Semestre 6, Année 2012-2013 SESSION 2

UE : MA6012

Date : 24 Juin 2013, 14h-17h Durée : 3h

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

EXERCICE (transformation de Fourier)

1. *Rappeler (sans démonstration) quelle est la transformée de Fourier de la gaussienne centrée réduite*

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2).$$

On a, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2/2)\, e^{-i\omega t}\, dt = \exp(-\omega^2/2)$$

car l'on sait (voir l'exemple 2.4 du cours) que la gaussienne centrée réduite est vecteur propre de la transformation de Fourier, associé à la valeur propre $\sqrt{2\pi}$.

2. *Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Déduire de la question* **1** *l'expression de la transformée de Fourier de la fonction*

$$g_{m,\sigma} \ : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\Big(-\frac{(t-m)^2}{2\,\sigma^2}\Big).$$

Il s'agit juste ici d'effectuer un changement de variables dans l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\Big)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

On pose

$$u = \frac{t-m}{\sigma} \Longleftrightarrow t = \sigma\, u + m,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\Big)\, e^{-i\omega t}\, dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-im\omega} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2}\, e^{-i\omega\sigma u}\, du \\ &= e^{-im\omega} \exp(-\sigma^2\omega^2/2) \end{aligned}$$

si l'on utilise le résultat rappelé à la question **1**.

3. *En utilisant le résultat établi à la question* **2***, montrer que la convolée* $g_{m_1,\sigma_1} * g_{m_2,\sigma_2}$ *(lorsque* $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ *et* $\sigma_1, \sigma_2 > 0$*) est une fonction du type* $g_{m,\sigma}$ *pour des constantes* m *et* σ *que l'on exprimera en fonction de* $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$*.*
D'après la Proposition 2.8 du cours, la transformation de Fourier transforme l'opération de convolution entre fonctions intégrables en l'opération de multiplication au niveau des spectres. La transformée de Fourier de $g_{m_1,\sigma_1} * g_{m_2,\sigma_2}$ est donc, d'après le résultat établi à la question **2** :
$$\omega \longmapsto e^{-im_1\omega}\, e^{-\sigma_1^2\omega^2/2} \times e^{-im_1\omega}\, e^{-\sigma_1^2\omega^2/2} = e^{-i(m_1+m_2)\omega}\, e^{-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\,\omega^2/2}.$$
On reconnait la transformée de Fourier de $g_{m,\sigma}$, où $m = m_1 + m_2$ et $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. On a donc
$$g_{m_1,\sigma_1} * g_{m_2,\sigma_2} = g_{m_1+m_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}.$$

4. *Soit* $t > 0$ *et* $\omega_0 \in \mathbb{R}$*. Déterminer l'unique fonction*
$$U_{\omega_0,t}\ : x \in \mathbb{R} \mapsto U_{\omega_0,t}(x) \in \mathbb{C},$$
intégrable sur $\mathbb{R}$*, et dont la transformée de Fourier est la fonction :*
$$\omega \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(-t(\omega - \omega_0)^2).$$
Vérifier que la fonction $(t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R} \longmapsto U_{0,t}(x) \in \mathbb{C}$ *est une fonction réelle,* C^∞ *en les deux variables* t *et* x*, et solution de l'équation aux dérivées partielles (dite de la chaleur)*
$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)\,[U_{0,t}(x)] \equiv 0$$
dans $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$*.* D'après le résultat établi à la question 2, si l'on pose $t = \sigma^2/2$, on voit que la fonction
$$\omega \mapsto \exp(-t\omega^2) = \exp(-\sigma^2\,\omega^2/2)$$
est la transformée de la gaussienne $g_{0,\sigma}$, avec $\sigma = \sqrt{2t}$. Pour obtenir après transformation de Fourier la fonction translatée
$$\omega \mapsto \exp(-t(\omega - \omega_0)^2),$$
il convient de multiplier l'antécédent $g_{0,\sqrt{2t}}$ par la fonction oscillante $x \mapsto e^{i\omega_0 x}$ (voir la formule (2.34) du cours). L'antécédent demandé est donc la fonction
$$x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{i\omega_0 x}\, g_{0,\sqrt{2t}}(x) = e^{i\omega_0 x} \times \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, \exp\Big(-\frac{x^2}{4t}\Big).$$

On a donc

$$\forall\, t > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ U_{0,t}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\Big(- \frac{x^2}{4t}\Big).$$

Cette fonction est bien réelle, C^∞ comme fonction composée de fonctions C^∞ (ici $t \neq 0$). Qu'elle vérifie l'équation aux dérivées partielles de la chaleur relève d'un calcul immédiat.

