant continu de $\dot{f}$? Que vaut $f(t)$ en fonction de $\widehat{f}$? On notera f ce représentant.

D'après la formule d'inversion de Fourier dans le cadre L^1 (théorème 2.4 du cours), la fonction

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{it\omega} d\omega$$

est un représentant continu de $\dot{f}$. Ce représentant continu est unique car deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ égales dt -presque partout sont égales partout.

II.2. Montrer que la série (bilatère) de fonctions

$$\theta \in [-\pi, \pi] \mapsto \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \widehat{f}(\theta + 2j\pi)$$

est normalement convergente dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$ si $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ (c'est-à-dire que $\sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \|\widehat{f}(\cdot + 2j\pi)\|_{L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)} < +\infty$). On note par la suite $\dot{\Psi}$ l'élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$ défini comme la somme de cette série de fonctions dans l'espace de Banach $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$.

On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} |\widehat{f}(\theta + 2j\pi)| d\theta = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \int_{(2j-1)\pi}^{(2j+1)\pi} |\widehat{f}(\theta)| d\theta = \|\widehat{f}\|_{\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, d\omega)} < +\infty.$$

Ceci prouve la convergence normale de la série (bilatère) de fonctions

$$\theta \in [-\pi, \pi] \mapsto \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \widehat{f}(\theta + 2j\pi)$$

dans l'espace normé complet $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$.

II.3. Donner, pour $N \in \mathbb{N}^*$, les définitions des noyaux de Dirichlet D_N et de Fejér F_N , leurs expressions analytiques « simplifiées », et l'allure (sur une même figure, et pour la même valeur de N) de leurs graphes au dessus de $[-\pi, \pi]$. Pointer ce qui différencie ces deux graphes. Vérifier que l'on a :

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=-N}^N f(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) D_N(\theta) d\theta \\ \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) f(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) F_N(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Le noyau de Dirichlet est la fonction polynomiale trigonométrique définie par

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, D_N(\theta) = \sum_{k=-N}^N e^{ik\theta}.$$

La forme « simplifiée » est :

$$D_N(\theta) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{(2N+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} & \text{si } \theta \not\equiv 0 \text{ modulo } 2\pi \\ 2N+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le noyau de Fejér est la fonction polynomiale trigonométrique définie par

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, F_N(\theta) = \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) e^{ik\theta}.$$

La forme « simplifiée » est :

$$F_N(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \frac{N\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)^2 & \text{si } \theta \not\equiv 0 \text{ modulo } 2\pi \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a représenté les deux graphes sur la figure suivante (rapporter l'intervalle des abscisses à l'échelle $1 = 2\pi$) : Le noyau de Fejér est positif, le noyau de Dirichlet ne l'est pas. Les deux noyaux sont d'intégrale 2π sur $[-\pi, \pi]$, mais le lobe central du noyau de Fejér est (approximativement deux fois) plus tassé (et en conséquence plus d'autant plus « élargi ») que ne l'est celui du noyau de Dirichlet. On note aussi la présence du facteur $1/N$ dans l'expression analytique simplifiée du noyau de Fejér, ce qui explique pourquoi le graphe de F_N s'écroule (hors de l'origine) de manière uniforme sur l'axe des abscisses lorsque N tend vers $+\infty$. En ce qui concerne le noyau de Dirichlet, ceci est moins net et se fait en tout cas de manière oscillante.