EXERCICE II (séries de Fourier)

Soit N un entier strictement positif.

1. *Rappeler la définition des noyaux de Dirichlet D_N et de Fejér F_N sur $[-\pi, \pi]$ en donnant les expressions développées ainsi que les expressions simplifiées de ces deux noyaux. Représenter sommairement les graphes de D_N et F_N sur $[-\pi, \pi]$ (pour une même valeur de N) et lister ce qui les différencie.* Le noyau de Dirichlet D_N est la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$D_N(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ik\theta} = \begin{cases} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ si } \theta \neq 0 \\ 2N+1 \text{ si } \theta = 0. \end{cases}$$

Le noyau de Fejér F_N est la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$F_N(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} \Big(1 - \frac{|k|}{N}\Big) e^{ik\theta} = \begin{cases} \frac{1}{N}\left(\frac{\sin\frac{N\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 \text{ si } \theta \neq 0 \\ N \text{ si } \theta = 0. \end{cases}$$

Les graphes de D_N et F_N sont représentés ci-dessous. Voici ce qui les différencie :

– le noyau de Fejér est positif, le noyau de Dirichlet ne l'est pas ;

– les deux noyaux sont d'intégrale 2π sur $[-\pi, \pi]$, mais le lobe central du noyau de Fejér est (approximativement deux fois) plus tassé (et en conséquence plus d'autant plus « élargi ») que ne l'est celui du noyau de Dirichlet ;

– on note enfin la présence du facteur $1/N$ dans l'expression analytique simplifiée du noyau de Fejér, ce qui explique pourquoi le graphe de F_N s'écrase (hors de l'origine) de manière uniforme sur l'axe des abscisses lorsque N tend vers $+\infty$; en ce qui concerne le noyau de Dirichlet, ceci est moins net et se fait en tout cas de manière oscillante.

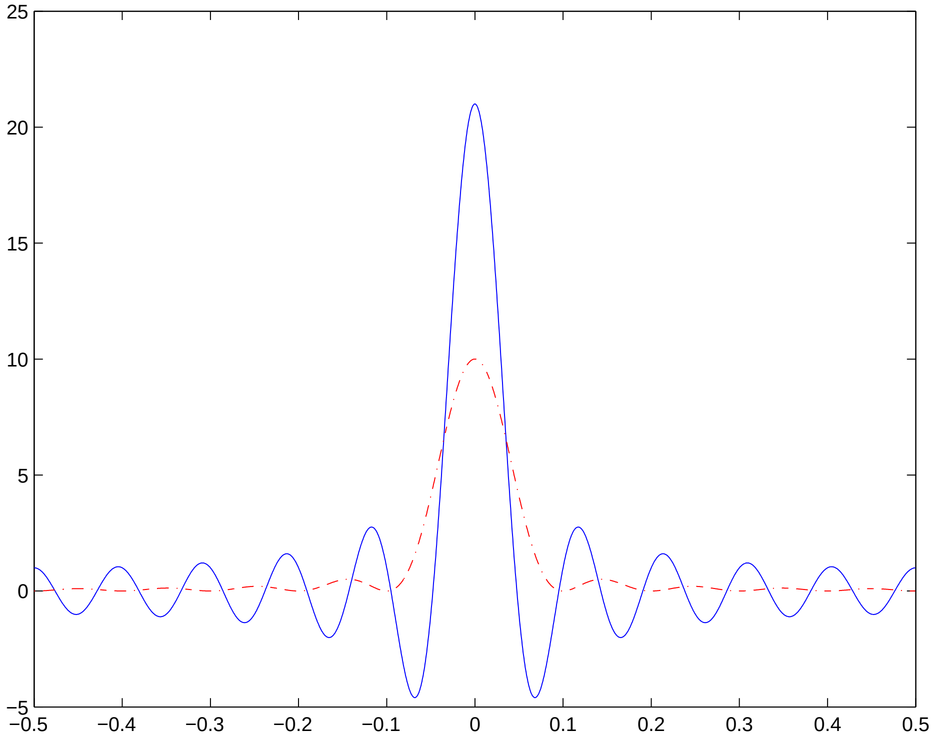

FIGURE 1 – Les graphes des noyaux de Dirichlet [en trait plein] et Fejér [en traits pointillés] pour $N = 20$