Grâce à la formule d'inversion de Fourier, appliquée à $k = -N, \dots, N$, on a,

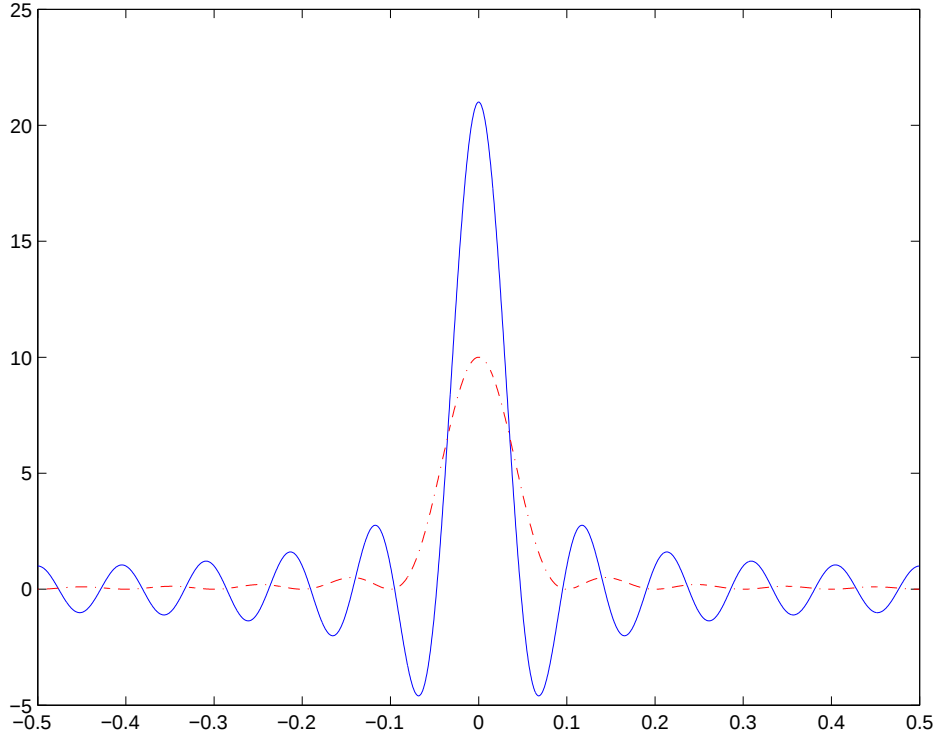


FIGURE 1 – Les graphes des noyaux de Dirichlet et Fejér ($N = 20$)

en ajoutant :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=-N}^N f(k) &= \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{ik\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) D_N(\omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{(2j-1)\pi}^{(2j+1)\pi} \widehat{f}(\omega) D_N(\omega) d\omega \quad (\text{invariance de } d\omega \text{ par translation}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(\theta + 2j\pi) D_N(\theta) d\theta \quad (D_N \text{ est } 2\pi\text{-périodique}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(\theta) D_N(\theta) d\theta \quad (\text{par Fubini}).
 \end{aligned}$$

On répète exactement le même raisonnement pour l'autre formule impliquant le noyau de Fejér (on pourrait tout aussi bien exploiter le fait que $F_N = (D_0 + \dots + D_{N-1})/N$) et déduire ainsi la seconde formule de la première en sommant au sens de Cesàro).

II.4. On suppose que $\dot{\Psi}$ admet un représentant 2π -périodique $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

continu en $\theta = 0$ et admettant une dérivée à gauche et une dérivée à droite en ce point. Vérifier (en citant précisément le théorème invoqué) que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N f(k) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) f(k) = \Psi(0).$$

Que subsiste-t-il du résultat ci-dessus lorsque Ψ est seulement supposée continue en 0, sans être cette fois dérivable à gauche et à droite en ce point ?

Lorsque $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction 2π -périodique, intégrable sur $[-\pi, \pi]$, continue en 0 et ayant une dérivée à gauche et à droite en 0, on est dans les conditions d'application du théorème de Jordan-Dirichlet (théorème 2.1 du cours). On a donc ici :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(\theta) D_N(\theta) d\theta \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N[\psi](0) = \Psi(0).$$

Comme

$$F_N(\theta) = \frac{1}{N} \left(D_0(\theta) + \cdots + D_{N-1}(\theta) \right)$$

et que la convergence d'une suite de nombres complexes vers une limite finie $l \in \mathbb{C}$ implique sa convergence au sens de Cesàro vers la même limite, on a aussi :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) f(k) = \Psi(0).$$

On déduit donc de la question **II.3** le résultat voulu. Si Ψ est seulement supposée continue en $\theta = 0$, seul subsiste le résultat :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) f(k) = \Psi(0).$$

Ceci résulte du fait que la suite $(F_N/2\pi)_{N \geq 1}$ réalise une approximation de la masse de Dirac, ce que ne réalise pas la suite $(D_N/2\pi)_{N \geq 1}$ (c'est le théorème de Fejér dans sa version locale, théorème 2.3 du cours, et non plus celui de Jordan-Dirichlet qu'il faut alors invoquer).