2. *Soit P un polynôme trigonométrique*

$$\theta \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{k=0}^{N} c_k \, e^{ik\theta},$$

Calculer (en exprimant dans un premier temps sa série de Fourier) la convolée $F_N \overset{\text{per}}{*} Q$, où Q est la fonction 2π-périodique

$$Q \ : \theta \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-iN\theta} \, P(\theta)$$

et exprimer cette convolée en termes de la fonction dérivée P'. La fonction 2π-périodique Q s'écrit :

$$Q(\theta) = \sum_{k=0}^{N} c_k e^{i(k-N)\theta} = \sum_{k=-N}^{0} c_{k+N} e^{ik\theta}.$$

La convolée de cette fonction avec F_N s'écrit donc

$$Q \overset{\text{per}}{*} F_N(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(\dot{Q}) c_k(\dot{K}_N)\, e^{ik\theta}$$

$$= \sum_{k=-N}^{0} c_{k+N}(\dot{P})\,(1+k/N)\, e^{ik\theta}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} k c_k(\dot{P})\, e^{i(k-N)\theta}$$

$$= \frac{1}{N} e^{-iN\theta}\, P'(\theta).$$

3. *Prouver l'inégalité*

$$\sup_{\mathbb{R}} |F_N \overset{\text{per}}{*} Q| \le \sup_{\mathbb{R}} |P|$$

et déduire du résultat établi à la question **2** *l'inégalité de Bernstein :*

$$\sup_{\mathbb{R}} |P'| \le N \sup_{\mathbb{R}} |P|.$$

On a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$F_N \overset{\text{per}}{*} Q(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_N(\tau)\, Q(\theta - \tau)\, d\tau.$$

Comme $F_N \ge 0$, on a (en prenant les valeurs absolues) :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad |F_N \overset{\text{per}}{*} Q(\theta)| \le \sup_{\mathbb{R}} |Q| \times \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_N(\tau)\, d\tau\Big)$$

$$= \sup_{\mathbb{R}} |Q| = \sup_{\mathbb{R}} |P|$$

puisque F_N est d'intégrale 2π sur $[0, 2\pi]$. En tenant compte du résultat établi à la question **2**, on a donc :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad |P'(\theta)| = N\, |F_N \overset{\text{per}}{*} Q(\theta)| \le N \sup_{\mathbb{R}} |P|\,,$$

d'où le résultat demandé.

PROBLEME (Fourier-Hilbert)

Soit $(\omega_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *une famille de nombres de* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *tels que* $\omega_k - \omega_l \notin \mathbb{Z}$ *lorsque* $k \neq l$ *et*

$$\mu = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |k - \omega_k| < +\infty.$$

On note e_k la fonction 2π-périodique $\theta \in \mathbb{R} \longmapsto e_k(\theta) = e^{ik\theta}$ et f_k la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ obtenue en périodisant (avec période 2π) la fonction $\theta \in [-\pi, \pi[\longmapsto f_k(\theta) = e^{i\omega_k \theta}$.

1. *Calculer, si $k_0 \in \mathbb{Z}$, la suite $(c_{k_0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier complexes de la fonction f_{k_0}, puis la valeur de la somme*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\frac{\sin\big(\pi(\omega_{k_0} - k)\big)}{\pi(\omega_{k_0} - k)}\Big)^2.$$

Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$. Que vaut

$$\lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{k=-N}^{N} c_{k_0,k}\, e^{ik\theta}\Big) \ ?$$

On discutera si nécessaire suivant la valeur de θ. On a, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_{k_0,k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{k_0}(\theta)\, e^{-ik\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\omega_{k_0}-k)\,\theta}\, d\theta = \frac{\sin\big(\pi(\omega_{k_0} - k)\big)}{\pi(\omega_{k_0} - k)}.$$

Compte-tenu de la formule de Plancherel (formule (2.15), remarque 2.5 du cours), on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\frac{\sin\big(\pi(\omega_{k_0} - k)\big)}{\pi(\omega_{k_0} - k)}\Big)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_{k_0}(\theta)|^2\, d\theta = 1.$$

La fonction f_{k_0} est une fonction C^∞ sur $]-\pi, \pi[$. Au points $-\pi$ et π, cette fonction est dérivable à gauche et à droite. D'après le théorème de Jordan-Dirichlet (Théorème 2.1 du cours et remarque 2.7), on a

$$\lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{k=-N}^{N} c_{k_0,k}\, e^{ik\theta}\Big) = \frac{f_{k_0}(\theta_-) + f_{k_0}(\theta_+)}{2} = \begin{cases} e^{i\omega_{k_0}\theta} \text{ si } \theta \in]-\pi, \pi[\\ \cos(\omega_{k_0}\pi) \text{ si } \theta = \pm\pi. \end{cases}$$

2. *On introduit le $\mathbb{C}$-espace de Hilbert $H = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ des classes $\dot{h}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques et telles que $|h|^2$ soit intégrable sur $[-\pi, \pi]$, le produit scalaire étant*

$$\langle \dot{h}_1, \dot{h}_2 \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_1(\theta)\, \overline{h_2(\theta)}\, d\theta,$$

et l'on note $\| \ \|$ la norme associée. Les $(\dot{e}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ constituent-t-ils une base hilbertienne de H ? Même question en ce qui concerne les $(\dot{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Le système $(\dot{e}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de H (exemples 1.4 et 1.4 revisité du cours). Par contre, le système $(\dot{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ n'est pas orthogonal en général car, si $k \neq l$,

$$\langle \dot{f}_k, \dot{f}_l \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\omega_k - \omega_l)\theta}\, d\theta = \frac{\sin\big(\pi(\omega_k - \omega_l)\big)}{\pi(\omega_k - \omega_l)} \neq 0$$

(puisque $\omega_k - \omega_l \notin \mathbb{Z}$ lorsque $k \neq l$).

3. *En utilisant le développement en série de la fonction exponentielle et l'inégalité de Minkowski pour la norme $\|\ \|$, vérifier, pour toute partie finie F de $\mathbb{Z}$, pour toute collection de nombres complexes $(\lambda_k)_{k\in F}$:*

$$\Big\| \sum_{k\in F} \lambda_k\, (\dot{e}_k - \dot{f}_k) \Big\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big| \sum_{k\in F} \lambda_k\ (1 - e^{i(\omega_k - k)\theta})\, e^{ik\theta} \Big|^2 d\theta \right)^{1/2}$$
$$\leq\ \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\pi^\ell}{\ell!} \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big| \sum_{k\in F} \lambda_k \big(i(\omega_k - k)\big)^\ell\, e^{ik\theta} \Big|^2 d\theta \Big)^{1/2}.$$

La première formule est juste une réécriture utilisant la définition de la norme $\|\ \|$, une fois que l'on a noté que

$$\forall\, \theta \in [-\pi, \pi[,\ \sum_{k\in F} \lambda_k\, (e_k(\theta) - f_k(\theta)) = \sum_{k\in F} \lambda_k\, e^{ik\theta} \big(1 - e^{i(\omega_k - k)\theta}\big).$$

Pour la seconde formule, on utilise le fait que

$$\forall\, \theta \in [-\pi, \pi[, \quad 1 - e^{i(\omega_k - k)\theta} = - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{i^\ell (\omega_k - k)^\ell\, \theta^k}{\ell!}$$

et que, par conséquent, pour tout $\theta \in [-\pi, \pi[$,

$$\begin{aligned} \sum_{k\in F} \lambda_k\, (e_k(\theta) - f_k(\theta)) &= - \sum_{k\in F} \lambda_k\, e^{ik\theta} \Big(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^\ell\, \theta^\ell}{\ell!} (\omega_k - k)^\ell \Big) \\ &= - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\theta^\ell}{\ell!} \Big(\sum_{k\in F} \lambda_k\ \big(i(\omega_k - k)\big)^\ell\, e^{ik\theta} \Big) \\ &= - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\theta^\ell}{\ell!}\, \varphi_\ell(\theta) \end{aligned}$$

si l'on pose

$$\forall\, \ell \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, \theta \in [-\pi, \pi[,\ \varphi_\ell(\theta) = \sum_{k\in F} \lambda_k \big(i(\omega_k - k)\big)^\ell\, e^{ik\theta}.$$