II.5. Soit $a > 0$, comme dans la partie I. En appliquant le résultat établi à la question **II.3**, montrer que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-a|k|} = 2a \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 j^2}. \quad (*)$$

Laquelle de ces deux séries numériques converge-t-elle le plus rapidement ?
Dédurre de l'identité (*) l'identité :

$$\forall a > 0, \quad \frac{a^2}{2\pi^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{j^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}} = a \frac{1 + e^{-a}}{1 - e^{-a}}. \quad (*)$$

Effectuer un développement limité à l'ordre 4 des deux membres de l'identité (*) en $a = 0_+$ et prouver les égalités :

$$\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Suggérer enfin (sans toutefois la mettre en route) une méthode permettant de calculer explicitement les sommes $\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^{2p}}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

La classe $\hat{f}_a$ vérifie les hypothèses de la question **II.1** car on a

$$\hat{f}_a : \omega \mapsto \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}, d\omega).$$

De plus, il se trouve dans ce cas que la série de fonctions

$$\theta \mapsto \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \hat{f}_a(\theta + 2\pi j)$$

converge normalement dans $C^0(\mathbb{T})$ (équipé de la norme de la convergence uniforme). On peut donc poser, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\Psi(\theta) := \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \hat{f}_a(\theta + 2\pi j) = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \frac{2a}{a^2 + (\theta + 2\pi j)^2}.$$

La fonction définie ainsi est non seulement continue, mais aussi de classe C^1 , comme on le voit en utilisant le théorème de dérivation des intégrales (ici c'est l'intégration discrète sur $\mathbb{Z}$ à laquelle nous avons affaire) dépendant d'un paramètre de Lebesgue. D'après le résultat établi à la question **II.4**, on a donc

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-a|k|} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N e^{-a|k|} = \Psi(0) = 2a \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 j^2}. \quad (*)$$

C'est évidemment la série numérique figurant au membre de gauche qui converge le plus rapidement (convergence exponentielle *versus* convergence en $O(1/j^2)$). Le membre de gauche de cette formule s'exprime comme :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-a|k|} = 2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak} \right) - 1 = \frac{2}{1 - e^{-a}} - 1 = \frac{1 + e^{-a}}{1 - e^{-a}}.$$

En multipliant par a les deux membres de la formule $(*)$, on obtient l'identité $(\star)$ voulue (pour tout $a > 0$). Le DL à l'ordre 4 du second membre de $(\star)$ (au voisinage de $a = 0_+$) s'écrit :

$$a \frac{1 + e^{-a}}{1 - e^{-a}} = 2 + \frac{a^2}{6} - \frac{a^4}{360} + o(a^4) \quad (\dagger)$$

On a d'autre part

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{j^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}} = 2 \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}} + \frac{4\pi^2}{a^2}.$$

En utilisant le fait que

$$\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2 + \lambda} = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2} - \sum_{j \geq 1} \frac{\lambda}{j^2(j^2 + \lambda)}$$

si $\lambda = a^2/4\pi^2$, on voit que

$$\frac{a^2}{2\pi^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{j^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}} = 2 + \frac{a^2}{\pi^2} \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2} \right) - \frac{a^2}{\pi^2} \times \frac{a^2}{4\pi^2} \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^4} \right) + o(|a|^4). \quad (\dagger\dagger)$$

En identifiant les deux développements limités $(\dagger)$ et $(\dagger\dagger)$, on trouve bien

$$\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

FIN