L'inégalité de Minkowski permet d'affirmer que

$$\Big\| \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(\cdot)^\ell}{\ell!}\, \varphi_\ell(\cdot) \Big\| \;\leq\; \sum_{\ell=1}^{\infty} \Big\| \frac{(\cdot)^\ell}{\ell!}\, \varphi_\ell(\cdot) \Big\| \;\leq\; \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\pi^\ell}{\ell!}\, \|\varphi_\ell\|.$$

On obtient ainsi l'inégalité demandée.

4. *En utilisant la formule de Plancherel, déduire de l'inégalité établie à la question* **3** *que pour toute partie finie F de $\mathbb{Z}$, pour toute collection de nombres complexes $(\lambda_k)_{k\in F}$, on a l'inégalité :*

$$\Big\| \sum_{k\in F} \lambda_k\, (\dot{e}_k - \dot{f}_k) \Big\| \leq (e^{\mu\pi} - 1) \sqrt{\sum_{k\in F} |\lambda_k|^2}.$$

On pourra éventuellement admettre cette inégalité et continuer ainsi le problème. D'après la formule de Plancherel, on a

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \|\varphi_\ell\|^2 = \sum_{k\in F} |\lambda_k|^2\, |\omega_k - k|^{2\ell} \leq \mu^{2\ell} \sum_{k\in F} |\lambda_k|^2$$

d'après la définition de μ. On a donc, en injectant ces inégalités dans l'inégalité établie à la question **3** :

$$\Big\| \sum_{k\in F} \lambda_k\, (\dot{e}_k - \dot{f}_k) \Big\| \;\leq\; \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\pi^\ell}{\ell!}\, \mu^\ell \sqrt{\sum_{k\in F} |\lambda_k|^2} \;\leq\; (e^{\mu\pi} - 1) \sqrt{\sum_{k\in F} |\lambda_k|^2},$$

ce qui fournit l'inégalité requise.

5. *Montrer qu'il existe un unique opérateur linéaire continu T de H dans lui-même tel que $T(\dot{e}_k) = \dot{e}_k - \dot{f}_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (on construira d'abord T sur le sous-espace vectoriel engendré par les $\dot{e}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, puis on expliquera comment cet opérateur se prolonge de manière unique à l'espace de Hilbert H tout entier).* L'action de T sur le sous-espace vectoriel engendré par les $\dot{e}_k$ (au sens algébrique du terme, *i.e.* l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies des $\dot{e}_k$) est définie par

$$T\Big(\sum_{k\in F} \lambda_k\, \dot{e}_k \Big) = \sum_{k\in F} \lambda_k\, (\dot{e}_k - \dot{f}_k)$$

pour toute partie finie F de $\mathbb{Z}$, pour toute collection de nombres complexes $(\lambda_k)_{k\in F}$. Soit maintenant $\dot{h} \in H$. On a

$$\dot{h} = \lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{k=-N}^{N} \langle \dot{h}, \dot{e}_k\rangle\, \dot{e}_k \Big).$$

Mais on a, pour tout $p > q > 0$,

$$\begin{aligned} & \Big\| T\Big(\sum_{p\leq |k|\leq q} \langle \dot{h}, \dot{e}_k\rangle\, \dot{e}_k \Big) \Big\| = \\ = \ & \Big\| \sum_{p\leq |k|\leq q} \langle \dot{h}, \dot{e}_k\rangle\, T(\dot{e}_k) \Big| = \Big| \sum_{p\leq |k|\leq q} \langle \dot{h}, \dot{e}_k\rangle\, (\dot{e}_k - \dot{f}_k) \Big\| \\ \leq \ & (e^{\mu\pi} - 1) \sqrt{\sum_{p\leq |k|\leq q} |\langle \dot{h}, \dot{e}_k\rangle|^2} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité établie à la question **5**. La suite

$$\Big(T\Big(\sum_{k=-N}^{k=N} \langle \dot{h}, \dot{e}_k\rangle\, \dot{e}_k \Big) \Big)_{N\geq 1}$$

est donc de Cauchy dans H, donc convergente vers une limite que l'on définit comme $T(\dot{h})$. Si l'on prend une autre suite

$$\Big(\sum_{k\in F_N} \langle \dot{h}, \dot{e}_k\rangle\, \dot{e}_k \Big)_{N\geq 1}$$

convergeant aussi vers $\dot{h}$, on constate que la suite

$$\Big(T\Big(\sum_{k\in F_N} \langle \dot{h}, \dot{e}_k\rangle\, \dot{e}_k \Big) \Big)_{N\geq 1}$$

est aussi convergente vers la même limite $T(\dot{h})$, ce qui rend la définition de $T(\dot{h})$ licite. L'inégalité établie à la question **5** implique aussi

$$\|T(\dot{h})\| \leq (e^{\mu\pi} - 1)\, \|\dot{h}\|,$$

ce qui montre que l'application linéaire T, ainsi prolongée à H, est un opérateur continu, de norme au plus égale à $e^{\mu\pi} - 1$.

6. *On suppose $\mu < (\log 2)/\pi$. Vérifier que T est un opérateur continu de norme $\|T\| = \tau$ strictement inférieure à 1, puis que $S = \mathrm{Id}_H - T$ est*

un opérateur continu inversible dont l'inverse S^{-1} est aussi continu et donné par :

$$S^{-1}(\dot{h}) = \lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} T^k(\dot{h})\Big)$$

(T^k désignant, pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'itéré de T un nombre k de fois, $T^0 = \mathrm{Id}_H$). Vérifier les inégalités

$$\|S\| \leq 1+\tau, \quad \|S^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\tau}\,.$$

Si $\mu < (\ln(2))/\pi$, on a $e^{\pi\mu} < 2$, soit $e^{\pi\mu} - 1 < 1$. On a donc bien $\|T\| = \tau \leq e^{\pi\mu} - 1 < 1$. Pour tout $\dot{h} \in H$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a (par une récurrence immédiate), $\|T^k(\dot{h})\| \leq \tau^k \, \|\dot{h}\|$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k(\dot{h})\| \leq \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \tau^k\Big) \, \|\dot{h}\| = \frac{1}{1-\tau} \, \|\dot{h}\|. \qquad (\dagger)$$

Comme H est complet, la série absolument convergente

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k(\dot{h})$$

est donc convergente dans H. L'application

$$\dot{h} \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} T^k(\dot{h}) = \lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} T^k(\dot{h})\Big)$$

définit de plus (d'après l'inégalité (†) établie ci dessus) un opérateur linéaire continu

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

de norme au plus $1/(1-\tau)$. D'autre part

$$(\mathrm{Id}_H - T) \circ \sum_{k=0}^{n} T^k = \Big(\sum_{k=0}^{n} T^k\Big) \circ (\mathrm{Id}_H - T) = \mathrm{Id}_H - T^{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (\dagger\dagger)$$

Comme

$$\|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1} = \tau^{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

et que la suite géométrique $(\tau^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on obtient bien, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (††),

$$(\mathrm{Id}_H - T) \circ U = U \circ (\mathrm{Id}_H - T) = \mathrm{Id}_H,$$

ce qui montre que $S = \mathrm{Id}_H - T$ est inversible, d'inverse $U = S^{-1}$, ce qu'il s'agissait de montrer. Comme

$$\|S(\dot{h})\| = \|\dot{h} - T(\dot{h})\| \leq \|\dot{h}\| + \|T(\dot{h})\| \leq (1+\tau)\,\|\dot{h}\|,$$

on a bien sûr $\|S\| \leq 1 + \tau$.

7. *On désigne par S^* l'adjoint de S. Montrer que S^* est aussi inversible et d'inverse continu et que l'on a $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$. Vérifier les inégalités*

$$\|S^*\| \leq 1 + \tau, \quad \|(S^*)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\tau}\,.$$

Comme $S \circ S^{-1} = S^{-1} \circ S = \mathrm{Id}_H$, on a, en prenant les adjoints

$$(S^{-1})^* \circ S^* = S^* \circ (S^{-1})^* = \mathrm{Id}_H^* = \mathrm{Id}_H.$$

Ceci montre que S^* est inversible, d'inverse $(S^{-1})^*$. Comme la norme d'un opérateur est égale à celle de son adjoint (Proposition 1.14 du cours), les inégalités

$$\|S\| \leq 1 + \tau, \quad \|S^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\tau}$$

établies à la question **6** impliquent aussi les inégalités

$$\|S^*\| \leq 1 + \tau, \quad \|(S^*)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\tau}\,.$$

demandées ici.

8. *On pose, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\dot{g}_k = (S^*)^{-1}(\dot{e}_k)$. Vérifier (en utilisant la formule d'adjonction) que l'on a*

$$\forall\, k \in \mathbb{Z},\ \forall\, l \in \mathbb{Z},\ \langle \dot{f}_k, \dot{g}_l \rangle = \langle \dot{e}_k, \dot{e}_l \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } k = l \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La formule d'adjonction (formule (1.33) du cours) implique :

$$\begin{aligned} \langle \dot{f}_k, \dot{g}_l \rangle &= \langle \dot{f}_k, (S^*)^{-1}(\dot{e}_l) \rangle = \langle \dot{f}_k, (S^{-1})^*(\dot{e}_l) \rangle \\ &= \langle S^{-1}(\dot{f}_k), \dot{e}_l \rangle = \langle S^{-1}\big(\dot{e}_k - T(\dot{e}_k)\big), \dot{e}_l \rangle \\ &= \langle S^{-1}(S(\dot{e}_k)), \dot{e}_l \rangle = \langle \dot{e}_k, \dot{e}_l \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } k = l \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

9. *En utilisant le fait que tout élément $\dot{h}$ de H s'écrit $\dot{h} = S(S^{-1}(\dot{h}))$, montrer que*

$$\forall\, \dot{h} \in H, \quad \dot{h} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \dot{h}, \dot{g}_k\rangle\, \dot{f}_k,$$

la série (bilatère) au second membre convergeant dans H. Vérifier que l'on a aussi, en partant cette fois de $\dot{h} = (S^*)^{-1}(S^*(\dot{h}))$,

$$\forall\, \dot{h} \in H, \quad \dot{h} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \dot{h}, \dot{f}_k\rangle\, \dot{g}_k,$$

la série (bilatère) au second membre convergeant dans H. On a, pour tout $\dot{h} \in H$,

$$S^{-1}(\dot{h}) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle S^{-1}(\dot{h}), \dot{e}_k\rangle\, \dot{e}_k$$

(en vertu de la décomposition d'un élément dans une base hilbertienne, la convergence de la série ayant lieu dans H). On a donc, puisque S est linéaire et continu (et en invoquant la formule d'adjonction) :

$$\begin{aligned} S\big(S^{-1}(\dot{h})\big) &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle S^{-1}(\dot{h}), \dot{e}_k\rangle\, S(\dot{e}_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle S^{-1}(\dot{h}), \dot{e}_k\rangle\, \dot{f}_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \dot{h}, (S^{-1})^*(\dot{e}_k)\rangle\, \dot{f}_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \dot{h}, \dot{g}_k\rangle\, \dot{f}_k. \end{aligned}$$

On a de même, pour tout $\dot{h}$ dans H :

$$S^*(\dot{h}) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle S^*(\dot{h}), \dot{e}_k\rangle\, \dot{e}_k$$

(toujours en invoquant la décomposition d'un élément dans une base hilbertienne, la convergence de la série ayant lieu dans H). On a donc, puisque $(S^*)^{-1}$ est linéaire et continu (et en invoquant encore la formule d'adjonction) :

$$\begin{aligned} (S^*)^{-1}\big(S^*(\dot{h})\big) &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle S^*(\dot{h}), \dot{e}_k\rangle\, (S^*)^{-1}(\dot{e}_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \dot{h}, S(\dot{e}_k)\rangle\, \dot{g}_k \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \dot{h}, \dot{f}_k\rangle\, \dot{g}_k \end{aligned}$$